

Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (E3A PSI 2023)

Questions de cours

1) Module : $|e^{i\theta}| = 1$. Un argument : θ.

2) Comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$, il vient $\sin(n\pi + t) = \sin(n\pi)\cos(t) + \cos(n\pi)\sin(t) = (-1)^n \sin(t)$.

3) **a)** (a_n) est décroissante et de limite nulle donc positive. Ainsi $\sum(-1)^n a_n$ vérifie le critère des séries alternées :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n \text{ converge}}$$

b) Si $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge, le reste d'ordre $p-1$, $R_{p-1} = \sum_{n=p}^{+\infty}(-1)^n a_n$, existe pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq p}(-1)^n a_n \text{ converge}}$$

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $T_p = R_{p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n a_n$.

Or $\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n a_n$ converge lorsque $p \to +\infty$, de limite $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (T_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell - \ell = 0}$$

d) D'après le critère des séries alternées, R_n est du signe de u_{n+1}, donc $T_p = R_{p-1}$ est du signe de $u_p = (-1)^p a_p$. Comme $a_p \geqslant 0$,

$$\boxed{T_p \text{ est positif si } p \text{ pair et négatif si } p \text{ impair}}$$

4) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitive : soit F une primitive de f.
La fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. De plus

$$\forall x \geqslant 0, \quad \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_0^{\sqrt{x}} = F(\sqrt{x}) - F(0)$$

En posant $g : x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t$, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x > 0, \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}F'(\sqrt{x}) = \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

Conclusion :

$$\boxed{x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ de dérivée } x \mapsto \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$$

*****

5) **a)** On applique ici le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale.

- Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.
- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto ie^{ix(1+t^2)}$.
- Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto ie^{ix(1+t^2)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.
- Pour tout couple $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, $\left|ie^{ix(1+t^2)}\right| = 1$, et la fonction $t \mapsto 1$, indépendante de x, est intégrable sur le segment $[0,1]$.

Par conséquent, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 ie^{ix(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

b) Pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = ie^{ix}\displaystyle\int_0^1 ie^{ixt^2}\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}\ t$, affine, dans l'intégrale, et on obtient

$$F'(x) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u.$$

6) Convergence d'intégrales

a) Les fonctions $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}$ sont définies et continues sur $]0,\pi]$.

La première se prolonge par continuité en 0, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

La seconde est équivalente en 0 à $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$. Puisque $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge (intégrale de Riemann sur un intervalle borné, d'exposant strictement plus petit que 1), par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

b) Puisque $\dfrac{-ie^{iu}}{\sqrt{u}}$ admet une limite finie en $+\infty$, le théorème d'intégration par parties permet d'affirmer que les intégrales $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{ie^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ sont de même nature.

Or $\left|\dfrac{ie^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\right| = \dfrac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ converge (Riemann sur un intervalle non borné, exposant > 1).

Par comparaison, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{ie^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ converge, et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

c) Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge, car $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge comme combinaison linéaire des deux intégrales étudiées à la question 6.1, et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

d) On effectue le changement de variables C^1 et strictement croissant $u = v^2$ dans l'intégrale précédente, qui s'écrit aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iu}2\mathrm{d}(\sqrt{u})$. On obtient l'intégrale $2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\mathrm{d}v$, qui est donc convergente.

7) **a)** w_0 est l'intégrale étudiée en 6.1, les autres sont des intégrales d'une fonction continue sur des segments.

b) Par le changement de variables indiqué, $w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+n\pi)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t$, et $\alpha_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t$ est un réel positif.

c) Pour tout entier naturel n, et tout réel $t \in [0,\pi]$, $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \leq \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}$. Par croissance de l'intégrale, $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.
Ainsi la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

d) D'après ce qui précède, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série alternée et, pour appliquer le critère spécial, il suffit de vérifier que $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
Or $0 \leq \alpha_n \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{n\pi}\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi} \to 0$.
Finalement, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge, et le signe de sa somme est celui du premier terme de la série, à savoir positif.

e) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge, comme partie imaginaire de l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
Pour tout entier naturel N, par la relation de Chasles, $\sum_{n=0}^{N} w_n = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
Par passage à la limite quand $N \to \infty$, il vient $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

8) Pour tout réel $x > 0$, notons $G(x) = i\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$. D'après la question 4, G est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $G'(x) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u = F'(x)$.
Donc il existe un réel K tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = G(x) + K$.
Enfin, $K = F(0) - G(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.
Finalement, $F(x) = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$.

9) Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u$ converge, d'après la question 6, par passage à la limite dans la formule précédente, et en admettant que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, il vient : $0 = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$.
On en déduit que $\left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2 = i\frac{\pi}{4}$, puis que $\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
Ensuite, les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$ convergent comme partie réelle et partie imaginaire de l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u$.
Donc il existe $\epsilon \in \{-1,1\}$ tel que $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \epsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.
Enfin, $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ est un réel positif d'après la question 7, donc

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Il s'agit des intégrales de Fresnel.

Exercice 2

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

- Si $x \in]0,1[$, $0 < x^2 < x < 1$ donc $[x^2, x] \subset]0,1[$.
- Si $x \in]1,+\infty[$, $1 < x < x^2$ donc $[x, x^2] \subset]1,+\infty[$.

Donc $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur le segment de borne x et x^2 : l'intégrale existe et $f(x)$ est bien défini :

$$\boxed{\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} \subset \mathscr{D}_f}$$

2) Soit F une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. La fonction F est $\mathscr{C}^1$ car $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, x et x^2 sont toujours dans le même intervalle, on peut écrire

$$f(x) = F(x^2) - F(x)$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ car composée de fonctions dérivables. De plus,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}}$$

3) **a)** $\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$ donc

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o_1((x-1)^2)$$

b) Avec $x = 1+h$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+h)} &= \frac{1}{h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\ &= \frac{1}{h}\frac{1}{(1 - \frac{h}{2} + o(h))} \\ &= \frac{1}{h}(1 + \frac{h}{2} + o(h)) \qquad\qquad \text{car } \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) \\ &= \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + o_1(1).}$

c) Ainsi, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} = 1 + \dfrac{x-1}{2} + o_1(x-1)$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 1.}$

Et $\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} + o_1(1)$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}.}$$

4) <u>Étude de f au voisinage de 1</u> :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{2}$ ce qui signifie

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}\ |x-1| < \alpha \Longrightarrow \left|\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \varepsilon$$

On choisit $\varepsilon = 1$ et un $\alpha > 0$ qui convient (que l'on peut imposer < 1, quitte à le réduire). On peut donc récrire ci-dessus ainsi, en enlevant les valeurs absolues

$$\begin{array}{lll}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} & -\alpha < x-1 < \alpha \Longrightarrow & 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{1}{2} \leqslant 1 \\
\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} & 1-\alpha < x < 1+\alpha \Longrightarrow & -1+\dfrac{1}{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) \leqslant 1+\dfrac{1}{2} \\
\Longrightarrow \forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\backslash\{1\} & & -\dfrac{3}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) \leqslant \dfrac{3}{2} \\
\Longrightarrow \forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\backslash\{1\} & & \left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant \dfrac{3}{2}
\end{array}$$

On repasse aux valeurs absolues, et on vient de prouver que

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \in]0,1[\text{ tel que pour tout } x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\backslash\{1\},\ \left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant \dfrac{3}{2}}$$

b) Soit $x \in]\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1+\alpha}[\backslash\{1\}$. Comme $\sqrt{1-\alpha} \leqslant 1 \leqslant \sqrt{1+\alpha}$, x, x^2 ainsi que tous les réels t compris entre x et x^2 sont dans $]1-\alpha, 1[$ ou $]1, 1+\alpha[$ (suivant l'emplacement de x). D'après a),

$$-\frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \leqslant \frac{3}{2}$$

En intégrant entre x et x^2 il vient, si $x^2 > x$ (sinon les inégalités changent de sens),

$$-\frac{3}{2}(x^2-x) = \int_x^{x^2} -\frac{3}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} -\frac{3}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}(x^2-x)$$

Ce qui, en passant aux valeurs absolues, s'écrit (pour tout x cette fois-ci)

$$|f(x) - \ln(1+x)| \leqslant \frac{3}{2}|x^2-x|$$

Par encadrement, le terme de gauche tend vers 0 et donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2.}$$

c) Énoncé du théorème : *cf.* cours. La fonction f est continue en 1 (puisque prolongée par continuité), et d'après 3)c), $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 1$ donc cette limite existe et est finie.

Donc, d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$,

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = \lim_{x\to 1} f'(x) = 1.}$$

5) Étude de f au voisinage de 0 :

a) Soit $x \in]0,1[$. Alors $x^2 \leqslant x$ et pour tout $t \in [x^2, x]$, $-\ln t > 0$, donc $f(x) = -\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \geqslant 0$

De plus, $\dfrac{1}{\ln}$ est décroissante sur $]0,1[$, ainsi il vient

$$\begin{array}{lll}
 & \forall t \in [x^2, x] \quad \dfrac{1}{\ln t} \geqslant \dfrac{1}{\ln x} & \\
\Longrightarrow & \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \geqslant \frac{x-x^2}{\ln x} & \text{Par croissance de l'intégrale} \\
\Longrightarrow & f(x) = -\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant -\frac{x(1-x)}{\ln x} \leqslant -\frac{x}{\ln x} &
\end{array}$$

Donc par encadrement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ par } 0.}$$

b) La fonction f est continue en 0. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ donc d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$, f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = 0$.

6) Étude de f au voisinage de $+\infty$: Si $x \in]1, +\infty[$, alors $x \leqslant x^2$ et donc

$$\begin{aligned} \forall t \in [x, x^2] \quad \ln t \leqslant \ln(x^2) &\implies \forall t \in [x, x^2] \quad \frac{1}{2\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \\ &\implies \frac{x^2 - x}{2\ln x} = \int_x^{x^2} \frac{1}{2\ln x} \leqslant f(x) \quad \text{Par croissance de l'intégrale} \end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{x^2 - x}{2\ln x} \sim_{+\infty} \dfrac{x^2}{2\ln x}$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2\ln x} = +\infty$.
D'où, par minoration

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

7) $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

8) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $f''(x) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}$ est de même signe que $g(x) = x\ln x - x + 1$.
Or, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \ln x$, d'où le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f''(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f'	0		$\nearrow$		$+\infty$

Car f' existe et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après 4.

9) Tracé.

10) Calcul d'une intégrale.

a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$.

Étude en 0 :

$$g(t) = \frac{t-1}{\ln t} \sim -\frac{1}{\ln t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Donc g est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Étude en 1 : posons $t = 1 + h$. D'après 3b,

$$\begin{aligned} g(1+h) &= \frac{1+h-1}{\ln(1+h)} \\ &= h\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &= 1 + o(1) \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \end{aligned}$$

Donc g est prolongeable par continuité en 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

b) Soit $(x, y) \in]0, 1[^2$, le changement de variable $t = u^2$ s'écrit

$$\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u \qquad \begin{cases} u = x \iff t = x^2 \\ u = x \iff t = x^2 \end{cases}$$

Et donc

$$\boxed{\int_{y^2}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_y^x \frac{2u}{\ln(u^2)}\,\mathrm{d}u = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,\mathrm{d}u}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_y^{y^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} - \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \\ &= \int_y^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \int_{x^2}^{y^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} - \left(\int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \int_y^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right) && \textit{Chasles : faire apparaître ce qu'on veut} \\ &= \int_{x^2}^{y^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} - \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} && \textit{... le reste devrait disparaître} \\ &= \int_x^y \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t && \text{D'après ci-dessus} \end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 1} \int_x^y \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Donc d'après b), puis 4) et 5),

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to 1} f(y) - \lim_{x\to 0} f(x) = f(1) - f(0) = 1$$