Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 6 novembre 2023

# Épreuve de Mathématiques 3

Correction

---

## Exercice 1 (CCINP 2023 PC)

### Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

**1)** *Il faut vérifier que le dénominateur ne s'annule pas.*
Soit $(x,t) \in ]-\infty, 1] \times ]0, +\infty[$. Comme $t > 0$, $e^t > 1$. De plus, $x \leqslant 1$, d'où

$$x \leqslant 1 < e^t$$

Donc $0 \leqslant 1 - x < e^t - x$ : le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathscr{D}_f = ]-\infty, 1] \times ]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathscr{D}_f = ]-\infty, 1] \times ]0, +\infty[}$$

**2)** La fonction $g : t \mapsto f(1,t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
Étude en $t = 0$ :

$$f(1,t) = \frac{t}{1 + t + o(t) - 1} \sim \frac{t}{t} = 1$$

Donc $\lim\limits_{t \to 0} f(1,t) = 1$ : la fonction $g$ est prolongeable par continuité en $t = 0$, et l'intégrale est faussement généralisée en 0 : $\displaystyle\int_0^1 f(1,t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Étude en $+\infty$ : Par croissance comparée,

$$t^2 f(1,t) \sim \frac{t^3}{e^t} = t^3 e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc $f(1,t) = o(1/t^2)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(1,t)\,\mathrm{d}t$ converge ($g \geqslant 0$).
Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(1,t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc, comme $g \geqslant 0$,

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto f(1,t) \text{ est intégrable sur } ]0, +\infty[}$$

**3)** Soit $t \in ]0, +\infty[$. Reprenons le calcul commencé à la question 1 : $x \leqslant 1 < e^t$, donc $x - e^t \leqslant 1 - e^t < 0$.
Puis, en prenant les opposés,

$$0 < e^t - 1 \leqslant e^t - x$$

Comme $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est strictement décroissante $\boxed{\text{sur } R_+^*}$

$$0 \leqslant \frac{1}{e^t - x} \leqslant \frac{1}{e^t - 1}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in ]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(1,t)}$$

D'après la question 2, $t \mapsto f(1,t)$ est intégrable. Donc, par théorème de majoration,

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur } ]0,+\infty[}$$

**4)** Appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.
Soit $D = ]-\infty, 1]$ et $I = ]0, +\infty[$.

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $D$.
- Pour tout $x \in D$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $I$.
- La fonction $\varphi : t \mapsto f(1,t)$ est intégrable sur $I$ d'après 2) et, d'après 3),

$$\forall (x,t) \in D \times I \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(1,t) = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $D = ]-\infty, 1]$. Ainsi, comme produit de fonctions continues,

$$\boxed{\text{la fonction } L \text{ est continue sur } D = ]-\infty, 1].}$$

## Partie II - (partielle)

**5)** La fonction $s_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

<u>Étude en $t = 0$</u> : $s_n$ est prolongeable par continuité en $t = 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Étude en $+\infty$</u> : Par croissance comparée, comme $n + 1 > 0$,

$$t^2 |s_n(t)| = t^3 e^{-(n+1)t} |x|^n \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc $|s_n(t)| = o(1/t^2)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Pour calculer l'intégrale, effectuons une intégration par parties : *Vérifiez vos primitives !*

$$\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = -\dfrac{1}{n+1} e^{-(n+1)t} & v' = e^{-(n+1)t} \end{cases}$$

Comme $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} uv = 0$ par croissance comparée, le théorème d'intégration par parties nous dit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$ sont de même nature (convergente d'après ci-dessus), et que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t}{n+1} e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \left[e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = x^n \int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}}$$

**6)** Soit $t \in ]0, +\infty[$ fixé. Posons $q = xe^{-t}$. Comme $x \in [-1, 1]$, $|q| = |x|e^{-t} \leqslant e^{-t} < 1$.
Ainsi, la série géométrique $\sum_n (xe^{-t})^{n+1}$, de raison $q \in ]-1, 1[$, est convergente.

Donc $\boxed{\sum s_n \text{ converge simplement sur } ]0, +\infty[}$ De plus,

*Maintenant que l'on sait que la série converge, on peut manipuler sa somme ($\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)$). Sinon, on effectue les calculs avec $\sum_{n=0}^{N} s_n(t)$, puis on fait tendre $N$ vers $+\infty$.*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t}x^n \\ &= te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t}x)^n \\ &= te^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}x} \\ &= f(x,t)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in ]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(x,t)}$$

**7)** Posons $u_n = \dfrac{x^n}{n^2}$. Comme $x \in [-1, 1]$,

$$|u_n| = \frac{|x|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par théorème de majoration, $\sum u_n$ converge absolument donc converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2} \text{ converge}}$$

*Pour la suite de la question, traduire l'énoncé : on veut montrer que $x\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.*
*On vient de montrer que*

- $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(x,t)$ *(question 6)*
- $\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^n}{(n+1)^2}$ *(question 5)*

*Ainsi, on veut montrer que ... $x\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} xs_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$.*

- La série $\sum s_n$ converge simplement sur $I = ]0, +\infty[$ vers $t \mapsto f(x,t)$ continue, d'après 6).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument d'après 5), et d'après ci-dessus

$$\int_I |s_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_I te^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t|x|^n = \frac{|x|^n}{(n+1)^2}$$

- La série $\sum \int_I |s_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in ]0, +\infty[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(x,t)$, et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}$. En multipliant par $x$, il vient

$$\boxed{L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}$$

**8)** Si $n = 2k$ pair, avec $k \in \mathbb{N}$, $1 + (-1)^n = 1 + (-1)^{2k} = 1 + ((-1)^2)^k = 2$.
Si $n = 2k+1$ impair, avec $k \in \mathbb{N}$, $1 + (-1)^n = 1 + (-1)^{2k+1} = 1 - 1 = 0$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}L(x) + L(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n^2}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1 + (-1)^{2k+1}) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (1 + (-1)^{2k}) \frac{x^{2k}}{(2k)^2}\\ &= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{2^2 k^2}\\ &= \frac{1}{2} L(x^2)\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L\left(x^2\right)}$$

**9)** D'après la question 7 et l'énoncé,

$$\boxed{L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

D'après la question 8, $L(1) + L(-1) = \dfrac{1}{2} L(1)$, d'où $L(-1) = -\dfrac{1}{2} L(1)$ et

$$\boxed{L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}}$$

## **Exercice 2** (d'après Centrale 2023 PSI)

### I Intégrale de Gauss

**1)** La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et positive.
Étude en $+\infty$ : Par croissance comparée,

$$t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc $e^{-t^2} = o(1/t^2)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente}}$$

**2)** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ existe. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

Comme $f(-x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)(-x)^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = f(x)$,

$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

De plus,

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\operatorname{Arctan} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

**3)** Soit $A > 0$. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme sur $[-A, A]$.
Soit $D = [-A, A]$, $I = [0, 1]$, et $h(x, t) = \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ sur $D \times I$.

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D$ ;
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $I$ (d'après 1), segment) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}$ est continue donc continue par morceaux sur $I$.
- La fonction $\varphi : t \mapsto 2a$ est intégrable sur $I$ (segment) et

$$\forall x \in D,\ \forall t \in I \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| = 2|x|e^{-(t^2+1)x^2} \leqslant 2ae^0 = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-A, A]$ et, pour tout $x \in [-A, A]$, $f'(x) = -2x \displaystyle\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,\mathrm{d}t$.
Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A] \text{ et, pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,\mathrm{d}t.}$$

**4)** La fonction $g$ est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{g \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

**5)** Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $u = xt$, donc $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$ et $\begin{cases} t = 0 & \Longrightarrow & u = 0 \\ t = 1 & \Longrightarrow & u = x \end{cases}$

D'où le changement de variable

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2} x\,\mathrm{d}t \\ &= -e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -2g'(x)g(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x)}$$

**6)** Comme $(f+g^2)' = f' + 2g'g = 0$ d'après 5, $f + g^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
De plus $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$, donc $f + g^2 = \dfrac{\pi}{4}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2}$$

**7)** Appliquons le théorème de convergence dominée à paramètre continu pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, avec les notations de la question 3 :

- Pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x,t) = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} = 0$,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto 0$ sont continues donc continues par morceaux sur $I$.
- La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur le segment $I$ donc intégrable, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in I, \qquad |h(x,t)| = \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Alors, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De plus, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (d'après 1), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est réelle. D'où, en passant à limite dans l'égalité de la question 6,

$$0 = \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

Par conséquent,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

# II Formule de Stirling

***II.A*** –

**8)** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $h : t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.
Étude en $+\infty$ : Par croissance comparée,

$$t^2 h(t) = t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

D'où $h(t) = o(1/t^2)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann).
Donc, par théorème de comparaison, $I_n$ converge. Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } I_n \text{ converge}}$$

**9)** Appliquons le théorème d'intégration par parties.

$$\begin{cases} u = t^{n+1} & u' = (n+1)t^n \\ v = -e^{-t} & v' = e^{-t} \end{cases}$$

Comme $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} uv = 0$ par croissance comparée, le théorème d'intégration par parties nous dit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$ sont de même nature (convergente d'après ci-dessus), et que

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[-t^{n+1}e^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)I_n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I_n = n!$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ : $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$ : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1)I_n && \text{d'après ci-dessus} \\ &= (n+1)n! && (\mathcal{H}_n) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = n!}$

***II.B*** –

**10)** La fonction affine $y \mapsto n + y\sqrt{n}$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante ($n > 0$) et bijective de $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.
De plus, $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\,\mathrm{d}y$. D'après le théorème de changement de variables, les intégrales suivantes sont de même nature, donc convergentes d'après 9, et

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n + y\sqrt{n})^n e^{-(n+y\sqrt{n})} \sqrt{n}\,\mathrm{d}y \\ &= \boxed{\sqrt{n}\mathrm{e}^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(n + y\sqrt{n}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y} \end{aligned}$$

**11)** Comme, d'après 9, $I_n = n!$, la question 10 s'écrit

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{n}\mathrm{e}^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(n + y\sqrt{n}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y \\ &= \sqrt{n}\mathrm{e}^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} n^n \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y}$$

**12)** **a)** Pour $n$ tel que $y \geqslant -\sqrt{n}$, $f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

Si $y \geqslant 0$, alors $y \geqslant 0 \geqslant -\sqrt{n}$ est vrai pour tout $n$, et on peut prendre $n_0 = 0$, ou n'importe quel $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $y < 0$, alors $y \geqslant -\sqrt{n}$ s'écrit $0 \leqslant -y \leqslant \sqrt{n}$ puis $y^2 \leqslant n$ par croissance de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Dans ce cas, $n_0 = \lfloor y^2 \rfloor + 1$ convient.

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant \lfloor y^2 \rfloor + 1, \qquad f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}}$$

**b)** Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé, et $n_0 \in \mathbb{N}$ comme au a), tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$$

Or, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= e^{n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{Car } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= e^{\,y\sqrt{n} - \frac{y^2}{2} + o(1)} \end{aligned}$$

D'où, par continuité de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} f_n(y) &= e^{\,y\sqrt{n} - \frac{y^2}{2} + o(1)} e^{-y\sqrt{n}} \\ &= e^{-\frac{y^2}{2} + o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers } f : y \mapsto e^{-y^2/2}}$$

**13)** **a)** *Cette question est indépendante du reste, et vous savez calculer une limite de ce type : il suffit de faire un DL. Il faut apprendre à détecter ces questions, surtout si vous avez du « temps libre » en fin d'épreuve.*

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{x - (x - x^2/2 + o(x^2))}{x^2} \\ &= \frac{x - x + x^2/2 + o(x^2)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} q(x) = \frac{1}{2}}$$

Et $q$, définie et continue sur $]-1,+\infty[\backslash\{0\}$, est donc prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$.

**b)** La dérivée de $u \mapsto \ln(1+ux)$ sur $[0,1]$ est

$$\boxed{u \mapsto \frac{x}{1+ux}}$$

Si $x=0$, $\displaystyle\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = [u^2/2]_0^1 = \frac{1}{2} = q(0)$.
Soit $x>-1$, $x\neq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{ux}{1+ux}\,\mathrm{d}u & &= \frac{1}{x}\left[u - \frac{\ln(1+ux)}{x}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1+ux-1}{1+ux}\,\mathrm{d}u & &= \frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 1-\frac{1}{1+ux}\,\mathrm{d}u & &= q(x)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } x>-1,\ q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u}$$

**c)** *Il y a 2 méthodes :*

- *Calculer $q'$ avec le théorème de Leibniz : $\varphi(u)=u^2$ et $q'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2}{(1+ux)^2} \leqslant 0$.*
- *Une étude directe en passant la définition, cf. ci-dessous.*

Soit $(x,y)\in]-1,+\infty[^2$.

$$\begin{aligned}
-1<x\leqslant y &\Longrightarrow \forall u\in[0,1],\ 0\leqslant 1-u<1+ux\leqslant 1+uy\\
&\Longrightarrow \forall u\in[0,1],\ \frac{1}{1+uy}\leqslant\frac{1}{1+ux} & & u\mapsto 1/u \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&\Longrightarrow q(y)=\int_0^1\frac{u}{1+uy}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u = q(x) & & \text{Par croissance de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition d'une fonction décroissante,

$$\boxed{\text{La fonction } q \text{ est décroissante sur } ]-1,+\infty[}$$

**d)** *Ayez confiance. Si on vous dit d'emprunter un chemin, essayez le : tester $x\leqslant y \Longrightarrow q(y)\leqslant q(x)$ avec des $x$ et $y$ plausibles.*

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 1$ et $y\geqslant 0$, $\dfrac{y}{\sqrt{n}}\leqslant y$. La décroissance de $q$ s'écrit, pour $y\neq 0$,

$$\begin{aligned}
q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\geqslant q(y) &\Longrightarrow \frac{\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)}{y^2/n} \geqslant \frac{y-\ln(1+y)}{y^2} & & \text{Or } y^2\geqslant 0\\
&\Longrightarrow \boxed{n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}-\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)\geqslant y-\ln(1+y)}
\end{aligned}$$

L'inégalité reste vraie pour $y=0$ : $n\times 0\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
&\implies e^{n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}-\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)} \geqslant e^{y-\ln(1+y)} > 0 \quad \text{L'exponentielle est croissante}\\
&\implies e^{-n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}-\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)} \leqslant e^{-y+\ln(1+y)} \qquad u \mapsto 1/u \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&\implies e^{-y\sqrt{n}} e^{n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \leqslant e^{-y}(1+y)\\
&\implies \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \leqslant (1+y)e^{-y}
\end{aligned}$$

Comme $y \geqslant 0 > -\sqrt{n}$,

$$\boxed{f_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \leqslant (1+y)e^{-y}}$$

**e)** La fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,0]$ et

$$h'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + u = \frac{1-(1-u)(1+u)}{1+u} \qquad h'(u) = \frac{1-(1-u^2)}{1+u} = \frac{u^2}{1+u}$$

Or $1+u > 0$ et $u^2 \geqslant 0$. Donc $h$ croissante :

$$\boxed{\forall u \in ]-1,0], \quad h(u) = \ln(1+u) - u + u^2/2 \leqslant h(0) = 0}$$

*Idem : c'est une question qui n'utilise pas les question autour, vous pouvez la traiter même si vous vous êtes arrêtés à la question 9, ou au I.*

**f)**
- Si $y < -\sqrt{n}$, $f_n(y) = 0 \leqslant e^{-y^2/2}$. Ce qui reste vrai pour $y = -\sqrt{n}$.
- Sinon, $y > -\sqrt{n}$, donc $\dfrac{y}{\sqrt{n}} \in ]-1,0]$. D'après e,

$$\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \frac{y}{\sqrt{n}} \leqslant -\frac{y^2}{2n}$$

*Ne pas perdre de vue le but, essayer : passer à l'exponentielle brutalement, ça ne fonctionne pas car il nous faut du $y\sqrt{n}$ plutôt que $y/\sqrt{n}$ : donc on multiplie par $n$, et on regarde.*

D'où, en multipliant par $n \geqslant 0$ et en passant à l'exponentielle (croissante),

$$e^{n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} e^{-y\sqrt{n}} \leqslant e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Ainsi,

$$f_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \leqslant e^{-y^2/2}$$

Conclusion :

$$\boxed{f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}}$$

**14)** Appliquons le théorème de convergence dominée.
<u>Étude de $\varphi$</u> : Posons

$$\varphi(y) = \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{Si } y \geqslant 0 \\ e^{-y^2/2} & \text{Si } y < 0 \end{cases}$$

Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
La fonction $\varphi$ est positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Étude en $+\infty$ : Pour tout $y \geqslant 0$,
$$\varphi(y) = e^{-y} + ye^{-y}$$
Or $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ convergent d'après 8.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ converge comme somme d'intégrales convergentes.
- Étude en $-\infty$ : Pour tout $y < 0$,
$$\varphi(y) = e^{-y^2/2}$$
Par parité de la fonction $y \mapsto e^{-y^2/2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$ sont de même nature.
De même qu'à la question 1, on montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$ est convergente.
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ converge.

Ainsi, $\varphi$ intégrable sur $\mathbb{R}$.
Théorème de convergence dominée

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ et $f$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $(f_n)$ converge simplement vers $f$ d'après 12b
- La fonction $\varphi$ définie ci-dessus est intégrable sur $\mathbb{R}$, et, d'après 13d et 13f,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant f_n \leqslant \varphi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée,
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y}$$
Or, par parité,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$
Avec le changement de variable ($\mathscr{C}^1$, strictement croissant, bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$) $t = u\sqrt{2}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}\,\mathrm{d}u$$
Or, d'après 1, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}}$$

**15)** D'après la question 11,
$$\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \int_{\mathbb{R}} f_n(y)\,\mathrm{d}y$$
Or, d'après 14, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$. D'où
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}$$
Ainsi,
$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

***II.C*** –

**16)** *Cf. DST1, ex1, B.1)a) à B.1)e), c'est très classique.*

Développement asymptotique de $w_n$ :

$$\begin{aligned}
w_n &= v_{n+1} - v_n \\
&= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^{(n+1)}\mathrm{e}^{-n-1}\sqrt{n+1}n!}{(n+1)!n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^{(n+1)}\mathrm{e}^{-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)n^n\sqrt{n}}\right) \\
&= \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\frac{(n+1)^n\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}}\right) \\
&= \ln(e^{-1}) + \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right] \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) && \text{Or } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right) \\
&= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} && \text{On tronque ce qui dépasse } o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{w_n = \frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}$$

Nature de $\sum w_n$ :

D'après ci-dessus, $w_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$. Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann). Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge absolument donc converge}}$$

**II.C.1**

**17)** Comme $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \sim b_n$ équivaut à

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

En passant à la définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant 1 + \varepsilon$$

Puis, comme $b_n \geqslant 0$,

$$(1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe un entier naturel non nul } n_0 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0,\ (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n}$$

**18)** Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. L'inégalité de gauche s'écrit $0 < \dfrac{1}{2}b_n \leqslant a_n$ donc $(a_n)$ positive.
Avec l'inégalité de droite, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n/2$, or $\sum b_n$ converge, donc par théorème de majoration, $\sum a_n$ converge.

*La suite est similaire à la question de cours sur l'équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha \in ]0,1[$ : c'est la question 2 de l'exercice 25, qui concerne les restes de séries convergentes.*

Notons $A_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et $B_n = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$. En sommant l'encadrement obtenu à la question 17, il vient

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \sum_{k=n}^{+\infty}(1-\varepsilon)b_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}(1+\varepsilon)b_k$$

D'où

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |A_n - B_n| \leqslant \varepsilon B_n$$

Or $B_n > 0$ comme somme de termes strictement positifs, et donc finalement,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|\frac{A_n}{B_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n/B_n = 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k}$$

**19)** *(Suite de la question de cours.)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[n, n+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc

$$\forall t \in [n, n+1], \qquad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}}$$

**20)** Posons $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, $b_n = \dfrac{1}{n^2} > 0$. D'après Riemann, $\sum b_n$ converge.
Montrons que $a_n \sim b_n$. D'après la question 19, en divisant par $b_n > 0$,

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant 1$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, c'est-à-dire $a_n \sim b_n$.
D'après la question 18,

$$R_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-t^{-1}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{n}$. En conclusion,

$$\boxed{R_n \sim \frac{1}{n}}$$

**21)** D'après la question 16, $w_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$.

Donc, d'après la question 18, avec $b_n = \dfrac{1}{12n^2}$ et $a_n = w_n$,

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \sim \frac{1}{12} R_n \sim \frac{1}{12n}}$$

Ce dernier équivalent est donné par la question 20.

**22)** D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \frac{1}{12n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

De plus, par télescopage,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{+\infty} w_k &= \sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k \\ &= \lim_{N\to+\infty} v_{N+1} - v_n \qquad\qquad \text{Or } \lim_{k\to+\infty} v_k = 0 \\ &= -\ln(u_n)\end{aligned}$$

Ainsi, $-\ln(u_n) = 1/12n + o(1/n)$. En passant à l'exponentielle,

$$\frac{1}{u_n} = e^{\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{12n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Comme $u_n = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$, il vient

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)$$

En traduisant le petit o avec une suite, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).}$$