Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 18 octobre 2021

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (PT 2016)

1) Pour tout réel x,

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + \mu = (x+\lambda)^2 - \lambda^2 + \mu$$

Posons $\alpha = \mu - \lambda^2 > 0$ et $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}}$. Alors

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}(x+\lambda)^2 + 1\right) = \alpha\Big(1 + \beta^2 (x+\lambda)^2\Big)$$

En conclusion, $\boxed{\alpha = \mu - \lambda^2 \text{ et } \beta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu-\lambda^2}} \text{ vérifient } x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha\Big(1+\beta^2(x+\lambda)^2\Big)}$

2) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$.
Comme le discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4\mu < 0$ par hypothèse, $x^2 + 2\lambda x + \mu$ ne s'annule jamais et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
<u>Étude en $+\infty$</u> : $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2n+2}}$
Or $n \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n+2 \geqslant 2 > 1$).
Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
<u>Étude en $-\infty$</u> : De même, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2n+2}}$
Or $n \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^{2n+2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n+2 \geqslant 2 > 1$).
Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
En conclusion, $\boxed{I_n \text{ converge}}$
<u>Calcul de I_0</u> : $\dfrac{1}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{1 + \Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2}$ d'après 1), avec $\alpha = \dfrac{1}{\beta^2}$. Donc

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\,\mathrm{d}x}{1 + \Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2} = \beta\Big[\mathrm{Arctan}\,\Big(\beta(x+\lambda)\Big)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \beta\pi$$

Conclusion : $\boxed{I_0 = \beta\pi}$

3) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u = x$ et $v = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$. Comme $uv \sim_\infty \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ avec $2n - 1 > 0$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} uv = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} uv = 0$$

D'où l'intégration par partie suivante :

$$I_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \dfrac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)^n} - \dfrac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$, donc

$$I_{n-1} = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

Par conséquent, $\boxed{I_n = \dfrac{(2n-1)\,I_{n-1}}{2n}}$

b) *Cherchez au brouillon pour les premiers termes, comme d'habitude. Une fois que vous avez une formule bien propre, comme vous l'avez obtenu avec des « ... », il faut faire une récurrence.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: d'après 2), $I_0 = \beta\pi$, et ici $\beta = 1$. Ainsi $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0(0!)^2}\pi = \pi = I_0$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après a),

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n = \frac{2n(2n-1)}{2^2n^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\pi$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi}$

Pour compléter un peu les résultats de l'exercice, et confirmer votre impression de « déjà vu », on peut effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans I_n.
Comme $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $(1+x^2)^{n+1} = (1+\tan^2 t)^{n+1} = (1/\cos^2 t)^{n+1}$, on trouve

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = 2W_{2n}$$

Wallis ! On retrouve aussi le v_n du devoir ($x = \sqrt{n}t$), mais le calcul de v_n n'avait pas été fait.

Exercice 2 (CCINP PC 2021)

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

I.1 - Existence de la solution

1) Soit $x > 0$ fixé.

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

Or $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge. Conclusion :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[}$$

2) Soit $x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)+\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2}\\ &= \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}}$$

3) Soit $x > 0$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) = (-1)^k \dfrac{1}{(x+k)^2}$ avec $\dfrac{1}{(x+k)^2} \geqslant 0$. Donc $\sum \varphi_k(x)$ est une série alternée.
- $\left(\dfrac{1}{(x+k)^2}\right)_k$ est une suite décroissante car $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = 0$.

Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\displaystyle\sum_k \varphi_k(x)$ converge (ce que l'on savait déjà), et le reste d'ordre n est majoré par $|\varphi_{n+1}(x)|$. Ce qui s'écrit

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}}$$

4) Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$: La majoration précédente, en $n = 0$, s'écrit :

$$\forall x > 0, \qquad \left|\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ainsi, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$, par majoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) - \frac{1}{x^2} = 0$.
Puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ entraîne $\underline{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$
De plus, d'après I.2, φ vérifie la seconde relation de (P). Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est une solution de } (P)}$$

I.2 - Unicité de la solution

5) Soit $x > 0$ fixé. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: s'écrit $f(x) = -f(x+1) + \dfrac{1}{x^2}$. C'est vraie par définition de la propriété (P).

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} && \text{d'après } \mathcal{H}_n \\ &= (-1)^{n+1}\Big(- f(x+n+2) + \frac{1}{(x+n+1)^2}\Big) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} && \text{en appliquant } (P) \text{ en } x+n+1 \\ &= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}}$

6) D'après (P), $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n+1) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente, il vient $f = \varphi$. Ainsi, f solution de (P) implique $f = \varphi$.
Réciproquement, à la question 4 nous avons montré que φ était solution de (P). Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est l'unique solution de } (P)}$$

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

7) Calcul de norme infinie : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Notons, pour tout $x > 0$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = \varphi(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$$

D'après la question 3,

$$\forall x \geqslant \varepsilon, \qquad |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

Or $x \mapsto \dfrac{1}{(x+n+1)^2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc sa borne supérieure est $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ *(on pouvait aussi prendre la borne sup sur $[\varepsilon,+\infty[$)* et :

$$\forall x > 0, \qquad |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$$

En passant à la borne supérieure sur $[\varepsilon,+\infty[$, il vient

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$$

Convergence uniforme :
Par majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$. Comme $R_n = \varphi - S_n$, nous venons de montrer

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge uniformément sur } [\varepsilon,+\infty[}$$

Pour montrer la convergence uniforme en majorant R_n, il n'est pas nécessaire de se placer sur $[\varepsilon,+\infty[$: on peut se placer sur $]0,+\infty[$, et prendre $n \geqslant 1$: la différence $\varphi - S_n$ fait disparaître le problème de $\varphi_0 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ non bornée sur $]0,+\infty[$.

On pouvait aussi montrer la convergence normale, en calculant $\|\varphi_k\|_\infty = |\varphi_k(\varepsilon)| = \dfrac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, et en montrant que $\sum \|\varphi_k\|_\infty$ converge (Riemann, ou la convergence simple absolue de la question 1 en $x = \varepsilon$). Puis la convergence normale entraîne la convergence absolue.

8)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $]0,+\infty[$.
- D'après 7, $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon,+\infty[$ de $]0,+\infty[$, donc sur tout segment de $]0,+\infty[$.

Donc, d'après le théorème de continuité,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$$

Comme φ est solution de (P),

$$\forall x > 0, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \varphi(x+1)$$

Or, d'après ci-dessus, φ est continue en 1 : lorsque $x \to 0$, $\varphi(x+1) = \varphi(1) + o(1)$.
Donc $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \varphi(1) + o(1)$:

$$\boxed{\varphi(x) \sim \frac{1}{x^2}}$$

9) <u>Convergence uniforme de $\sum \varphi'_k$</u> : Soit $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ fixé.
La fonction φ_n est dérivable sur $]0,+\infty[$, et

$$\forall x > 0, \qquad phi'_n(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

Par décroissance de $|\varphi'_n|$ sur $]0,+\infty[$,

$$\|\varphi'_n\|_\infty = \frac{1}{(\varepsilon+n)^3}$$

Ainsi, $\|\varphi'_n\|_\infty \sim \dfrac{1}{n^3}$.
Comme $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $\alpha = 3 > 1$), par théorème de comparaison, $\sum \|\varphi'_n\|_\infty$ converge :

$$\text{La série } \sum \varphi'_k \text{ converge normalement donc uniformément sur } [\varepsilon,+\infty[$$

<u>Dérivée de φ</u> :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
- La série $\sum \varphi_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ d'après 1.
- La série $\sum \varphi'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}}$$

10) Le théorème des séries alternées s'applique à la série $\sum \varphi'_n$, comme il s'appliquait à $\sum \varphi_n$ lors de la question 3. Une des conséquences est que le signe du reste est celui du premier terme négligé. En considérant $R_{-1} = \varphi'$ et $\varphi'_{-1+1} = \varphi'_0$, la fonction φ' est du signe de $\varphi'_0(x) = -\dfrac{2}{x^3} < 0$.
Donc $\varphi' < 0$ sur $]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$$

11) Encadrons φ :

$$\begin{array}{lll}\forall x\in]1,+\infty[, & \varphi(x+1)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(x-1) & \text{décroissance de } \varphi \text{ sur }]0,+\infty[\\ \Longrightarrow\forall x\in]1,+\infty[, & \varphi(x+1)+\varphi(x)\leqslant 2\varphi(x)\leqslant\varphi(x)+\varphi(x-1) & \\ \Longrightarrow\forall x\in]1,+\infty[, & \dfrac{1}{x^2}\leqslant 2\varphi(x)\leqslant\dfrac{1}{(x-1)^2} & (P)\end{array}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x\in]1,+\infty[,\quad \frac{1}{x^2}\leqslant 2\varphi(x)\leqslant\frac{1}{(x-1)^2}}$$

Puis

$$\forall x\in]1,+\infty[,\quad 1\leqslant 2x^2\varphi(x)\leqslant\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\varphi(x)=1$:

$$\boxed{\varphi(x)\sim\frac{1}{2x^2}}$$

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

12) Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction $f : t\mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,1]$.
Étude en 0 : Si $k\geqslant 1$, $x+k-1\geqslant x>0$, donc, par croissance comparée,

$$\lim_{t\to 0} f(t)=0$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
Si $k=0$, montrons que $f(t)=o(1/t^{1-x/2})$: par croissance comparée, comme $x/2>0$,

$$t^{1-x/2}f(t)=t^{x/2}\ln(t)\xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Ainsi, $f(t)=o(1/t^{1-x/2})$. Or $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^{1-x/2}}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann en 0, $\alpha=1-x/2<1$).
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{N}, \text{ la fonction } t\mapsto t^{x+k-1}\ln(t) \text{ est intégrable sur }]0,1]}$$

Vous avez tout de suite reconnu les intégrales de Bertrand. Pour les reconnaître : lorsque vous avez du t et du $\ln(t)$ qui interviennent (ici, $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ avec $\alpha=-(x+k-1)$ et $\beta=-1$).
Vous pouviez aussi effectuer l'intégration par parties de ε à 1, puis passer à la limite : vous prouvez en même temps la convergence, donc l'intégrabilité puisque la fonction est de signe constant (négatif).

Effectuons une intégration par parties : $\begin{cases} u=\dfrac{t^{x+k}}{x+k} & u'=t^{x+k-1}\quad (x+k\neq 0)\\ v=\ln(t) & v'=\dfrac{1}{t}\end{cases}$

Comme $x+k>0$, $\lim\limits_{t\to 0} uv=0$ par croissance comparée, et le théorème d'intégration par parties nous dit que les deux intégrales sont de même nature, donc convergente d'après ci-dessus. Et

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t&=\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\ln(t)\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^{x+k-1}}{x+k}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{x+k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_0^1\\&=-\frac{1}{(x+k)^2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}}$$

13) La fonction $t\mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$ et, au voisinage de $t=0$, $\dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\sim t^{x-1}\ln(t)$.
Or, d'après la question 12, la fonction $t\mapsto t^{x-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ (cas $k=0$).
Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{La fonction } t\mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t} \text{ est intégrable sur }]0,1]}$$

Soit $t\in]0,1]$. La série géométrique $\displaystyle\sum_k(-t)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k=\frac{1}{1+t}$$

Ainsi, en multipliant par $t^{x-1}\ln(t)$, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)=\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$$

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, posons $f_k:]0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_k(t)=(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)$.
D'après la question 12, $\displaystyle\int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(x+k)^2}\sim\frac{1}{k^2}$. Or $\displaystyle\sum\frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha=2>1$), donc par théorème de comparaison $\displaystyle\sum\int_0^1|f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, f_k est continue donc continue par morceaux sur $]0,1]$.
- $\sum f_k$ converge simplement vers $f:t\mapsto\dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ sur $]0,1]$ d'après ci-dessus, et f est continue.
- La série $\displaystyle\sum\int_0^1|f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, d'après 12, $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$, et $\displaystyle\varphi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$. Par conséquent,

$$\boxed{\varphi(x)=-\int_0^1\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 3 (CCINP PC 2021)

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

1)

$$\begin{aligned}
(f_k(x))^2 - x &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 - x \\
&= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}^2(x) + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}^2(x)} - 4x\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}^2(x) - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}^2(x)}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc $(f_k(x))^2 \geqslant x$. Comme $x \geqslant 0$ et $f_k \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad f_k(x) \geqslant \sqrt{x}}$$

2) Si $x = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_{k+1}(0) = \dfrac{1}{2} f_k(0)$: la suite est géométrique et décroissante.

Et si $x \neq 0$? Que faire ? C'est la question 2. Pas d'idées... la question 1 semblait sortie de nulle part : essayons de l'utiliser.

Si $x > 0$, d'après 1, $f_k(x) \geqslant \sqrt{x} > 0$. En passant à l'inverse,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f_k(x)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \\
\Longrightarrow\ & \frac{x}{f_k(x)} \leqslant \sqrt{x} \leqslant f_k(x) && \text{toujours d'après 1} \\
\Longrightarrow\ & f_{k+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f_k(x) + f_k(x)) = f_k(x)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. La suite $(f_k(x))_k$ est décroissante (d'après 2) minorée par $\sqrt{x}$ (d'après 1), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$ sa limite.

Si $x > 0$, la minoration $f(x) \geqslant \sqrt{x}$ nous donne $f(x) > 0$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, il vient

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{x}{f(x)}\right)$$

D'où $f(x)^2 = x$, puis $f(x) = \sqrt{x}$.
Si $x = 0$, La suite géométrique $(f_k(0))$ de raison 2 converge vers $0 = \sqrt{0}$.
Finalement,

$$\boxed{(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \sqrt{x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+}$$

I.2 - Majoration de l'erreur

4) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) &= \frac{1}{2}\left(f_k(x)-\sqrt{x}-\sqrt{x}+\frac{x}{f_k(x)}\right) \quad \text{(développer plutôt que factoriser)}\\ &= -\sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(f_k(x)+\frac{x}{f_k(x)}\right)\\ &= f_{k+1}(x)-\sqrt{x}\end{aligned}$$

Il est rare d'obtenir une relation de récurrence (lien entre f_k et f_{k+1}, plus généralement entre la valeur au rang k et celle au rang $k+1$) par récurrence. Cette relation, par contre, servira pour faire des récurrence dans peu de temps

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f_{k+1}(x)-\sqrt{x} = \frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)}$$

5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad |f_k(x)-\sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: Comme $f_0 = 1$, $f_1(x) = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{x}{1})$, donc $\div\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Comme $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ (et $f_k > 0$), $\dfrac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}|f_{k+1}(x)-\sqrt{x}| &= \frac{|f_k(x)-\sqrt{x}|}{2}\left|1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right| && \text{d'après 4}\\ &\leqslant \frac{1+x}{2^{k+1}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) && \mathcal{H}_k\\ &\leqslant \frac{1+x}{2^{k+1}} && \text{car } 1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leqslant 1\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 1 \quad |f_k(x)-\sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}}$

Exercice 4 (E3A PSI 2021)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \exp(-t^n)$ est continue donc continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
Étude en $+\infty$:

$$\forall t \geqslant 1, \qquad t^n \geqslant t$$

Puis, par décroissance de $x \mapsto e^{-x}$, $0 < e^{-t^n} \leqslant e^{-t}$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge ($\beta = 1 > 0$), donc, par théorème de majoration,

$$\boxed{I_n \text{ existe}}$$

2) Convergence simple : Soit $t > 1$ fixé.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t^n = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} e^u = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.
Donc (f_n) converge simplement vers $f = 0$ sur $]1,+\infty[$.
L'intégrale est généralisée, donc pas de théorème avec convergence uniforme. De plus, si on regarde la convergence simple sur $[1,+\infty[$, f n'est pas continue en 1 : il n'y a pas convergence uniforme sur $[1,b]$ avec $b > 1$ fixé.
Théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue donc continue par morceaux sur $]1, +\infty[$, ainsi que f.
- (f_n) converge simplement vers f sur $]1, +\infty[$.
- D'après les calculs du 1, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f_n| \leqslant \varphi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, les f_n et f sont intégrables sur $]1, +\infty[$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ converge vers } 0}$$

3) La fonction $\psi : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $\psi(t) = t^n$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective. D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales ci-dessous sont de même nature, donc convergente car I_n l'est.

Avec les conventions habituelles, $\mathrm{d}u = nt^{n-1}\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{nu^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}u$. Les bornes sont inchangées.

$$\boxed{I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}} n}\,\mathrm{d}u}$$

4) D'après la question précédente,

$$nI_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

<u>Convergence simple</u> : Soit $g_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = e^{-u}/u^{1-\frac{1}{n}}$. Soit $u > 1$ fixé.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(t) = e^{-u}/u$.

Donc (g_n) converge simplement vers $g : u \mapsto e^{-u}/u$ sur $[1, +\infty[$.

<u>Théorème de convergence dominée</u> : Pour tout $u \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^{1-\frac{1}{n}} \geqslant 1$. Donc, par passage à l'inverse (tout est positif),

$$0 \leqslant g_n(u) = \frac{e^{-u}}{u^{1-\frac{1}{n}}} \leqslant e^{-u}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue donc continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, ainsi que g.
- (g_n) converge simplement vers g sur $[1, +\infty[$.
- D'après les calculs ci-dessus, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |g_n| \leqslant \varphi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, les g_n et g sont intégrables sur $[1, +\infty[$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (nI_n) \text{ converge vers } J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

5) Comme $g > 0$ sur $[1, +\infty[$, $J > 0$ et en particulier est non nulle.
Par conséquent, d'après 4, $nI_n \sim J$, puis

$$\boxed{I_n \sim \frac{J}{n}}$$

6) Pour tout $t \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t^n \leqslant t^{n+1}$, donc $f_n \geqslant f_{n+1}$: la suite (f_n) est décroissante. Par croissance de l'intégrale, (I_n) aussi est donc décroissante.

- Comme $I_n > 0$, $\sum(-1)^n I_n$ est alternée.
- D'après ci-dessus, (I_n) décroissante.
- D'après 2, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Donc, d'après le critère des séries alternée,

$$\boxed{\sum(-1)^n I_n \text{ converge}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE