

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (PT C, 2008 et 2015)

1) Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \\ &= e^{-n \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} \\ &= e^{-n\left(\frac{t^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-t^2+o(1)} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$. Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ convergence simplement vers } f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t^2} \end{array} \right. \text{ sur l'intervalle } [0, +\infty[.}$$

2) Soit $t \in [0, +\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$. La formule du binôme s'écrit :

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t^2}{n}\right)^k$$

Or tous les termes de la somme sont positifs, et en ne gardant que les deux premiers on trouve

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geqslant \binom{n}{0} \left(\frac{t^2}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{t^2}{n}\right)^1 = 1 + t^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geqslant 1 + t^2}$$

3) *La théorème de convergence dominée, en majorant* $\left|\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}\right|$ *par* $\varphi(t)$*, nous donnera aussi la convergence de cette intégrale.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas donc continue (donc continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$. De plus $f_n \geqslant 0$ *(Soit de la convergence absolue, soit préciser que la fonction est positive.)*

<u>Étude en $+\infty$</u> :

$$f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \sim \left(\frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \frac{n^n}{t^{2n}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\, \mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2n \geqslant 2 > 1$), donc par comparaison,

$$\boxed{u_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

4) *On cherche au brouillon, puis on rédige au propre « dans l'ordre ». On ne se lance pas directement sur la copie. Il s'agit d'une intégrale généralisée, donc le théorème de convergence dominée est le seul théorème qui peut s'appliquer.*

Préliminaires : Soit $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

La fonction φ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

De plus, $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par comparaison,

$$\varphi \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.$$

D'autre part, en passant à l'inverse dans l'inégalité du 2 (tout est strictement positif),

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Théorème de convergence dominée :

- La suite (f_n) de fonctions continues par morceaux converge simplement vers f continue par morceaux d'après 1.
- D'après ci-dessus, $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et vérifie (d'après 2),

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \varphi(t)$$

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, les fonctions f_n et f sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Préliminaires : Soit $\varphi : \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \to [0,+\infty[$ définie par $\varphi(u) = \sqrt{n}\dfrac{\cos u}{\sin u}$.

La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\varphi' = \dfrac{\sqrt{n}}{\sin^2} > 0$, donc strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc bijective.

Théorème de changement de variable :

Comme $\varphi : \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \to [0,+\infty[$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective, le théorème de changement de variable nous dit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Or la première intégrale converge, donc la seconde aussi. De plus,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Or pour tout $u \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
f_n(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u &= \left(1+\frac{\left(\sqrt{n}\frac{\cos u}{\sin u}\right)^2}{n}\right)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(u)}\\
&= \left(1+\frac{n\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}{n}\right)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(u)}\\
&= \left(\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\sin^2 u}\right)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(u)}\\
&= \sqrt{n}\sin^{2n}(u)\frac{1}{\sin^2(u)}\\
&= \sqrt{n}\sin^{2n-2}(u)
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}u\,\mathrm{d}u}$$

Ce sont des intégrales de Wallis.

6) D'après l'énoncé – résultat classique sur Wallis –, lorsque N tends vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^N u\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2N}}$.
Donc, avec $N = 2n-2$, lorsque $n \to +\infty$,

$$u_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}u\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc, d'après 4,

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

De plus, par parité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, l'intégrale J converge[1] et

$$\boxed{J = 2I = \sqrt{\pi}}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t/\sqrt{2}$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de changement de variable la convergence de I entraîne celle de K et

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est la fonction gaussienne, c'est la densité de probabilité de la loi normale, au scalaire J près (pour que $P(\Omega) = 1$).

Exercice 2 (Banque PT 2025)

Préambule.

1) Les fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^4+1}$ et $g : t \mapsto \dfrac{t^2}{t^4+1}$ sont continues donc continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.
De plus, elles sont positives.
Étude de f en $+\infty$:

$$\frac{1}{t^4+1} \sim \frac{1}{t^4}$$

1. Toujours vérifier la convergence d'une intégrale généralisée avant de faire un calcul.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 4 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Étude de g en $+\infty$:

$$\frac{t^2}{t^4+1} \sim \frac{1}{t^2}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Les intégrales } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \text{ convergent}}$$

2) Soit $]a, b[$ et $]\alpha, \beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une fonction $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective.

Alors, $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ est de même nature que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

3) Effectuons le changement de variable $\varphi : t \mapsto x = 1/t$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement décroissante et bijective de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

De plus, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -1/t^2\,\mathrm{d}t$. Donc le théorème de changement de variables (version adaptée pour une fonction décroissante) nous dit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+(1/t)^4}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ sont de même nature. D'après la question 1, elles sont donc convergentes.

Après calculs, la seconde intégrale s'écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$. Toujours d'après le théorème de changement de variable, il vient donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}}$$

Partie I.

1) Étudions le dénominateur : $\Delta = 2 - 4 = -2 < 0$, donc le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi,

$$\boxed{D_h = \mathbb{R}}$$

2) On reconnaît u'/u. Comme $u = t^2 + 1 - \sqrt{2}t > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^X h(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\ln(t^2+1-\sqrt{2}t)\right]_0^X \\ &= \ln(X^2+1-\sqrt{2}X)\end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on effectue le changement de variable (sur un segment) $u = -t$, qui nous donne

$$\int_0^X h(-t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{-X} h(u)\,\mathrm{d}u = -\ln(X^2+1+\sqrt{2}X)$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_0^X h(t)\,\mathrm{d}t = \ln(X^2+1-\sqrt{2}X) \quad \text{et} \quad \int_0^X h(-t)\,\mathrm{d}t = -\ln(X^2+1+\sqrt{2}X)}$$

3) D'après la question I.2 ci-dessus, pour $X \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^X (h(t)+h(-t))\,\mathrm{d}t &= \ln(X^2+1-\sqrt{2}X) - \ln(X^2+1+\sqrt{2}X)\\ &= \ln\left(\frac{X^2+1-\sqrt{2}X}{X^2+1+\sqrt{2}X}\right)\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2+1-\sqrt{2}X}{X^2+1+\sqrt{2}X} = 1$, donc, par continuité en 1 de ln, il vient

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty} \int_0^X (h(t)+h(-t))\,\mathrm{d}t = 0}$$

4) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $\Phi(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}\Big(t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right)$.

Le plus simple, à mon avis, est de partir de $\mathrm{Arctan}\,(u)$ *avec* $u = \left(t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$*, puis d'ajuster des constantes* K *puis* λ *telles que* $\lambda\Big[\mathrm{Arctan}\,(Ku)\Big]' = \dfrac{\lambda K}{1+K^2u^2} = \varphi(t)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(t) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \varphi(t)$$

Ainsi,

$$\boxed{t \mapsto \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}\Big(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right) \text{ est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction } \varphi}$$

5) D'après I.1, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $D_g = D_h = \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. En mettant sous forme canonique ce dénominateur,

$$t^2+1-\sqrt{2}t = \left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2}{4} + 1 = \frac{1}{2}\left[2\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right]$$

Donc $g(t) = \sqrt{2}\varphi(t)$. D'où

$$\boxed{G(t) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}\Big(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right)}$$

6) Soit $X \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^X g(-t)\,\mathrm{d}t &= [-G(-t)]_0^X\\ &= -2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}\Big(-X-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right) + 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right)\\ &= -2\,\mathrm{Arctan}\left(-\sqrt{2}X-1\right) - \frac{\pi}{2} && \text{Car } \mathrm{Arctan}\,(-1) = -\pi/4\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_0^X g(-t)\,\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{Arctan}\left(-\sqrt{2}X-1\right) - \frac{\pi}{2}}$$

7) Soit $X \geqslant 0$.

$$\int_0^X (g(t)+g(-t))\,\mathrm{d}t = [G(t)-G(-t)]_0^X = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}X-1\right) - 2\,\mathrm{Arctan}\left(-\sqrt{2}X-1\right)$$

Or $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{Arctan} = \pi/2$ et $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{Arctan} = -\pi/2$, d'où

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty} \int_0^X (g(t)+g(-t))\,\mathrm{d}t = \pi}$$

8) Soit $t \geqslant 0$. Comme $h(t)+g(t) = \dfrac{2t}{t^2+1-\sqrt{2}t}$,

$$\begin{aligned} h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) &= \frac{2t}{t^2+1-\sqrt{2}t} + \frac{-2t}{t^2+1+\sqrt{2}t} \\ &= \frac{2t(t^2+1+\sqrt{2}t) - 2t(t^2+1-\sqrt{2}t)}{(t^2+1-\sqrt{2}t)(t^2+1+\sqrt{2}t)} \\ &= \frac{2t\times 2\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2-2t^2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}t^2}{t^4+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) = \frac{4\sqrt{2}t^2}{t^4+1}}$$

Cette question vous donne la décomposition en éléments simples de $\dfrac{t^2}{t^4+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Si on ne vous la donne pas, il aurait fallu chercher les racines de $t^4+1=0$ dans $\mathbb{C}$, qui sont $\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$ et $\mathrm{e}^{\pm 3i\pi/4}$, les grouper par racines conjuguées – c'est-à-dire $\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$ d'une part, qui nous donne $(t-\mathrm{e}^{i\pi/4})(t-\mathrm{e}^{i\pi/4}) = t^2-\sqrt{2}t+1$ et de même pour $\mathrm{e}^{\pm 3i\pi/4}$. Puis chercher $A\in\mathbb{R}_1[X]$ et $B\in\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\dfrac{t^2}{t^4+1} = \dfrac{A(t)}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \dfrac{B(t)}{t^2+\sqrt{2}t+1}$. C'est hors programme.

9) **a)** D'après la question 8 ci-dessus,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \lim_{X\to+\infty} \int_0^X h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(0+2\pi) && \text{D'après 3 et 7} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$$

b) D'après la question 3 du préambule, il vient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$$

10) D'après la question 8, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{1/\sqrt{2}} h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln[(1/\sqrt{2})^2+1-1] - \ln[(1/\sqrt{2})^2+1+1] + 2\,\mathrm{Arctan}\,(1-1) - 2\,\mathrm{Arctan}\,(-1-1)\right) \\ & && \text{D'après 3 et 7} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\ln 2 - \ln(5/2) + 2\,\mathrm{Arctan}\,(2)\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\ln 5 + 2\,\mathrm{Arctan}\,(2)\right) \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\operatorname{Arctan}(2)-\ln(5)}{4\sqrt{2}}}$$

Partie II.

1) La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, et positive.
Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$t^2 f(t) = t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $t^2 f(t) = o(1)$, puis $f(t) = o(1/t^2)$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

2) Première intégrale : La fonction $t \mapsto \sin(t^2)/t^2$ est continue sur $[1,+\infty[$. De plus,

$$\forall t \in [1,+\infty[, \qquad \left|\frac{\sin(t^2)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann). Donc, par théorème de majoration,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument donc converge}}$$

Deuxième intégrale : Un raisonnement identique, avec la majoration

$$\forall t \in [1,+\infty[, \qquad \left|\frac{\cos(t^2)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

entraîne

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument donc converge}}$$

Quand a-t-on le droit de dire « de même » ? Lorsque vous vous apprêtez à recopier mot pour mot le raisonnement précédent. Il faut avoir rédigé correctement le raisonnement que l'on cite, évidemment, et préciser les points qui diffèrent – ici, la majoration, où on majore le cos *et non le* sin.

3) Soit $X \geqslant 1$. Posons

$$\begin{cases} u = \sin(t^2) & \qquad u' = 2t\cos(t^2) \\ v = \dfrac{1}{2t} & \qquad v' = -\dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$$

Il y a 2 possibilités : dériver $\cos(t^2)$ *(et intégrer 1) ou intégrer, mais dans ce cas il nous faut du* $u'\cos(u)$. *La première possibilité est plus facile, mais elle part dans la mauvaise direction : on ne voit pas apparaître la question 2 (fil du sujet, c'est toujours un indice important), et lorsque* $X \to +\infty$, *le crochet diverge et la nouvelle intégrale ne semble pas convergente. Donc c'est l'autre option : on fait apparaître* $u'\cos(u)$ *en écrivant*

$$\cos(t^2) = \frac{1}{2t} \times 2t\cos(t^2)$$

L'intégration par parties s'écrit alors

$$\begin{aligned}
I(X) &= \int_1^X \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin(t^2)}{2t}\right]_1^X - \int_1^X -\frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sin(X^2)}{2X} - \frac{\sin(1)}{2} + \int_1^X \frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Lors de la question 2, nous avons montré que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est fini.
De plus, $\displaystyle\left|\frac{\sin(X^2)}{2X}\right| \leqslant \frac{1}{2X}$ donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\sin(X^2)}{2X} = 0$. En conclusion,

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty} I(X) \text{ existe et est finie.}}$$

De même, pour $J(X)$, l'intégration par parties s'écrit

$$\begin{cases} u = -\cos(t^2) & u' = 2t\sin(t^2) \\ v = \dfrac{1}{2t} & v' = -\dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$$

Puis

$$\begin{aligned}
J(X) &= \left[-\frac{\cos(t^2)}{2t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\cos(X^2)}{2X} - \frac{\cos(1)}{2} + \int_1^X \frac{\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La question 2 montre que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est fini.
De plus, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\cos(X^2)}{2X} = 0$ par majoration. En conclusion,

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty} J(X) \text{ existe et est finie.}}$$

4) Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $e^{it^2} = \cos(t^2) + i\sin(t^2)$. Donc, comme combinaison linéaire d'intégrale convergente,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

5) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $[0, +\infty[$ car le dénominateur ne s'annule jamais.
<u>Étude en $+\infty$</u> : $\left|t^2 + i\right| = \sqrt{t^4+1}$ donc

$$\begin{aligned}
|g(t)| &= \frac{\left|e^{-t^2x^2}e^{-ix^2}\right|}{|t^2+i|} \\
&= \frac{e^{-(xt)^2}}{\sqrt{t^4+1}} && \text{car } \left|e^{i\theta}\right| = 1 \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \sim \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par théorème de comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$ converge, donc par théorème de majoration $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe :

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

b) Soit $x > 0$. Effectuons le changement de variable $\varphi : t \mapsto u = xt$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante ($x > 0$) et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de changement de variable, les intégrales suivantes sont de même nature, convergentes II.1, et (en utilisant II.1)

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Grâce à la converge absolue de l'intégrale, il vient

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t && \text{Or } \sqrt{t^4+1} \geqslant 1 \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t && \textit{se débarrasser de ce qui gêne, garder l'utile} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2x} && \text{D'après 5b}
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2x} = 0$, donc, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

Au chapitre suivant, nous verrons un théorème qui nous donnera le droit de rentrer la limite dans l'intégrale : le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Dont vous pouvez deviner les hypothèses.

d) Dérivabilité et expression de f' : au chapitre suivant.

Comme f est une primitive de f', et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ existe, il vient directement (sans invoquer II.4)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}[f(x)]_0^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}(0 - f(0)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+i}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\frac{1}{t^2+i} = \frac{t^2-i}{t^4+1} = \frac{t^2}{t^4+1} - i\frac{1}{t^4+1}$. Et, d'après I.9b,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

D'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)}$$

Comme $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$. sont les parties réelle et imaginaire de l'intégrale précédente, il vient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$$

Dans ce problème, on calcule, à l'aide d'intégrales généralisées, la valeur de l'intégrale (complexe) $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x$, connue comme l'expression complexe des intégrales (réelles) de Fresnel, qui interviennent dans les phénomènes de diffraction. La somme pour toutes les valeurs de x peut s'interpréter intuitivement (et de façon très simplifiée) comme le fait qu'à chaque fois qu'une onde lumineuse se propage, une infinité de rayons sont à prendre en compte – et on somme les effets de cette infinité de rayons, en lien avec le principe de superposition de Huygens-Fresnel, en physique.