Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 20 novembre 2023

Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On considère les matrices carrées A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 3I_3$$

1) **a)** Calculer B, B^2 et B^3.

b) En déduire B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.

2) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en justifiant son utilisation, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$A^n = 3^n \left(I_3 + \dfrac{n}{3} B + \dfrac{n(n-1)}{18} B^2 \right)$. Est-ce encore vrai pour $n \in \{0, 1\}$?

3) On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n, \qquad v_{n+1} = u_n + 3v_n, \qquad w_{n+1} = -u_n + 3w_n$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

b) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n et w_n en fonctions de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel fixé. Pour tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t$$

1) Étudier la parité des fonctions I_n.

2) Prouver que les fonctions I_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que, pour tout réel x, $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.

4) Prouver, par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

5) Calcul de $I_n(0)$.

- **a)** Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$. On pourra s'aider du calcul de $I_{p+1}(0) - I_p(0)$.
- **b)** En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6)
- **a)** Pour $u \in \mathbb{R}$, développer $(1+u)^n$.
- **b)** Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!}$ à l'aide de $I_n(0)$.

7) Calculer S_n à l'aide de factorielles.

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}.$$

Partie I - Préliminaires

1) Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

3) Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0,+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4) Soit $a>0$. Montrer que, pour tout $t\in]0,+\infty[$ et tout $x\in[a,+\infty[$, $e^{-xt}\leqslant e^{-at}$.
Déterminer la limite de F en $+\infty$.

5) Soit $a>0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x\in[a,+\infty[,\quad F'(x)=-\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

6) En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$. Conclure que :

$$\forall x>0,\quad F(x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1:[0,1]\to\mathbb{R}$ et $F_2:[0,1]\to\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x\in[0,1],\quad F_1(x)=\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad F_2(x)=\int_1^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

7) Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

8) Soit $x\in[0,1]$. Montrer que la fonction $t\mapsto\dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x)=\frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}+\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

10) En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

FIN DE L'ÉPREUVE