Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 25 janvier 2024

Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x|y >$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2\frac{< x|u >}{< u|u >}u - x$$

1) Étude de l'application φ_u.

a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

b) En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

c) Soit x appartenant à E, calculer $< \varphi_u(x)|\varphi_u(x) >$.

d) En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < \varphi_u(x)|\varphi_u(y) >=< x|y >$$

e) On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u. En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

f) Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2) Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$.
Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

a) Donner la dimension et une base orthonormée de $H^{\perp}$.

b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

c) Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$. Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) Étude d'une réciproque.
Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall x \in \Delta, \quad \psi(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \Delta^{\perp}, \quad \psi(x) = -x$$

a) Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

Exercice 2

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée et on rappelle que :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}p(\mathbb{R})^2, \ \ (MN)^T = N^T M^T.$$

L'espace $E = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall (X,Y) \in E^2, \quad (X|Y) = X^T Y.$$

et, pour tout vecteur X de E, sa norme est notée :

$$\|X\| = \sqrt{X^T X}.$$

Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est de type n lorsque $A^T = A^n$.

1) Quelques exemples

a) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0.

b) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1.

c) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de type -1.
En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p = 4$.

On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 2.

2) Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $p = 3$ et pour tout réel θ on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que l'on a : $\forall m \in \mathbb{N}$, $(A(\theta))^m = A(m\theta)$.

b) Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n.

On revient au cas général avec $p \geq 3$.

3) Soit A une matrice de $(M)_p(\mathbb{R})$ de type n.

a) Établir l'égalité : $A^{n^2} = A$.

b) On note $B = A^{n+1}$.

i) Montrer que $B^n = B$.

ii) Démontrer que B est une matrice symétrique.

iii) Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.
On pourra examiner $X^T BX$ où X est un vecteur bien choisi de E.

iv) Déterminer les valeurs propres de la matrice B, lorsque B n'est ni la matrice nulle, ni la matrice identité.

v) Prouver que B est une matrice de projection orthogonale.
On précisera ses éléments caractéristiques.

c) Prouver que $\operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Ker}(A)$.

d) Démontrer que $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B)$.

e) Prouver que $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

f) Démontrer que l'on a : $\forall X \in \operatorname{Im}(A)$, $\|AX\| = \|X\|$.

g) Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1.

4) Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n + 1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.