Cours : Liste des questions de cours

($\star$) = difficile
(m) = méthode à connaître
(th♠) = théorème ou résultat incontournable
(c) = classique, peut tomber tel quel
(ci) = classique, peut tomber avec indications

1) (c♠) Expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

2) (c$\star\star$) Démonstration du théorème de Cesàro.

3) (c♠) Limite de la suite $u_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, avec $x\in\mathbb{R}$ (équivalent de $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$).

4) (ci) Nature de la série de Bertrand $\sum\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ selon $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, pour $\alpha\neq 1$.

5) (th♠) Les dix DL usuels : famille exponentielle (exp, cos, sin), géométrique ($\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.

6) (m$\star$) Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

7) (m) Limite en 0^+ de $x\mapsto\dfrac{x^{(x^x)}\ln x}{x^x-1}$.

8) (m) Variations, limite et équivalent de la suite $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n t\,\mathrm{d}t$.

9) (th♠) Nature des intégrales : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta\in\mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}t$

10) (ci) Nature de la série $\sum\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta\in\mathbb{R}$.

11) (ci) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

12) (m) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

13) (mi) Soit $\alpha\in]0,1[$. Nature de la série $\sum\dfrac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles.

14) (m) La suite des $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x^n(1-x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

15) (m) La suite des $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\operatorname{Arctan}(nx)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

16) (m) La série des $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\dfrac{x}{x^2+n^2}$ pour $n\geqslant 1$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$, converge normalement sur tout segment $[0,A]$ avec $A>0$.

17) (m) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-e^{it}}\,\mathrm{d}t=\pi$.

18) (th) Énoncés des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme.

19) (m) Ensemble de définition et caractère $\mathscr{C}^1$ de $x\mapsto f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Équation différentielle vérifiée par f, expression de f sans intégrale.

20) (m) Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, f intégrable sur $\mathbb{R}$, et g bornée, montrer que $f*g$ est définie, continue et bornée. Si g est $\mathscr{C}^1$ et g' bornée, $f*g$ est $\mathscr{C}^1$ et expression de $(f*g)'$.

21) (c) Pour tout $(f,g)\in\mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\operatorname{Ker} f)\subset\operatorname{Ker} f$ et $g(\operatorname{Im} f)\subset\operatorname{Im} f$.

22) (m$\star$) Pour tout $(u,v)\in\mathscr{L}(E)^2$, $\quad\operatorname{Ker}(v\circ u)=\operatorname{Ker} u\iff\operatorname{Ker} v\cap\operatorname{Im} u=\{0\}$

23) (ci$\star$) Centre de $\mathscr{L}(E)$: Les endomorphismes f qui commutent à tout endomorphisme sont les homothéties.

24) (c) Soit $f\in\mathscr{L}(E)$, $x\in E$ et $n\in\mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x)\neq 0$ et $f^n(x)=0$. Montrer que $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ libre.

25) (m) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de Tr A, déterminer Ker f et Im f.

26) (m⋆) det $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$.

27) (c⋆) Déterminant de Vandermonde (valeur et preuve).

28) (th♠) Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable (définition et 2 théorèmes).

29) (th⋆) Énoncer la CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit trigonalisable.

30) (cm) Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\mathrm{Tr}\,(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.

31) (cm) Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

32) (c) Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$, où $a_0, \dots, a_n$ sont des réels 2 à 2 distincts, Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).

33) (c) Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ est un produit scalaire.

34) (m) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\left[\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T A Y = 0\right] \Longrightarrow A = 0$.

35) (ci) Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

36) (c) Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

37) (m) Un projecteur p de E euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint (avec preuve).

38) Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.

39) (m) Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Pour tout $x \in E$, $\inf(\mathrm{Sp}\,(f))\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \sup(\mathrm{Sp}\,(f))\|x\|^2$ p est un endomorphisme autoadjoint (avec preuve).

40) (th ♠) Tableau des lois de probabilités usuelles, complet (avec séries génératrices). *Connaître les lois usuelles, c'est l'analogue des DL usuels en analyse : incontournable.*

41) (th ♠) Formule des probabilités totales, système complet d'événements.

42) (cm) Loi conditionnelle : Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclot.

43) (m) Loi de couple : On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne.

44) (cm) Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Donner la loi de $X+Y$ lorsque $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Donner la loi de $Z = \min(X,Y)$ lorsque $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p, q \in]0,1[$.

45) (th♠) Rayon et somme des séries entières usuelles : famille exponentielle (exp, cos, sin, sh , ch), géométrique ($\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\mathrm{Arctan}\,(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

46) (m) Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.

47) (m) Rayon et somme de $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} z^{2n}$. de $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

48) (mi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$.

49) (mi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$.

50) $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geqslant 0\right\}$ est convexe dans $\mathbb{R}^2$.

51) **($\star$)** La boule ouverte $B(0, \rho)$ est ouverte.

52) **($\star$)** Étude des limites en $(0, 0)$ de $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

53) **(cm$\star$)** $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue et $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

54) **(cm$\star$)** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A^k)_k$, alors $M = \lim\limits_{k \to +\infty} A^k$ est la matrice d'un projecteur.

55) **(m)** Étude des extrema de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.