Épreuve de Mathématiques 6

Correction

4

Exercice 1 (Mines-Ponts PC 2017)

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $S_k(\Omega) = [\![1,5]\!]$, $(S_k = i)_{i\in[\![1,5]\!]}$ forme un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales nous donne alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} = 1) &= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}\Big((S_{k+1} = 1) \cap (S_k = i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = i)\mathbb{P}(S_k = i) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} \mathbb{P}(S_k = i)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} \mathbb{P}(S_k = i)}$$

2) La formule des probabilités totales appliquée aux évènements $(S_{k+1} = i)$ à l'aide du système complet d'évènements $(S_k = j)_{j\in[\![1,5]\!]}$ s'écrit

$$\forall i \in [\![1,5]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = j)\mathbb{P}(S_k = j)$$

Matriciellement, il vient

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_{k+1} = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S_{k+1} = 1|S_k = 1) & \cdots & P(S_{k+1} = 1|S_k = 5) \\ \vdots & & \vdots \\ P(S_{k+1} = 5|S_k = 1) & \cdots & P(S_{k+1} = 5|S_k = 5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} = BX_k$$

Avec la matrice $B = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,5]\!]^2}$ où $b_{ij} = \mathbb{P}(S_{k+1} = i|S_k = j)$.
Donc, pour $i = 2$, puis 3 etc...

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 2) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = 2|S_k = j)\mathbb{P}(S_k = j) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 3) + \mathbb{P}(S_k = 5)) \\
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 3) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 2) + \mathbb{P}(S_k = 4)) \\
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 3) + \mathbb{P}(S_k = 5)) \\
&\mathbb{P}(S_{k+1} = 5) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k = 2) + \mathbb{P}(S_k = 4))
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

3) Pour tout $j \in [\![1, 5]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = j) = P(\Omega | S_k = j) = 1$, donc

$$^tB \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = 1) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = 5) \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ est un vecteur propre de } {}^tB\text{, et 1 est la valeur propre associée.}}$$

4) Montrons que $X_0 \in E_1(B)$:

$$BX_0 = \begin{pmatrix} 0 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 \\ 1/16 + 0 + 1/16 + 0 + 1/16 \\ 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16 + 0 \\ 1/16 + 0 + 1/16 + 0 + 1/16 \\ 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16 + 0 \end{pmatrix} = X_0$$

Comme $X_{k+1} = BX_k$ entraîne $X_k = B^k X_0$, il vient, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad X_k = B^k X_0 = X_0$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{Les } S_k \text{ ont toute la loi de } S_0}$$

5) *Quand il y a des zéros – dans les lois conditionnelles et donc dans les lois de couples – il est peu probable que les variable aléatoire discrète soient indépendantes.*

$\mathbb{P}(S_0 = 2 \cap S_1 = 4) = 0 \neq \mathbb{P}(S_0 = 2) \times \mathbb{P}(S_1 = 4)$. Ainsi,

$$\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Exercice 2 (EDHEC 2022)

1) Soit $f \in F$ tel que $k = 0$, et $x \in E$. Comme $\|f(x)\| = 0$, $f(x) = 0$. Ainsi $f = 0$, et

$$\boxed{f = 0}$$

2) **a)** $A^2 = \dfrac{1}{3^{3\times 2}} \begin{pmatrix} (-1)^2+8^2+(-4)^2 & -8-8+(-4)^2 & 0 \\ 0 & 1+64+16 & 0 \\ 0 & 0 & 16+16+49 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{3^6} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 3^4 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{3^2} I_3$

Un polynôme annulateur de A est $P = X^2 - \dfrac{1}{9} = (X - 1/3)(X + 1/3)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) \subset \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}}$$

b) La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée d'après le théorème spectral.
Si $\mathrm{Sp}\,(A) = \{\lambda\}$ avec $\lambda = 1/3$ ou $-1/3$, alors (d'après ci-dessus) il existe $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P(\lambda I_3)P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_3$$

Or A n'est pas diagonale ($A_{11} = -1 \neq 0$), donc $\mathrm{Sp}\,(A)$ n'est pas un singleton. En conclusion,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et } \lambda = -1/3 \text{ et } \mu = 1/3 \text{ sont bien valeurs propres de } A}$$

c) A est symétrique réelle, donc, d'après une propriété du cours, comme $\lambda \neq \mu$, $E_\lambda \perp E_\mu$.
De plus A est diagonalisable, donc, par théorème de diagonalisation, $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}\,(A)} E_{\lambda_i}$.

Ici $\mathrm{Sp}\,(A) = \{\lambda, \mu\}$, donc

$$E = E_\lambda \oplus E_\mu$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{Les sous-espace propre de } f \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E}$$

d) Soit $x \in E$, et $y, z \in E_\lambda \times E_\mu$ tels que $x = y + z$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y+z) \\ &= f(y) + f(z) \\ &= \frac{1}{3}(-y+z) && \text{Car } y \in E_{-1/3} \text{ et } z \in E_{1/3} \end{aligned}$$

Donc *(Une norme euclidienne se manipule au carré)*

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \frac{1}{9}\|-y+z\|^2 && \text{Or } -y \perp z \text{ car } E_\lambda \perp E_\mu \\ &= \frac{1}{9}(\|-y\|^2 + \|z\|^2) && \text{Pythagore} \\ &= \frac{1}{9}(\|y\|^2 + \|z\|^2) \\ &= \frac{1}{9}\|x\|^2 && \text{Pythagore} \end{aligned}$$

Donc, avec $\boxed{k = 1/3}$,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$$

Ainsi,

$$\boxed{f \in F}$$

3) **a)** Supposons $\mathrm{id} \in F$, et $k \in [0,1[$ qui convient. Pour $x \neq 0$ ($E = \mathbb{R}^3 \neq \{0\}$), on a

$$\|x\| \leqslant k\|x\|$$

Comme $x \neq 0$, il vient $1 \leqslant k$, ce qui est absurde :

$$\boxed{\mathrm{id} \notin F}$$

b) Supposons que F est un sous-espace vectoriel. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $f \in F$, $\lambda f \in F$. Posons $f = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{id}$. Comme

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\| = \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|$$

Donc, avec $k = 1/2$, $f \in F$. De plus, avec $\lambda = 2$, $2f = \mathrm{id} \notin E$ d'après 3a : absurde.
Ainsi,

$$\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel}}$$

c) Soient $f, g \in F$, et $k_f, k_g \in [0,1[$ les constantes associées. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|f(g(x))\| &\leqslant k_f\|g(x)\| && \text{car } \|f(y)\| \leqslant k_f\|y\|, \text{ en } y = g(x) \\ &\leqslant k_f k_g\|x\| && \text{car } \|g(x)\| \leqslant k_g\|x\| \end{aligned}$$

Avec $k = k_f k_g \in [0,1[$, $f \circ g \in F$. Ainsi,

$$\boxed{F \text{ est stable par la loi de composition}}$$

d) *On peut faire la démonstration directe, écrivant l'inégalité sur f en $y = f^{-1}(x)$. Mais l'énoncé nous présente ce résultat comme un corollaire des précédents.*
Soit $f \in F$ un automorphisme tel que $f^{-1} \in F$. Alors, d'après 3b, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} \in F$. Ce qui est absurde d'après 3a :

$$\boxed{\text{Si } f \in F \text{ est un automorphisme, alors } f^{-1} \notin F}$$

4) **a)** *Idée : si p est un projecteur non nul, il existe un sous-espace vectoriel non nul où la restriction de p est l'identité, donc l'argument de 3a prouve que $p \notin F$.*
Soit $p \in F$ un projecteur non nul : soit $x \in \mathrm{Im}\, p$, $x \neq 0$. Soit $k \in [0,1[$ qui convient. Comme $p(x) = x$,

$$\|p(x)\| = \|x\| \leqslant k\|x\|$$

Or $x \neq 0$ entraîne $\|x\| \neq 0$, ainsi $1 \leqslant k$ ce qui est absurde.
De plus, avec $k = 0$, on prouve que $f = 0 \in F$.

$$\boxed{F \text{ ne contient pas de projecteurs autres que le projecteur nul}}$$

b) Soit $f \in F$ une symétrie : $f^2 = \mathrm{id}$. D'après 3c, $f^2 \in F$. Or $f^2 = \mathrm{id} \notin F$ d'après 3a. Par l'absurde,

$$\boxed{F \text{ ne contient pas de symétries}}$$

5) Soit f un endomorphisme autoadjoint de E.

a) D'après le théorème spectral, il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E telle que $D = \mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B})$ soit diagonale. Soit une telle base. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$ les coefficients diagonaux de D, qui sont les valeurs propres de f.

Soit $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2 &= \|DX\|^2 && \text{car } \mathscr{B} \text{ est une base orthonormée} \\
&= \| \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_3 x_3 \end{pmatrix} \|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 x_i^2 && \text{or } |\lambda_i| \leqslant k \Longrightarrow \lambda_i^2 \leqslant k^2 \\
&\leqslant k^2 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 && \text{or } \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = \|X\|^2 = \|x\|^2 \\
&\leqslant k^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $k \geqslant 0$,

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant k\|x\|}$$

b) $\boxed{\Longleftarrow}$ Comme $\mathrm{Sp}\,(f)$ est un ensemble fini, si $\mathrm{Sp}\,(f) \subset]-1,1[$, le k défini à la question précédente appartient à $[0,1[$. Ainsi, d'après 5a,

$$f \in F$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, supposons que $f \in F$. Si $\mathrm{Sp}\,(f) \not\subset]-1,1[$, et notons $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $|\lambda| \geqslant 1$. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé : $f(x) = \lambda x$. Il vient

$$\|f(x)\| = |\lambda|\|x\| \geqslant \|x\|$$

Or $f \in F$ entraîne $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ avec $k \in [0,1[$. Ainsi, comme $x \neq 0$ (vecteur propre),

$$k \geqslant 1$$

Ce qui est absurde : $\mathrm{Sp}\,(f) \subset]-1,1[$.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ appartient à } F \text{ si et seulement si les valeurs propres de } f \text{ appartiennent toutes à }]-1,1[}$$

6) Un deuxième exemple. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Sarrus *(quand ça ne se simplifie pas, et qu'il y a déjà quelques 0, il reste Sarrus)*.

ATTENTION, *le $\frac{1}{6}$ n'est pas décoratif. Soit on le rentre (premiers calculs), soit on le sort (seconds calculs), mais on ne l'ignore pas.*

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(xI_3 - A)\\
&= \begin{vmatrix} x & 1/3 & -1/3\\ 1/3 & x+1/6 & 0\\ -1/3 & 0 & x-1/6\end{vmatrix}\\
&= x\Big(x+\frac{1}{6}\Big)\Big(x-\frac{1}{6}\Big) + 0 + 0 - \left[\frac{1}{3}\times\Big(x+\frac{1}{6}\Big)\times\frac{1}{3}\right] - \left[\Big(\frac{1}{3}\Big)^2\Big(x-\frac{1}{6}\Big)\right]\\
&= x\left(x^2 - \frac{1}{6^2}\right) - \frac{1}{9}x - \frac{1}{6\times 3^2} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{6\times 3^2} \qquad \textit{Pas de calculs inutiles, par exemple } 6\times 9\\
&= x\left(x^2 - \frac{1}{2^2 3^2} - \frac{2}{3^2}\right)\\
&= x\left(x^2 - \frac{1+8}{2^2 3^2}\right)\\
&= x\left(x^2 - \frac{1}{2^2}\right)\\
&= x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(xI_3 - A)\\
&= \begin{vmatrix} x & 1/3 & -1/3\\ 1/3 & x+1/6 & 0\\ -1/3 & 0 & x-1/6\end{vmatrix} \qquad \begin{matrix}\text{On sort } 1/3\\ \text{On sort } 1/6\\ \text{On sort } 1/6\end{matrix}\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3x & 1 & -1\\ 2 & 6x+1 & 0\\ -2 & 0 & 6x-1\end{vmatrix} \qquad \text{On développe par rapport à la dernière colonne}\\
&= \frac{1}{3\times 6^2}\left((-1)^{3+1}\times(-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 6x+1\\ -2 & 0\end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(6x-1)\begin{vmatrix} 3x & 1\\ 2 & 6x+1\end{vmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{3\times 6^2}\Big(-(2(6x+1)) + (6x-1)(3x(6x+1)-2)\Big) \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) = \{-1/2, 0, 1/2\}}$$

b) La matrice de f dans une base orthonormée est A, symétrique, donc f est autoadjoint. D'après la question 5b, comme $\mathrm{Sp}\,(f) \subset]-1,1[$,

$$\boxed{f \in F}$$

D'après 5a, $k = \max\{|\lambda| \ \mid \ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)\}$ convient. Donc ici,

$$\boxed{k = 1/2}$$

Exercice 3 (Mines-Ponts PC 2023)

Il faut savoir lire rapidement le paragraphe qui pose les notations et rappelle ce qui est parfois des évidences (I_n), ou parfois des rappels bienvenus ($S \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si...).

Partie 1 : Questions préliminaires

Dans les préliminaires, les questions peuvent être plus décousues que dans les parties qui suivent.

1) Comme S est symétrique réelle, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que

$$S = PDP^{-1} = PDP^\top$$

Question cadeau. **Vous saurez** *faire ce genre de question en avril.*

2) *cf.* votre cours.

3) *Méthode : écrire, avec les notations du cours, la définition de « partie convexe » – qui est rappelée ici, donc aucun effort à faire :*

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1], \qquad (1-t)x + ty \in C$$

Puis traduire dans les notations de l'énoncé :

$$\forall A, B \in S_n^+(\mathbb{R}), \quad \forall t \in [0,1], \qquad (1-t)A + tB \in S_n^+(\mathbb{R})$$

Et savoir traduire « $\in S_n^+(\mathbb{R})$ »– qui est aussi rappelé par l'énoncé.

Soient $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$. Montrons que $S = (1-t)A + tB \in S_n^+(\mathbb{R})$.

- Comme $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel, $(1-t)A + tB \in S_n(\mathbb{R})$.
  Vous pouvez toujours vérifier que $(1-t)A + tB^\top = \cdots = (1-t)A + tB$. Si vous voulez.
- Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \langle SX, X\rangle &= \langle ((1-t)A + tB)X, X\rangle \\ &= (1-t)\langle AX, X\rangle + t\langle BX, X\rangle \\ &\geqslant 0 \qquad \text{Comme somme de produits de termes positifs} \end{aligned}$$

Ainsi, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, et

$$\boxed{\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ est une partie convexe de } \mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$$

De même, soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $t \in [0,1]$. Il vient $(1-t)A + tB \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

$$\begin{aligned} \langle SX, X\rangle &= \langle ((1-t)A + tB)X, X\rangle \\ &= (1-t)\langle AX, X\rangle + t\langle BX, X\rangle \end{aligned}$$

Si $t = 0$, $S = A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Sinon, $t\langle BX, X\rangle > 0$ et $(1-t)\langle AX, X\rangle \geqslant 0$, d'où

$$\langle SX, X\rangle > 0$$

Ainsi, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et

$$\boxed{\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est une partie convexe de } \mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$$

Pour nier une propriété qui s'écrit avec des « pour tout », il faut montrer un « il existe ». Le plus simple et le plus propre est de trouver un (contre) exemple bien concret, simple si possible.

La matrice identité est symétrique, et $\mathrm{Sp}\,(I_n) = \{1\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$.
De plus, $-I_n$ a pour unique valeur propre $-1 < 0$, donc $-I_n \notin S_n^+(\mathbb{R})$ et $-I_n \notin S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Ces parties ne sont pas des sous-espaces vectoriels de } \mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$$

4) *Très très classique. Exercice 27.*

D'après le théorème spectral, il existe D diagonale et $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Soient P et D qui conviennent. De plus les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec multiplicité).

D'après 2 (ou, désormais, le cours), $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^*$: pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$.

Soit $\widetilde{D}$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\sqrt{\lambda_i}$:

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Par construction, $\widetilde{D}^2 = D$. Posons

$$S = P\widetilde{D}P^{-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S^2 &= P\widetilde{D}P^{-1}P\widetilde{D}P^{-1} \\ &= P\widetilde{D}^2P^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

Il reste à prouver que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par construction, $\mathrm{Sp}\,(S) \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$,

$$S^\top = (P\widetilde{D}P^\top)^\top = P^{\top\top}\widetilde{D}^\top P^\top = S$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ il existe } S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que : } A = S^2}$$

5) *Si M est diagonale, ses valeurs propres sont sur la diagonale, et le calcul est facile. Certes. Diagonalisons ?*

D'après le théorème spectral, il existe D diagonale et $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = PDP^{-1}$$

Soient P et D qui conviennent. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec multiplicité). Ainsi,

$$\begin{aligned} \|M\|_2^2 &= \mathrm{Tr}\,(M^\top M) && \textit{une norme euclidienne se calcule au carré} \\ &= \mathrm{Tr}\,(PD^\top P^\top PDP^\top) \\ &= \mathrm{Tr}\,(PD^2P^{-1}) && \text{Car } P^\top = P^{-1} \\ &= \mathrm{Tr}\,(D^2) && \text{Deux matrices semblables ont même trace} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\|M\|_2 \text{ est la somme des valeurs propres de } M \text{ au carrés, comptées avec multiplicité.}}$$

6) *Question très délicate. Voir le rapport du jury. Savoir passer rapidement pour se consacrer en priorité aux questions à votre portée.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : \quad \text{pour tout } (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \text{ tel que } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ et pour tout } (x_1, \ldots, x_p) \in I^p,$$

on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

est vraie pour tout $p \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_1 = 1$, et $x_1 \in I$. La formule s'écrit alors

$$f(1 \times x_1) \leqslant 1 \times f(x_1)$$

  Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie.

  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$ et $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in I^{p+1}$. Posons $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

  Si $t = 0$, alors, par positivité des λ_i, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, et donc $\lambda_{p+1} = 1$. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

  Si $t > 0$, posons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mu_i = \lambda_i / t$, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1$. Ainsi,

$$\mathcal{H}_p : \qquad f\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \mu_i f(x_i)$$

  De plus, $\lambda_{p+1} = 1 - t$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = t \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i + (1-t) x_{p+1}$$

  Donc

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(t \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i + (1-t) x_{p+1}\right) \\ &\leqslant t f\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i\right) + (1-t) f(x_{p+1}) && \text{par convexité de } f \\ &\leqslant t \sum_{i=1}^{p} \mu_i f(x_i) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i) && \mathcal{H}_p \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pour tout } p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ pour tout } (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \text{ tel que } \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \\ \text{et pour tout } (x_1, \ldots, x_p) \in I^p, \text{ on a :} \\ \qquad\qquad f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i). \end{array}}$$

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

7) Soit $f = -\ln$. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

Donc

$$\boxed{\text{La fonction } -\ln \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de M.
Si un coefficient de la diagonale est nul, alors l'inégalité s'écrit $\dfrac{\text{Tr } M}{n} \geqslant 0$, ce qui est vrai car, pour tout i, $\lambda_i \geqslant 0$.
Sinon, pour tout i, $\lambda_i > 0$, et

$$\text{Tr } M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \det M = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

L'inégalité de Jensen s'écrit, pour des coefficients tous égaux à $1/n$ (de somme 1), et des $x_i = \lambda_i$,

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\ln(\lambda_i)$$

Or $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} -\ln(\lambda_i) = -\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{n}}\right)$, donc, comme l'exponentielle est croissante,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

D'où, en remplaçant,

$$\boxed{\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geqslant (\det(M))^{\frac{1}{n}}}$$

8) Appliquons le théorème spectral (énoncé à la question 1) : soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que

$$M = PDP^{-1}$$

La trace et le déterminant étant invariant par changement de base, il suffit de montrer d'inégalité pour la matrice D.
Les coefficient diagonaux de D sont les valeurs propres de M. Or $M \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Sp}\,(M) \subset \mathbb{R}_+$. Donc D vérifie les hypothèses de la question 7, et

$$\frac{\text{Tr}\,(D)}{n} \geqslant (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geqslant (\det(M))^{\frac{1}{n}}}$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

9) **a)** Comme $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}\,(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, et, en particulier, 0 n'est pas valeur propre :

$$E_0 = \mathrm{Ker}\ S = \{0\}$$

D'où $$\boxed{S \text{ est inversible}}$$

On peut aussi le montrer directement à partir de $X \in \mathrm{Ker}\ S \Longrightarrow \langle SX, X\rangle = \langle 0, X\rangle = 0 \Longrightarrow X = 0$.

Calculons la transposée de $M = S^{-1}BS^{-1}$:

$$\begin{aligned} M^\top &= (S^{-1})^\top B^\top (S^{-1})^\top \\ &= (S^\top)^{-1} B (S^\top)^{-1} && \text{Car } B \in S_n(\mathbb{R}) \text{ et la transposition commute avec l'inverse} \\ &= S^{-1}BS^{-1} = M && \text{Car } S \in S_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{S^{-1}BS^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})}$$

b) D'après la question 4, $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ entraîne l'existence de $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$. Soit une telle matrice S.
D'après a), $S^{-1}BS^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$: soient $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $S^{-1}BS^{-1} = PDP^{-1}$, donnés par le théorème spectral. Ainsi,

$$\begin{aligned} B &= SPDP^{-1}S \\ &= SPDP^\top S^\top && \text{Car } P^{-1} = P^\top \text{ et } S^\top = S \\ &= (SP)D(SP)^\top \end{aligned}$$

Posons $\boxed{Q = SP}$.

$$\begin{aligned} QQ^\top &= SPP^\top S^\top \\ &= S^2 && \text{Car } P^\top = P^{-1} \text{ et } S^\top = S \\ &= A \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe une matrice diagonale } D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } B = QDQ^\top \text{ et } A = QQ^\top}$$

c) *Ce sont les valeurs propres de $S^{-1}BS^{-1}$ qui sont sur diagonale de D, a priori pas celles de B. La matrice Q n'est, a priori, pas orthogonale. Donc l'argument $\mathrm{Sp}\,(B) \subset \mathbb{R}_+^*$ ne permet pas de conclure, il faut reprendre le raisonnement et essayer de l'adapter.*

Notons d_{ii} le i-ème coefficient de la diagonale de D.
Supposons que $B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$:

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0, \qquad \langle BX, X\rangle > 0$$

Or, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle BX, X\rangle &= (BX)^\top X = X^\top B^\top X = X^\top BX && \text{Car } B^\top = B \\ &= X^\top QDQ^\top X = (Q^\top X)^\top DQ^\top X && \text{D'après b} \\ &= \langle DY, Y\rangle && \text{Avec } Y = Q^\top X \end{aligned}$$

Soit e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire le vecteur colonne avec un 1 en i-ème position et 0 ailleurs.
Posons $X = (Q^\top)^{-1}e_i$ (car $Q \in GL_n(\mathbb{R})$), alors $Y = Q^\top X = e_i$ et $DY = De_i = d_{ii}e_i$. Ainsi,

$$\langle BX, X\rangle = \langle De_i, e_i\rangle = d_{ii}\|e_i\|^2 = d_{ii}$$

Or $X \neq 0$ et $B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $\langle BX, X\rangle > 0$: $d_{ii} > 0$.
Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{, les éléments diagonaux de } D \text{ sont strictement positifs}}$$

10) Soit $f : t \mapsto \ln\left(1 + e^t\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ $(1 + e^t > 1 > 0)$ et $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$$

Écrivez le nombre d'étapes qu'il vous faut : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u' = \dots$ *, mais les calculs doivent être faits, et justes.*

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{e^t(1+e^t) - e^t(e^t)}{(1+e^t)^2} \\ &= \frac{e^t}{(1+e^t)^2} > 0 \end{aligned}$$

Même remarque.

Donc

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \ln\left(1+e^t\right) \text{ est convexe}}$$

11) *Là aussi, la question suivante est beaucoup plus abordable que celle-ci, délicate. Le rapport du jury dit « Elle a été traitée par un certain nombre de bons candidats. » Comprendre : peu de candidats.*
Supposons $A = I_n$ et $B = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $d_i > 0$. Alors, toutes les matrices étant diagonales,

$$\det(A) = 1, \qquad \det(B) = \prod_{i=1}^n d_i \quad \text{et} \quad \det(A+B) = \prod_{i=1}^n (1+d_i)$$

Au brouillon, vous écrivez l'inégalité cherchée dans le cas suggéré par l'indication. Vous prenez le $\ln$ *pour essayer de faire apparaître la fonction* f *précédente. Une fois obtenue la formule souhaité, vous « retournez » les calculs.*
L'inégalité de Jensen, avec $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$ et $x_i = \ln(d_i)$, s'écrit

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(d_i)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\big(\ln(d_i)\big)$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(d_i) &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n d_i\right) \\ &= \ln\left(\Big(\prod_{i=1}^n d_i\Big)^{\frac{1}{n}}\right) \\ f\big(\ln(d_i)\big) &= \ln\left(1 + e^{\ln(d_i)}\right) \\ &= \ln(1 + d_i) \end{aligned}$$

Alors, l'inégalité précédente s'écrit

$$\ln\left[1 + \left(\prod_{i=1}^n d_i\right)^{\frac{1}{n}}\right] \leqslant \ln\left[\left(\prod_{i=1}^n (1+d_i)\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

Puis, par croissance de l'exponentielle,

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n d_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^n (1+d_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ainsi, dans le cas diagonal,

$$\boxed{(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}}$$

Soient, désormais, $(A, B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$ quelconques. Soient D diagonale à coefficients diagonaux > 0 et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ données par la question 9 *Toujours essayer d'utiliser les questions qui précèdent : si on vous les a posé, c'est qu'elles ont leur utilité.*

$$A = QQ^\top \qquad \text{et} \qquad B = QDQ^\top$$

D'après ci-dessus,

$$(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(I_n))^{\frac{1}{n}} + (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(QMQ^\top) = \det(Q)\det(M)\det(Q^\top) = (\det(Q))^2 \det(M)$. Donc en multipliant l'inégalité précédente par $\left((\det(Q))^2\right)^{\frac{1}{n}} > 0$, il vient

$$\left(\det(Q)\det(I_n + D)\det(Q^\top)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\det(Q)\det(I_n)\det(Q^\top)\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\det(Q)\det(D)\det(Q^\top)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Or $\det(Q)\det(I_n + D)\det(Q^\top) = \det(QQ^\top + QDQ^\top) = \det(A+B)$.
De même, $\det(Q)\det(I_n)\det(Q^\top) = \det(A)$ et $\det(Q)\det(D)\det(Q^\top) = \det(B)$. Finalement,

$$\boxed{\forall (A, B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2, \quad (\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}}$$

Partie 4 : Encore de la convexité !

12) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Ainsi,

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} g(t) &= \det(I_n + tA) \\ &= \det\left(-t\Big(-\frac{1}{t}I_n - A\Big)\right) \\ &= (-t)^n \det\left(-\frac{1}{t}I_n - A\right) \\ &= (-t)^n \chi_A\left(-\frac{1}{t}\right) \\ &= (-t)^n \prod_{i=1}^n (-1/t - \lambda_i) \\ &= \boxed{\prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i)} \end{aligned}$$

On pouvait aussi utiliser le théorème spectral pour diagonaliser A, puis faire le calcul direct.
Par conséquent, g est polynomiale en t, donc

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathrm{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

13) Comme A est définie positive, $g(t) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, et par convexité de $-\ln$, il vient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln\left(\det\left(\mathrm{I}_n + tA\right)\right) \leqslant \mathrm{Tr}(A)t}$$