

Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
Déterminer $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(a_k)$$

à l'aide des polynômes de Lagrange

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. , et soit f un endomorphisme de E.

Partie 1

1) On suppose que f est diagonalisable. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, et $u = P(f)$.

- **a)** Montrer que f et u commutent.
- **b)** Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

2) Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f. On suppose désormais que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- **a)** L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- **b)** Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?
- **c)** En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, si e_i est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.
- **d)** Les μ_i sont-ils forcément 2 à 2 distincts ?
- **e)** L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
- **f)** Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
  Indication : *Utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange*

Partie 2

Posons

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

Cet ensemble s'appelle le commutant de f.

1) Si f admet n valeurs propres distinctes, déterminer $\mathscr{C}(f)$ à l'aide de la partie 1.

2) Désormais, f admet 2 valeurs propres distinctes, λ et μ, et f est diagonalisable.
Notons $\mathscr{B}$ une base de diagonalisation, telle que les k premiers vecteurs sont des vecteurs propres pour λ, et les $n-k$ suivant pour μ. Notons A la matrice de f dans cette base $\mathscr{B}$, et

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

- **a)** Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $g \in \mathscr{C}(f) \iff B = \mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B}) \in \mathcal{C}(A)$.
- **b)** Montrer que $B \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si B est diagonale blocs, avec un premier bloc de taille $\dim E_\lambda$ et le second de taille $\dim E_\mu$.
- **c)** En déduire $\mathscr{C}(f)$.