Commencer par décrire $X(\Omega)$. Utiliser le système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$.
Décrire les événements avant de passer au calcul des probabilités, au moins au brouillon.
$(X = x, Y = y)$ signifie $(X = x) \cap (Y = y)$.

Grenouille. Soit X le nombre d'oeufs pondu par la grenouille, et Y le nombre d'oeufs éclot.
$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Comme chaque oeuf éclot avec une loi $\mathscr{B}(p)$ indépendante, k oeufs sachant qu'il y en a n pondus éclosent selon une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La formule des probabilités totales nous donne, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y = k) && (X = n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ système complet d'événements} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) P(Y = k \mid X = n) && \text{Formule des probabilités totales, et } k \leqslant n \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} \frac{p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (1-p)^n && \text{Or} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^n}{n!} = e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathscr{P}(\lambda p)$.

Loi de $X + Y$ lorsque $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ espace probabilisé.
$(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Comme $(X = k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k, X+Y=n) && \text{Formule des probabilités totales}\\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) && \text{Somme jusqu'à } n \text{ car } Y \geqslant 0\\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) && X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)}$

Loi de $Z = \min(X, Y)$ lorsque $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p, q \in]0, 1[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ espace probabilisé.
$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ Soit $n \in N^*$ fixé. Comme

$$(Z \geqslant n) = (X \geqslant n) \cap (Y \geqslant n)$$

il vient, par indépendance de X et Y,

$$P(Z \geqslant n) = P(X \geqslant n)P(Y \geqslant n)$$

Or $P(X \geqslant n) = (1-p)^{n-1}$ et $P(Y \geqslant n) = (1-q)^{n-1}$: dans la modélisation comme temps du premier succès, ce sont les événements « il n'y a aucun succès jusqu'au rang $n-1$ ». Donc

$$P(Z \geqslant n) = [(1-p)(1-q)]^{n-1}$$

De plus, comme $[\![n, +\infty[\![= \{n\} \cup [\![n+1, +\infty[\![$,

$$(Z \geqslant n) = (Z = n) \cup (Z \geqslant n+1)$$

Les unions sont disjointes, donc

$$P(Z \geqslant n) = P(Z = n) + P(Z \geqslant n+1)$$

Puis

$$P(Z = n) = P(Z \geqslant n) - P(Z \geqslant n+1) = [(1-p)(1-q)]^{n-1}[1-(1-p)(1-q)]$$

Donc $\boxed{Z \sim \mathscr{G}\Big(1-(1-p)(1-q)\Big)}$

Fonctions génératrices Vous devez savoir calculer « rapidement » la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Pour X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$$

- Bernoulli : Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$.

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t = \boxed{(1-p)+pt}$$

- Binomiale : Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.
On peut effectuer un calcul direct (via la formule du binôme de Newton), ou utiliser le raisonnement suivant : Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variable aléatoire discrète mutuellement indépendantes, de même loi $\mathscr{B}(p)$, telles que

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

Alors, pour tout $t \in [-1,1]$, $(t^{X_1}, \ldots, t^{X_n})$ sont mutuellement indépendantes, et

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \mathbb{E}\left(t^X\right) \\ &= \mathbb{E}\left(t^{X_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{E}\left(t^{X_n}\right) \\ &= \boxed{(1-p+pt)^n} \qquad \text{Car, pour tout } i \in [\![1,n]\!]\,,\ \mathbb{E}\left(t^{X_i}\right) = G_{X_i}(t) = 1-p+pt \end{aligned}$$

- Géométrique : Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [-1,1], \quad G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n \\ &= pt \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[(1-p)t\Big]^n \\ &= \boxed{\frac{pt}{1-(1-p)t}} \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)t}{1-(1-p)t} = \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)t-1+1}{1-(1-p)t} \\ &= \frac{p}{1-p}\left[-1 + \frac{1}{1-(1-p)t}\right] \end{aligned}$$

Cette dernière écriture peut être plus pratique pour calculer G'_X, puis $\mathbb{E}(X)$.

- Poisson : Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [-1,1], \quad G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Big[\lambda t\Big]^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda t} \\ &= \boxed{e^{\lambda(t-1)}} \end{aligned}$$