$\boxed{\text{Formulaire : Trigonométrie}}$

Toutes le formules de trigo se retrouvent à partir de l'exponentielle complexe et des règles de calcul sur les puissances. Il faut impérativement savoir que **ces formules existent** et **savoir les retrouver rapidement**.

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

On est sur le cercle de rayon 1, d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

En développant $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$, puis en identifiant partie réelle et partie imaginaires.

En combinant les deux formules précédentes.

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) &&= \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)} \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) &&= \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)} \\ \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos(a)\cos(b) &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ 2\sin(a)\sin(b) &= -\cos(a+b) + \cos(a-b) \\ 2\sin(a)\cos(b) &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \end{aligned}$$

$\cos(a)\cos(b) = \Re\Big(e^{ia}\cos(b)\Big) = \Re\Big(e^{ia}\dfrac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\Big)$ puis la linéarité de la partie réelle. Etc...

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ -\cos(p) + \cos(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Les mêmes que les précédentes, mais dans l'autre sens. Avec $p = a+b$ et $q = a-b$.

En trigonométrie hyperbolique, on suit la même démarche, souvent seuls quelques signes changent devant les sh .

$$\boxed{e^x = \text{ch } x + \text{sh } x}$$

$$\text{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\text{ch}^2(a) - \text{sh}^2(a) = 1$

$$\begin{aligned}
\text{ch}\,(a+b) &= \text{ch}\,(a)\,\text{ch}\,(b) + \text{sh}\,(a)\,\text{sh}\,(b)\\
\text{sh}\,(a+b) &= \text{ch}\,(a)\,\text{sh}\,(b) + \text{sh}\,(a)\,\text{ch}\,(b)\\
\text{th}\,(a+b) &= \frac{\text{th}\,(a) + \text{th}\,(b)}{1 + \text{th}\,(a)\,\text{th}\,(b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ch}\,(2a) &= \text{ch}^2(a) + \text{sh}^2(a) = 2\,\text{ch}^2(a) - 1 = 1 + 2\,\text{sh}^2(a) &&= \frac{1 + \text{th}^2(a)}{1 - \text{th}^2(a)}\\
\text{sh}\,(2a) &= 2\,\text{sh}\,(a)\,\text{ch}\,(a) &&= \frac{2\,\text{th}\,(a)}{1 - \text{th}^2(a)}\\
\text{th}\,(2a) &= \frac{2\,\text{th}\,(a)}{1 + \text{th}^2(a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,\text{ch}\,(a)\,\text{ch}\,(b) &= \text{ch}\,(a+b) + \text{ch}\,(a-b)\\
2\,\text{sh}\,(a)\,\text{sh}\,(b) &= \text{ch}\,(a+b) - \text{ch}\,(a-b)\\
2\,\text{sh}\,(a)\,\text{ch}\,(b) &= \text{sh}\,(a+b) + \text{sh}\,(a-b)
\end{aligned}$$

Se retrouve à partir des formules de ch $(a+b)$, ch $(a-b)$, etc. Ou en prenant les parties paires et impaire, sur le modèle de $\Re$ et $\Im$.

$$\begin{aligned}
\text{ch}\,(p) + \text{ch}\,(q) &= 2\,\text{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\text{ch}\,(p) - \text{ch}\,(q) &= 2\,\text{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\text{sh}\,(p) + \text{sh}\,(q) &= 2\,\text{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Les mêmes que les précédentes, mais dans l'autre sens. Avec $p = a+b$ et $q = a-b$.