Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 11 décembre 2025

Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1

Posons $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \qquad L_i = \frac{\prod_{j\neq i}(X-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par construction, d'après le cours, la décomposition de P dans la base $(L_0,\dots,L_n)$ s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\int_0^1 f(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t$$

Conclusion, en posant $\alpha_k = \int_0^1 f(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k P(a_k)}$$

On a bien construit des $\alpha_k = \int_0^1 f(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t$ qui ne dépendent pas de P, et donc conviennent pour tout P.

Exercice 2 (D'après banque PT)

Partie 1

1) a) *C'est du cours, mais il faut savoir le redémontrer.*

$$\begin{aligned}
f\circ u &= f\circ\left(\sum_{i=0}^{d} a_i f^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i f\circ f^i && \text{par linéarité de } f \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i f^i\circ f && \text{car } f\circ f^i = f^{i+1} = f^i\circ f \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d} a_i f^i\right)\circ f && \text{par définition des opérations sur les fonctions} \\
&= u\circ f
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ et } u \text{ commutent}}$$

b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de diagonalisation de f, et D la matrice – diagonale – de f dans cette base :

$$D = \mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Notons M la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned} M = P(D) &= \sum_{i=0}^{d} a_i D^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} a_i \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^i \end{pmatrix} && \text{car } D \text{ est diagonale} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme la matrice de u est diagonale dans la base $\mathscr{B}$, nous venons de montrer que

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est diagonalisable dans la même base que } f}$$

Les valeurs propres de u sont $P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)$, donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(u) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)\}}$$

La fonction $t \mapsto P(t)$ n'a aucune raison d'être injective, donc les $P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)$ n'ont pas de raison d'être distincts.

2) a) L'espace vectoriel E est de dimension n et f admet n valeurs propres distinctes, donc, par théorème de diagonalisation (condition suffisante),

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable}}$$

b) Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i} = n$ et $1 \leqslant \dim E_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \quad \dim E_{\lambda_i} = 1}$$

c) *Appliquons les méthodes habituelles : « pour tout i (...) », donc on fixe : « Soit i (...) ».*
Une implication ? Supposons A, montrons B. C'est la question b) ? Essayons d'écrire le résultat de a).
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, et e_i un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i (donc $e_i \neq 0$).
D'après la question précédente, $\dim E_{\lambda_i} = 1$. Donc

$$E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}\,(e_i)$$

De plus,
$$\begin{aligned} f(g(e_i)) &= g(f(e_i)) && \text{car } f \text{ et } g \text{ commutent} \\ &= g(\lambda_i e_i) && \text{car } e_i \in E_{\lambda_i} \\ &= \lambda_i g(e_i) \end{aligned}$$

Ainsi, $g(e_i) \in E_{\lambda_i}$. *(Déjà vu dans les exercices d'algèbre linéaire, et fait en cours dans le cas $\lambda_i = 0$.)*
Or $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}\,(e_i) = \{\mu e_i \mid \mu \in \mathbb{R}\}$: il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$. *(cf. le centre de $\mathscr{L}(E)$)*
Ainsi, $e_i \neq 0$ est un vecteur propre de g. Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in \{1,\dots,n\}, \text{ si } e_i \text{ est un vecteur propre de } f,\ e_i \text{ est également un vecteur propre de } g}$$

d) Si $g = \mathrm{id}_E$, on a f et g qui commutent, et $\mu_i = 1$ pour tout i :

$$\boxed{\text{Non, les } \mu_i \text{ ne sont pas forcément 2 à 2 distincts}}$$

e) La famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est libre car c'est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes. Comme $\dim E = n = \mathrm{Card}\,\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ est une base de E.

On peut aussi, dès la question 2a, construire $\mathscr{B}$ comme une base de diagonalisation de f. Donc une base.

D'après c), c'est une base de vecteurs propres de g, donc

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ est diagonalisable}}$$

f) Soit P l'unique polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ qui vérifie

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad P(\lambda_i) = \mu_i$$

c'est-à-dire, si on note $L_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ le i-ème polynôme d'interpolation de Lagrange,

$$P = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$$

Notons $D = \mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $D' = \mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B})$. Alors

$$\begin{aligned} D' &= \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} && \text{par définition du polynôme } P \\ &= P(D) && \text{Comme au 1b} \end{aligned}$$

Donc, en passant aux endomorphismes,

$$\boxed{g = P(f)}$$

Partie 2

1) Montrons que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{R}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

$\boxed{\subset}$
$$\begin{aligned} g \in \mathscr{C}(f) &\Longrightarrow f \circ g = g \circ f \\ &\Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ g = P(f) && \text{D'après 1.2.f} \\ &\Longrightarrow g \in \mathbb{R}[f] \end{aligned}$$

En effet, f et g vérifient les hypothèses de la partie 1, question 2 : f et g commutent et f admet n valeurs propres distinctes. D'où

$$\mathscr{C}(f) \subset \mathbb{R}[f]$$

$\boxed{\supset}$
$$\begin{aligned} g \in \mathbb{R}[f] &\Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X],\ g = P(f) \\ &\Longrightarrow f \circ g = g \circ f && \text{D'après 1.1.a} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{R}[f] \subset \mathscr{C}(f)$$

Conclusion

$$\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathbb{R}[f]}$$

2) **a)** Soit $B = \mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B})$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $g \in \mathscr{C}(f) \Longrightarrow fg = gf$
$\Longrightarrow AB = BA$
$\Longrightarrow B \in \mathcal{C}(A)$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $B \in \mathcal{C}(A) \Longrightarrow AB = BA$
$\Longrightarrow fg = gf$
$\Longrightarrow g \in \mathscr{C}(f)$

Conclusion

$$\boxed{g \in \mathscr{C}(f) \iff B = \mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B}) \in \mathcal{C}(A)}$$

b) Comme $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres, A est diagonale. Et, avec le choix de l'ordre des vecteurs de $\mathscr{B}$ précisé par l'énoncé,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_k & 0 \\ 0 & \mu I_{n-k} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k = \dim E_\lambda \quad \text{et} \quad n-k = \dim E_\mu$$

Notons $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, une décomposition par blocs identique : $B_{11} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ etc.

$$\text{Comme} \begin{cases} AB = \begin{pmatrix} \lambda I_k & 0 \\ 0 & \mu I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda B_{11} & \lambda B_{12} \\ \mu B_{21} & \mu B_{22} \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_k & 0 \\ 0 & \mu I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda B_{11} & \mu B_{12} \\ \lambda B_{21} & \mu B_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{C}(A) &\Longrightarrow AB - BA = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda B_{11} & \lambda B_{12} \\ \mu B_{21} & \mu B_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda B_{11} & \mu B_{12} \\ \lambda B_{21} & \mu B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda-\mu) B_{12} \\ (\mu-\lambda) B_{21} & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow B_{12} = 0 \quad \text{et} \quad B_{21} = 0 \qquad \text{car } \lambda \neq \mu \\ &\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et réciproquement,

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} &\Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} \lambda B_{11} & 0 \\ 0 & \mu B_{22} \end{pmatrix} = BA \\ &\Longrightarrow B \in \mathcal{C}(A) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{B \in \mathcal{C}(A) \text{ si et seulement si } B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \text{ où } B_{11} \in \mathscr{M}_{\dim E_\lambda}(\mathbb{R}) \text{ et } B_{22} \in \mathscr{M}_{\dim E_\mu}(\mathbb{R})}$$

c) D'après le cours, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$ si et seulement si g laisse stable $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k) = E_\lambda$ et $\mathrm{Vect}\,(e_{k+1}, \dots, e_n) = E_\mu$. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g(E_\lambda) \subset E_\lambda \quad \text{et} \quad g(E_\mu) \subset E_\mu\}}$$

On remarque que $\mathbb{R}[f] \subset \mathscr{C}(f)$ (la preuve du 1 est toujours valable pour cette inclusion), mais, dès que $\dim E_\lambda > 1$ ou $\dim E_\mu > 1$, cette inclusion est stricte.