

## Épreuve de Mathématiques 5

Correction

### Exercice 1 (extrait de Epita 2025)

1) Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ x-2 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} x+2 & -1 & -2 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(x+2)x$$

Matrice triangulaire

Conclusion :

$$\chi_A(x) = x(x-2)(x+2)$$

Les valeurs propres sont :

- $\lambda = 0$  de multiplicité  $\alpha = 1$  ;
- $\lambda = 2$  de multiplicité  $\alpha = 1$  ;
- $\lambda = -2$  de multiplicité  $\alpha = 1$  ;

*Vérification avec la trace* :  $\text{Tr}(A) = 0 = 2 - 2 + 0$ .

Diagonalisation : La matrice  $3 \times 3$   $A$  admet 3 valeurs propres distinctes : d'après la condition suffisante de diagonalisation, elle est donc diagonalisable :

A est diagonalisable, semblable à  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Sous-espaces propres et  $P$  :

- $E_0 = \text{Ker } A$  :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $E_2 = \text{Ker}(2I_3 - A)$  :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\iff \begin{cases} x = 5z/3 \\ y = 4z/3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 & L_3 = -L_1 \end{cases} &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z/3 \\ 4z/3 \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases} &\iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $E_{-2} = \text{Ker}(-2I_3 - A)$  :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} &\iff \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} &\iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de vecteurs propres pour  $A$ . En conclusion,

$$\text{Avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A = PDP^{-1}$$

2) Soit  $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} M'^2 = D &\implies PM'^2P^{-1} = PDP^{-1} & (PM'P^{-1})^2 = A &\implies PM'^2P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\implies (PM'P^{-1})^2 = A & &\implies M'^2 = D \end{aligned}$$

Donc, avec  $M = PM'P^{-1}$ ,

$$M^2 = A \iff M'^2 = D$$

Donc  $M'^2 = D$  et  $M^2 = A$  ont exactement le même nombre de solutions.

Résolution de  $M'^2 = D$  : Soit  $M' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$  telle que  $M'^2 = D$ .

$$M'D = M'^3 = DM'$$

Ainsi,  $M'$  et  $D$  commutent. Ce qui s'écrit, après calcul des produits,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2b_1 & -2c_1 \\ 0 & 2b_2 & -2c_2 \\ 0 & 2b_3 & -2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ -2a_3 & -2b_3 & -2c_3 \end{pmatrix}$$

D'où  $b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = a_3 = b_3 = 0$ , et  $M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ .

Ainsi,  $M'^2 = D$  s'écrit  $\begin{cases} a_1^2 = 0 \\ b_2^2 = 2 \\ c_3^2 = -2 \end{cases}$

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la dernière équation n'a pas de solution, donc  $M'^2 = D$  non plus, et  $M^2 = A$  non plus.
- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la première équation a une solution, et les deux autres 2 solutions distinctes. Ainsi,  $M'^2 = D$  (et donc  $M^2 = A$ ) ont exactement  $1 \times 2 \times 2 = 4$  solutions.

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R} : 0 \text{ solutions. } \mathbb{K} = \mathbb{C} : 4 \text{ solutions.}}$$

3) Soit  $X$  une colonne propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$  :  $AX = \lambda X$ .

$$\begin{aligned} AMX &= MAX && \text{Car } AM = MA \\ &= M(\lambda X) && \text{Car } AX = \lambda X \\ &= \lambda MX \end{aligned}$$

Donc  $MX \in E_\lambda$ . Or  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, ce qui entraîne  $\dim E_\lambda = 1$ .

Ainsi,  $E_\lambda = \text{Vect}(X)$ , et  $MX \in E_\lambda$  signifie qu'il existe  $\mu \in \mathbb{K}$  tel que  $MX = \mu X$ . Finalement,

$$\boxed{\text{Toute colonne propre } X \text{ de } A \text{ est aussi colonne propre de } M}$$

4) Comme  $A$  de taille  $n$  possède  $n$  valeurs propres distinctes,  $A$  est diagonalisable.

Soit  $\mathcal{B}' = (X_1, \dots, X_n)$  une base de colonnes propres, et  $P = (X_1 \mid \dots \mid X_n)$  la matrice de passage associée. D'après la question 3,  $\mathcal{B}'$  est aussi une base de colonnes propres pour  $M$  :

$$M = PD_M P^{-1} \quad \text{avec } D_M \text{ diagonale}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe } P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ inversible telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}MP \text{ soient toutes les deux diagonales}}$$

5) Soit  $P$  la matrice de passage diagonalisant  $A$ . Notons  $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et  $M = PM'P^{-1}$ . De même qu'à la question 2,  $M^2 = A \iff M'^2 = D$ , et, en notant  $\mu_i$  les coefficients diagonaux de  $M'$  et  $\lambda_i$  ceux de  $D$ , il vient

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mu_i^2 = \lambda_i$$

L'équation  $X^2 = \lambda_i$  a toujours au moins une solution, car  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos. Il y a 2 solutions distinctes si et seulement si  $\lambda_i \neq 0$ , et une seule solution (de multiplicité 2) si  $\lambda_i = 0$ .

$$\boxed{\text{Si } \alpha_0 \text{ est la multiplicité de } 0 \text{ comme valeurs propre, } M^2 = A \text{ a } 2^{n-\alpha_0} \text{ solutions}}$$

## Exercice 2 (CCINP PC 2025)

### Partie I - Généralités

1) Linéarité : Soit  $M, N \in E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) \\ &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N)\end{aligned}$$

Donc  $\varphi_A$  est linéaire.

$\varphi_A : E \rightarrow E$  : Soit  $M \in E$ ,  $\varphi_A(M) = AM \in E$ .

Conclusion :

$$\boxed{\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$$

2) Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ .

$$\forall M \in E, \quad \varphi_A(\varphi_B(M)) = A(BM) = \varphi_{AB}(M)$$

Donc

$$\boxed{\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}}$$

3)  $\implies$  Supposons que  $\varphi_A$  est un isomorphisme : soit  $M \in E$  tel que  $\varphi_A(M) = I_n$ . Alors

$$\varphi_A(M) = AM = I_n$$

Donc, comme  $A$  est carrée,  $A$  est inversible d'inverse  $M$ .

$\impliedby$  Supposons que  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Comme  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ ,

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \varphi_{I_n} = \text{id}_E$$

Donc  $\varphi_A$  est inversible. Comme  $\varphi_A$  est linéaire (question 1), c'est un isomorphisme.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi_A \text{ est un isomorphisme si et seulement si la matrice } A \text{ est inversible}}$$

### Partie II - Étude d'un exemple

4)  $A$  est triangulaire, donc les valeurs propres se lisent sur la diagonale.

- Si  $a \neq 1$  :  $\chi_A(x) = (x-1)(x-a)$  est scindé à racines simples. Donc, par théorème de diagonalisation (condition suffisante),  $A$  est diagonalisable.
- Si  $a = 1$  : Supposons  $A$  diagonalisable. La seule valeur propre est 1, de multiplicité 2, donc il existe  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  telle que

$$A = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

Or  $A \neq I_2$  car  $a_{12} = 1 \neq 0$ . Donc c'est absurde :  $A$  n'est pas diagonalisable.

On peut aussi calculer  $E_1$ , et remarquer que  $\dim E_1 < 2$ .

Conclusion :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } a \neq 1}$$

Une condition nécessaire et suffisante, c'est une équivalence :

- $A$  nécessaire pour  $B$ , il faut  $A$  pour avoir  $B$ ,  $A \leftarrow B$
- $A$  suffisant pour  $B$ , il suffit d'avoir  $A$  pour avoir  $B$ ,  $A \implies B$

5) Notons  $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ .

$$\begin{aligned} \varphi_A(E_{11}) &= AE_{11} = E_{11} \\ \varphi_A(E_{12}) &= AE_{12} = E_{12} \\ \varphi_A(E_{21}) &= AE_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_{11} + aE_{21} \\ \varphi_A(E_{22}) &= AE_{22} = E_{12} + aE_{22} \end{aligned} \quad \text{Donc } \text{Mat}(\varphi_A, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \varphi_A(E_{11}) & \varphi_A(E_{12}) & \varphi_A(E_{21}) & \varphi_A(E_{22}) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix}$$

6) La matrice est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale :  $(1, 1, a, a)$ . Donc :

Si  $a = 1$ ,  $\lambda = 1$  est valeur propre de multiplicité 4.  
 Si  $a \neq 1$ ,  $\lambda = 1$  est valeur propre de multiplicité 2,  
 $\lambda = a$  est valeur propre de multiplicité 2.

*Le calcul des sous-espaces propres de la matrice précédente est à faire et à savoir faire. Il n'est pas détaillé ici. On cherche des sous-espaces propres de  $\varphi_A$  : ils vivent dans  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .*

Quel que soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $E_1 = \text{Vect}(E_{11}, E_{12})$ . Si  $a \neq 1$ ,  $E_a = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}\right)$ .

$$\dim E_1 = 2 \text{ et, si } a \neq 1, \dim E_a = 2$$

7) D'après le théorème de diagonalisation,  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)} \dim E_\lambda$ .

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\varphi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } a \neq 1$$

### Partie III - Réduction de $\varphi_A$ si $A$ est diagonalisable

8) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \varphi_A^k = \varphi_{A^k}$$

est vraie pour tout  $k \geq 0$ .

- $\mathcal{H}_0 : \varphi_A^0 = \text{id}_E = \varphi_{I_n}$  or  $A^0 = I_n : \mathcal{H}_0$  vraie.
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$  : Supposons  $\mathcal{H}_k$  vraie.

$$\begin{aligned} \varphi_A^{k+1} &= \varphi_A \circ \varphi_A^k \\ &= \varphi_A \circ \varphi_{A^k} \\ &= \varphi_{A^{k+1}} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (\mathcal{H}_k) \\ \text{d'après 2)} \end{matrix}$$

Donc  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vraie.

- **Conclusion** :  $\forall k \geq 0 \quad \varphi_A^k = \varphi_{A^k}$

9) Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ . Pour tout  $M \in E$ ,

$$\begin{aligned} P(\varphi_A)(M) &= \sum_{k=0}^d a_k \varphi_A^k(M) && \text{par définition} \\ &= \sum_{k=0}^d a_k A^k M && \text{d'après 8} \\ &= \varphi_{P(A)}(M) && \text{en factorisant par } M \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{C}[X] \text{ que } P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}}$$

10) Une matrice  $M$  (resp. un endomorphisme  $u$ ) est diagonalisable si et seulement si elle (resp. il) admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

$\Rightarrow$  Supposons  $A$  diagonalisable. Soit  $P$  scindé à racines simples tel que  $P(A) = 0$ .

D'après 9,  $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)} = \varphi_0 = 0$ .

Donc  $\varphi_A$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples :  $\varphi_A$  est diagonalisable.

$\Leftarrow$  Supposons  $\varphi_A$  diagonalisable. Soit  $P$  scindé à racines simples tel que  $P(\varphi_A) = 0$ .

D'après 9,  $0 = P(\varphi_A)(I_n) = \varphi_{P(A)}(I_n) = P(A)I_n = P(A)$ .

Donc  $A$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples :  $A$  est diagonalisable.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme } \varphi_A \text{ est diagonalisable}}$$

11) D'après le théorème de Cayley Hamilton,  $\chi_A(A) = 0$ .

De plus, d'après 9,  $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{\chi_A(A)}$ . Comme  $\varphi_{\chi_A(A)} = \varphi_0 = 0$ ,

$$\boxed{\chi_A(\varphi_A) = 0}$$

Notons  $Z(P)$  l'ensemble des racines de  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(\varphi_A) &\implies \chi_A(\lambda) = 0 && \text{Car } \chi_A \text{ est un polynôme annulateur de } \varphi_A \\ &\implies \lambda \in Z(\chi_A) = \text{Sp}(A) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(\varphi_A) \subset \text{Sp}(A)}$$

De même,  $\chi_{\varphi_A}$  est un polynôme annulateur de  $A$  : d'après 9,

$$\chi_{\varphi_A}(\varphi_A)(I_n) = \varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)}(I_n) = \chi_{\varphi_A}(A)$$

Or, par le théorème de Cayley Hamilton,  $\chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = 0$ . Donc  $\chi_{\varphi_A}$  est un polynôme annulateur de  $A$ . De même que ci-dessus,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\implies \chi_{\varphi_A}(\lambda) = 0 && \text{Car } \chi_{\varphi_A} \text{ est un polynôme annulateur de } A \\ &\implies \lambda \in Z(\chi_{\varphi_A}) = \text{Sp}(\varphi_A) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(\varphi_A)$$

Par double inclusion,

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A)}$$

12) Soit  $M = \left( \begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Par produit matriciel bloc,

$$\varphi_A(M) = AM = \left( \begin{array}{c|c|c} AC_1 & \cdots & AC_n \end{array} \right)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(\varphi_A) &\implies \varphi_A(M) = \lambda M \\ &\implies \left( \begin{array}{c|c|c} AC_1 & \cdots & AC_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda C_1 & \cdots & \lambda C_n \end{array} \right) \\ &\implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad AC_i = \lambda C_i \\ &\implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad C_i \in E_\lambda(A) \end{aligned}$$

Et réciproquement,

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i \in E_\lambda(A) &\implies AM = \left( \begin{array}{c|c|c} AC_1 & \cdots & AC_n \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda C_1 & \cdots & \lambda C_n \end{array} \right) \\ &= \lambda M \\ &\implies M \in E_\lambda(\varphi_A) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{M \in E_\lambda(\varphi_A) \text{ si et seulement si chaque colonne de la matrice } M \text{ est dans } E_\lambda(A)}$$

13) Si  $A$  est diagonalisable, en notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  avec multiplicité, il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

De plus,  $A$  diagonalisable entraîne que la multiplicité de  $\lambda$  est égale à  $\dim E_\lambda$ . Donc

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda \dim E_\lambda(A) \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{\dim E_\lambda(A)}$$

Pour  $\varphi_A$  : D'après 10,  $\varphi_A$  est diagonalisable, donc, de même,

$$\text{Tr}(\varphi_A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)} \lambda \dim E_\lambda(\varphi_A) \quad \text{et} \quad \det(\varphi_A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)} \lambda^{\dim E_\lambda(\varphi_A)}$$

D'après l'énoncé,  $E_\lambda(\varphi_A)$  est isomorphe à  $(E_\lambda(A))^n$ , donc leurs dimensions sont égales :

$$\dim E_\lambda(\varphi_A) = n \dim E_\lambda(A)$$

De plus, d'après 11,  $\text{Sp}(\varphi_A) = \text{Sp}(A)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\varphi_A) &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)} \lambda \dim E_\lambda(\varphi_A) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda n \dim E_\lambda(A) \\ &= n \mathrm{Tr}(A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(\varphi_A) &= \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)} \lambda^{\dim E_\lambda(\varphi_A)} \\ &= \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{n \dim E_\lambda(A)} \\ &= (\det(A))^n\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\varphi_A) = n \mathrm{Tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(\varphi_A) = (\det A)^n}$$

### Exercice 3 (D'après banque PT)

#### Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Soit  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\tau_A(\lambda M + N) &= \mathrm{Tr}(A(\lambda M + N)) \\ &= \mathrm{Tr}(\lambda AM + AN) \\ &= \lambda \tau_A(M) + \tau_A(N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + AN - NA \\ &= \lambda \gamma_A(M) + \gamma_A(N)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\tau_A \text{ et } \gamma_A \text{ sont linéaires}}$$

2) Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est isomorphe – en fixant deux bases – à  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

De plus,  $\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$ . D'où, comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ ,

$$\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2 \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2 \times 1 = n^2}$$

#### Partie 2 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

1) Soit  $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $X \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre associé.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad A^k X = \lambda^k X$$

est vraie pour tout  $k \geq 0$ .

- $\mathcal{H}_0$  : est vraie car  $I_n X = \lambda^0 X$ .
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$  : Supposons  $\mathcal{H}_k$  vraie.

$$\begin{aligned}A^{k+1} X &= AA^k X \\ &= \lambda^k AX && (\mathcal{H}_k) \\ &= \lambda^{k+1} X && X \text{ vecteur propre de } A \text{ pour } \lambda\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vraie.

- Conclusion :  $\forall k \geq 0 \quad A^k X = \lambda^k X$

Comme  $X \neq 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda^k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^k)$ . Ainsi

$$\boxed{\text{Si } \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \text{ alors, pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \lambda^k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^k)}$$

2) a) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = O$ .

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) &\implies \lambda^p \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^p) \\ &\implies \lambda^p = 0 && \text{Car } A^p = 0 \text{ et } \text{Sp}(0) = \{0\} \\ &\implies \lambda = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$ .

De plus,  $A$  n'est pas inversible, donc  $E_0 = \text{Ker } A \neq \{0\} : 0 \in \text{Sp}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ .

Ainsi, par double inclusion,

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \text{Sp}(A) = \{0\}}$$

b) Par théorème, la trace est la somme des valeurs propres (même complexes) de  $A$ . Or  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$  :

$$\boxed{\text{Tr } A = 0}$$

3) a) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = O$ . Alors

$$\begin{aligned} (AM)^p &= A^p M^p && \text{Car } AM = MA \\ &= 0M^p = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{La matrice } AM \text{ est encore nilpotente}}$$

b)  $M \in \text{Ker } \gamma_A \implies \gamma_A(M) = 0$  D'où

$$\implies AM = MA$$

$$\implies AM \text{ nilpotente} \quad \text{d'après 3a, car } A \text{ nilpotente}$$

$$\implies \text{Tr}(AM) = 0 \quad \text{2b}$$

$$\implies M \in \text{Ker } \tau_A$$

$$\boxed{\text{Ker } \gamma_A \subset \text{Ker } \tau_A}$$

c) i)  $UE_{ij}$  est la matrice qui contient la  $i$ -ème colonne de  $U$  dans sa  $j$ -ème colonne, et des zéros ailleurs. Son seul coefficient diagonal non nul est à la  $j$ -ème ligne,  $j$ -ème colonne :

$$\boxed{\text{Tr}(UE_{ij}) = u_{ji}}$$

ii) Linéarité : Soient  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(\lambda U + V)(M) &= \tau_{\lambda U + V}(M) \\ &= \text{Tr}((\lambda U + V)M) \\ &= \text{Tr}(\lambda UM + VM) \\ &= \lambda \tau_U(M) + \tau_V(M) && \text{par linéarité de la trace} \\ &= \lambda f(U)(M) + f(V)(M) \end{aligned}$$

Donc  $f(\lambda U + V) = \lambda f(U) + f(V)$  :

$$\boxed{f \text{ est linéaire}}$$

Injectivité : Montrons que  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

$$U \in \text{Ker } f \implies f(U) = 0$$

$$\implies \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(U)(M) = \text{Tr}(UM) = 0$$

$$\implies \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \text{Tr}(UE_{ij}) = u_{ji} = 0 \quad \text{d'après la question 3.c.i.}$$

$$\implies U = 0$$

Donc  $\text{Ker } f = \{0\}$ , et

$f$  est injective

Or le théorème du rang s'écrit  $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Par conséquent,  $\dim(\text{Im } f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$  d'après la question préliminaire 2. Comme  $\text{Im } f \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ , par inclusion et égalité des dimensions on a  $\text{Im } f = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$  puis  $f$  surjective. Conclusion :

$f$  est un isomorphisme

*f n'est pas un endomorphisme — et, quoi qu'il arrive, il faut impérativement parler de dimension finie.*

iii) D'après le résultat admis dans la question 3b, il existe  $w \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$  telle que

$$\tau_A = w \circ \gamma_A$$

Par bijectivité de  $f$ , il existe  $B = f^{-1}(w)$  telle que  $w = \tau_B$  :

Il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$

*C'est typiquement une question de synthèse qui ne nécessite que de réutiliser de façon immédiate les résultats précédents.*

d) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} \tau_B \circ \gamma_A(M) &= \tau_B(AM - MA) \\ &= \text{Tr}(BAM) - \text{Tr}((BM)A) \\ &= \text{Tr}(BAM) - \text{Tr}(ABM) && \text{car } \text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM) \\ &= \text{Tr}([BA - AB]M) \\ &= \tau_{BA-AB}(M) \end{aligned}$$

Donc 3.c.iii s'écrit  $\tau_A = \tau_{BA-AB}$ . En appliquant  $f^{-1}$ , il vient

$$A = BA - AB$$

4) a) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad BA^k - A^k B = kA^k$$

est vraie pour tout  $k \geq 0$ .

- $\mathcal{H}_0$  : s'écrit  $B - B = 0 \times I_n$ , donc est vraie.
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$  : Supposons  $\mathcal{H}_k$  vraie. Alors

$$ABA^k - A^{k+1}B = kA^{k+1}$$

Or  $AB = BA - A$ , donc  $BA^{k+1} - A^{k+1} - A^{k+1}B = kA^{k+1}$  puis

$$BA^{k+1} - A^{k+1}B = (k+1)A^{k+1}$$

Donc  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vraie.

- **Conclusion** :  $\forall k \geq 0 \quad BA^k - A^k B = kA^k$

b) D'après le résultat de la question précédente, la seule hypothèse manquante pour que la matrice  $A^k$  soit un vecteur propre de  $\gamma_B$  est  $A^k \neq 0$ .

c) Par l'absurde : si  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k \neq 0$ , alors  $\mathbb{N}^* \subset \text{Sp}(\gamma_B)$ . Or ce spectre est fini : c'est absurde. Ainsi, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k = 0$  :

$A$  est nilpotente

5) La caractérisation est la suivante :

$A$  nilpotente si et seulement si il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = BA - AB$