On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans toute la feuille, les résultats restent vrais.

I) Rappels de PTSI

A) Noyau et image

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
Lorsqu'on parle de noyau et d'image, il s'agit toujours du noyau d'une application linéaire, ou de l'image d'une application linéaire [1].
On peut vous demander d'étudier Ker A ou Im A. Ce sont des abus de notation, il s'agit en fait d'étudier l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

Ainsi (avec (C_i) la i-ème colonne de A) :

- Ker $A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$.
  (d'où « $A \in \operatorname{Ker}(I_n - A) \iff (I_n - A)X = 0$ »).
- Im $A = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \exists X \in \mathbb{R}^n \, Y = AX\} = \operatorname{Vect}\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

  rg $A = \dim \operatorname{Im} A$. Il *faut* savoir calculer le rang d'une matrice.

Et le théorème du rang, avec l'espace de départ $E = \mathbb{R}^n$.

$$\dim \operatorname{Ker} f_A + \dim \operatorname{Im} f_A = \dim \mathbb{R}^n$$

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim \mathbb{R}^n$$

B) Base

Lorsque vous êtes dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre de n vecteurs est automatiquement une base. J'insiste une nouvelle fois...

II) Réduction

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans tout le paragraphe, les résultats restent vrais.

A) Le cas $\lambda = 0$

Le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est le noyau :

$$E_0 = \operatorname{Ker}(0I_n - A) = \operatorname{Ker}(-A) = \operatorname{Ker} A$$

Car $-AX = 0 \iff AX = 0$.
Donc on a les conséquences suivantes (ce sont même des équivalences) :

$$\begin{aligned} \text{rg } A < \dim \mathbb{R}^n = n &\implies \dim \operatorname{Ker} A > 0 && \text{(théorème du rang, cf A))} \\ &\implies E_0 \neq \{0\} \\ &\implies 0 \text{ est valeur propre de } A \end{aligned}$$

1. En algèbre linéaire : dans ce que vous voyez cette année.

B) Le cas général $\lambda \in \mathbb{R}$

Le raisonnement précédent reste valable, en remplaçant A par $\lambda I_n - A$. (ce sont toujours des équivalences, même si je ne précise que le sens le plus utile)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\lambda I_n - A) < \dim \mathbb{R}^n = n &\implies \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) > 0 && \text{(théorème du rang, cf A))} \\
&\implies E_\lambda \neq \{0\} \\
&\implies \lambda \in \operatorname{Sp}(A)
\end{aligned}$$