Fiche : Méthodes en Probabilités

Ce document vous rappelle :

1) La liste des questions de cours, et ce qu'il faut en tirer : exercice classique, méthode classique, résultat incontournable.

2) Les méthodes et résultats par chapitre, avec une graduation : ne vous attaquez pas au niveau 2 (♡) tant que le niveau 1 (♠) du chapitre n'est pas maîtrisé, etc.

- ♠ : niveau 1,
- ♡ : niveau 2,
- ♢ : niveau 3,
- ♣ : niveau 4.

I) Questions de cours

($\star$) = difficile
(m) = méthode à connaître
(th) = théorème ou résultat incontournable
(c) = classique, peut tomber tel quel
(ci) = classique, peut tomber avec indications

40) **(th)** Soit X une variable aléatoire discrète, rappeler $X(\Omega)$ et la loi de X lorsque $X \sim \mathscr{B}(N,p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, avec $N \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Connaître les lois usuelles, c'est l'analogue des DL usuels en analyse : incontournable.*

41) **(th)** Formule des probabilités totales, système complet d'événements.

42) **(cm)** Loi conditionnelle : Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclot.

43) **(m)** Loi de couple : On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne.

44) **(cm)** Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Loi de $X+Y$ lorsque $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.
Loi de $Z = \min(X,Y)$ lorsque $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p,q \in]0,1[$.

II) Probabilités, lois

♠ **Vérification** : Nature des objets

- Événements : et/ou/non , $\cap / \cup / \overline{}$.
- Nombres : $+$, $\times$, etc.
- À l'intérieur du $P(\quad)$, est-ce bien un événement. C'est-à-dire un ensemble ou une proposition vrai ou fausse. Pour les variables aléatoire : $(X = k)$, $(X \geqslant k)$, etc...

♠ **Méthode** variables aléatoires : commencer *avant toute autre chose* par donner $X(\Omega)$.
♠ **Méthode** : Décrire les événements (au besoin les nommer). Ne pas se précipiter sur les calculs de probabilités.
♠ **Méthode** de calcul de $P(Z = n)$, loi de la variable aléatoire Z : Formule des probabilités totales, où $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ est le système complet d'événement. *ex : grenouilles, longueur Y de la deuxième chaîne, loi de $X + Y$.*
Résultats : ♢ Les théorèmes de continuité croissantes et décroissantes. ♠ Système complet d'événements. ♠ Événements disjoints.
Résultats : Les diverses formules : ♠ probabilités conditionnelles, ♠ composées, ♠ totales, ♢ de Bayes. Le plus difficile étant de retenir le nom des énoncés. ♠ Évènements indépendants. ♡ Couple de variables aléatoires, ♡ variables aléatoires indépendantes.

III) Moments : espérance, variance, covariance

Résultats : ♠ Espérance, ♠ théorème de Transfert, ♡ variance, ♡ écart-type. ♡ Espérance d'un produit, ♡ Covariance.
Si $X \geqslant 0$, on peut commencer par calculer $E(X) \in [0, +\infty]$ (le dire !), puis *a posteriori* constater qu'il y avait convergence car $E(X) < +\infty$.
Méthodes de mémorisation.

- E se comporte comme une intégrale ♠ : avant tout, regarder la **convergence** ♡ absolue. E est linéaire, positive, croissante ♡.

  Le théorème de Transfert ♡ est un théorème de changement de variable.
- V se comporte comme une norme euclidienne au carré : $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.
- Cov se comporte comme un produit scalaire : bilinéarité, Cauchy-Schwarz,... Idem pour $(X, Y) \mapsto E(XY)$.

Méthode de calcul de $E(X^2)$, de $E(XY)$: théorème de Transfert.
$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$.

IV) Lois usuelles

Résultat : ♠ Lois usuelles : tableau à connaître.
Résultats : Inégalités de Markov ♢ et Bienaymé-Tchebychev ♡ (avec une inégalité large) loi faible des grands nombres ♢.
Méthode : Si on vous demande de prouver $P([\text{une inégalité sur une variable aléatoire } X]) \leqslant \dots$: commencez par écrire Bienaymé-Tchebychev pour cette variable aléaoire.