Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (CCINP TSI 2023)

Partie 1 (Définition de la fonction)

1) D'après le critère des intégrales de Riemann,

$$\boxed{\int_0^1 t^\alpha \, \mathrm{d}t \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > -1}$$

De plus, pour $\alpha > -1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^\alpha \, \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 && (\alpha \neq -1) \\ &= \frac{1}{\alpha+1} - 0 && (\alpha + 1 > 0)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\int_0^1 t^\alpha \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}}$$

2) Par quotient d'équivalents,

$$\boxed{\frac{t^{x-1}}{1+t} \sim \frac{t^{x-1}}{1} = t^{x-1}}$$

3) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$, et positive.

<u>Étude en 0</u> : d'après 2,

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \sim t^{x-1}$$

et d'après 1, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison ($f \geqslant 0$),

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } x > 0}$$

Partie 2 (Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

1)

$$\begin{aligned}f(1) &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t \\ &= [\ln(1+t)]_0^1 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(2) &= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t \\ &= 1 - f(1) \\ &= 1 - \ln 2\end{aligned}$$

2) Soit $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
(1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} t^k && \textit{Décalage d'indices : tester début et fin} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t^k && \textit{Car } (-1)^{-1} = -1 \\
&= 1 - (-1)^n t^n && \text{Télescopage}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{1-(-t)^n = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k}$$

3) Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t \neq 0$ et d'après 2,

$$\begin{aligned}
&\frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k && \text{Car } n-1 \geqslant 1 \\
\Longrightarrow\ &(-1)^n \frac{t^{n-1}}{1+t} = -\frac{1}{1+t} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k \\
\Longrightarrow\ &\frac{t^{n-1}}{1+t} = (-1)^{n+1}\frac{1}{1+t} + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k
\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0,1]$, il vient

$$\begin{aligned}
f(n) &= \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (-1)^{n+1}\frac{1}{1+t} + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1}\ln 2 + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(n) = (-1)^{n-1}\ln 2 + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k+1}}$$

Partie 3 (Variations de f)

1) La fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est décroissante si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \Big(x \leqslant y \Longrightarrow g(x) \geqslant g(y)\Big)$$

2) Soit $t \in]0,1]$, comme $\ln t \leqslant 0$,

$$\begin{aligned}
-1 < \alpha \leqslant \beta &\Longrightarrow -\ln t \geqslant \alpha \ln t \geqslant \beta \ln t \\
&\Longrightarrow e^{-\ln t} \geqslant e^{\alpha \ln t} \geqslant e^{\beta \ln t} && \text{Par croissance de exp sur } \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \boxed{t^\alpha \geqslant t^\beta} \\
0 < \alpha \leqslant \beta &\Longrightarrow \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \geqslant \frac{t^{\beta-1}}{1+t} && \text{Car } \frac{t^{-1}}{1+t} \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow f(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = f(\beta) && \text{Par croissance de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$$

3) Soit $x>0$ et $t\in]0,1]$:

$$\begin{aligned} 0<t\leqslant 1 &\Longrightarrow 1<1+t\leqslant 2 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{1+t}\leqslant 1 && \text{Car } x\mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Longrightarrow \boxed{\frac{t^{x-1}}{2}\leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t}\leqslant t^{x-1}} && \text{Car } t^{x-1}\geqslant 0 \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale, en intégrant entre 0 et 1, il vient (cf 1.1)

$$\boxed{\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}}$$

4) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ existe et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}=+\infty$, par minoration,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty}$$

Partie 4 (Équivalent de f en $+\infty$)

L'encadrement précédent nous donne $\frac{1}{2}\leqslant xf(x)\leqslant 1$, ce qui ne permet pas d'obtenir un équivalent – ni même l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)$.

1) Soit $x\in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x)+f(x+1) &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x)+f(x+1)=\frac{1}{x}}$$

2) Comme f est décroissante d'après la question 3.2,

$$\forall x>1,\qquad f(x+1)\leqslant f(x)\leqslant f(x-1)$$

En sommant, il vient,

$$\boxed{f(x+1)+f(x)\leqslant 2f(x)\leqslant f(x)+f(x-1)}$$

3) Soit $x > 1$. D'après 1, $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$, et $f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x-1}$. Ainsi l'encadrement s'écrit

$$\frac{1}{x} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{x-1}$$

Ce qui nous donne, comme $x > 1 > 0$,

$$1 \leqslant 2xf(x) \leqslant \frac{x}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$, puis

$$\boxed{f(x) \sim \frac{1}{2x}}$$

Exercice 2 (E3A PC 2023)

1) D'après le cours,

$$\boxed{(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)}$$

Ainsi, $1-(1-x)^\alpha = 1 - (1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)) = \alpha x + o(x)$

$$\boxed{1-(1-x)^\alpha \sim \alpha x}$$

2) Par définition de a^b, $\boxed{a^b = e^{b\ln a}}$.

3) *Bien comprendre qui est fixé – ici, n – et qui bouge – ici, $k \to +\infty$.*

a) Déterminons un équivalent de u_k :

$$\begin{aligned}
u_k &= a_{k-1} - a_k \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}\right] \\
&= -\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1} && \textit{Ici, } \alpha = n-1 \textit{ est fixé} \\
&= -1 + \frac{n-1}{2^{k-1}} + o(\frac{1}{2^{k-1}}) + 1 - \frac{n-1}{2^k} + o(\frac{1}{2^k}) && \text{D'après le DL de la question 1} \\
&= \frac{2(n-1)}{2^k} + o(\frac{2}{2^k}) - \frac{n-1}{2^k} + o(\frac{1}{2^k}) \\
&= \frac{n-1}{2^k} + o(\frac{1}{2^k}) \\
&\sim \frac{n-1}{2^k} && (n-1 \neq 0)
\end{aligned}$$

Or $\sum\limits_k \frac{1}{2^k}$ converge (série géométrique, $1/2 \in]-1,1[$). Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum u_k \text{ converge absolument donc converge}}$$

Calcul de somme, sans question intermédiaire : est-ce géométrique ou télescopique ?

On reconnaît une série télescopique : pour $p \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{p} u_k = a_0 - a_p = 1 - (1-1)^{n-1} - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^{n-1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^k} = 1$, par continuité de l'application $x \mapsto x^{n-1}$ en $x = 1$,

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_k \text{ est convergente de somme 1}}$$

On peut ainsi montrer valeur de la somme et convergence *d'un seul coup, en simplifiant l'expression de la somme partielle. L'équivalent qui précède est donc inutile.*

b) $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$

$\sim \dfrac{n-1}{2^k}$ D'après 1

Or $\displaystyle\sum_k \frac{1}{2^k}$ converge (série géométrique, $1/2 \in]-1,1[$). Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum a_k \text{ converge absolument donc converge}}$$

4) Soit $k \geqslant 1$. $u_k = -\left(1 - \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} + \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$. Or

$$\begin{array}{rl}
& 0 \leqslant \frac{1}{2} < 1 \\
\Longrightarrow & 0 \leqslant \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 1 \\
\Longrightarrow & -1 \leqslant -\frac{1}{2^{k-1}} < -\frac{1}{2^k} \\
\Longrightarrow & 0 \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k-1}} < 1 - \frac{1}{2^k} \\
\Longrightarrow & \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} < \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1} \\
\Longrightarrow & 0 < -\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}
\end{array}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 1,\ u_k > 0}$$

5) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_p est continue sur $[0, +\infty[$.
Étude en $+\infty$: $x = e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, donc, d'après 1,

$$f_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})^p \sim pe^{-t}$$

Or, d'après le critère des exponentielles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge ($\beta = 1 > 0$).

Ainsi, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)\, dt$ converge absolument donc converge.

Pour $p = 0$, I_0 converge (et vaut 0).

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } p, \text{ l'intégrale } I_p = \int_0^{+\infty} f_p(t)\, dt \text{ est convergente.}}$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{p+1} - I_p &= \int_0^{+\infty} f_{p+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f_{p+1}(t) - f_p(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} -(1-e^{-t})^{p+1} + (1-e^{-t})^p\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})^p \left(-(1-e^{-t})+1\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})^p e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Posons $u = 1 - e^{-t}$, alors $u' = -(-e^{-t})$, donc $(1-e^{-t})^p e^{-t} = u'u^p$, et

$$I_{p+1} - I_p = \left[\frac{(1-e^{-t})^{p+1}}{p+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+1} - 0$$

D'où

$$\boxed{I_{p+1} - I_p = \frac{1}{p+1}}$$

Savoir reconnaître la forme $u'f(u)$, voir plus simplement $u'u^\alpha$. Pas forcément au premier regard : ce serait bien pratique que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-e^{-t}) = e^{-t}$? Testez !

c) D'après la question 5b,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} = I_k - I_{k-1}$$

Donc, la somme télescopique nous donne, comme $n - 1 \geqslant 1$,

$$sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = sum_{k=1}^{n-1} I_k - I_{k-1} = I_{n-1} - I_0$$

Or $I_0 = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$, donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}}$$

6) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1] \subset]0, +\infty[$, donc

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

En intégrant, il vient

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$$

b) En sommant les encadrements précédents, entre 1 et $n-1$, il vient

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1} && \text{D'après 5c} \\ \Longrightarrow \quad & -1 + I_n \leqslant \ln n \leqslant I_{n-1} \end{aligned}$$

En décalant les indices dans l'inégalité de gauche, il vient, pour $n \geqslant 3$, $-1 + I_{n-1} \leqslant \ln(n-1)$, et

$$I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$$

Cette inégalité est encore vraie pour $n = 2$: $f_1(t) = 1 - (1 - e^{-t}) = e^{-t}$, et

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}t = 1 \leqslant 1 = 1 + \ln(2-1)$$

Ainsi,

$$\boxed{\ln n \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)}$$

c) Montrons que $I_{n-1} \sim \ln n$:

$$\begin{aligned} \ln(n-1) &= \ln(n(1 - \frac{1}{n})) \\ &= \ln(n) + \ln(1 - 1/n) & \text{Or } \ln(1-1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ &= \ln(n) + o(1) & \sim \ln n \end{aligned}$$

Comment chercher ; au brouillon, vous divisez par $\ln n$ dans l'encadrement, et remarquez que vous avez besoin d'un équivalent de $\ln(n-1)$. Au brouillon toujours, vous vous lancez peut-être dans le DL de $\ln(1-1/n)$, vous constatez que ça ne sert pas, et vous êtes désormais prêt à rédiger au propre le calcul.

Ainsi l'encadrement de la question précédente s'écrit, en divisant par $\ln n > 0$,

$$1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n-1)}{\ln n} = 1$. Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{\ln n} = 1$:

$$\boxed{I_{n-1} \sim \ln n}$$

7) Soit $m \geqslant 2$. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$g_n(t) = 1 - (1 - e^{-t\ln 2})^{n-1} = f_{n-1}(t \ln 2)$$

Variations de g_n : Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} g_n'(t) &= -(n-1)\left(-(-\ln 2)e^{-t\ln 2}\right)(1 - e^{-t\ln 2})^{n-1} \\ &= -(n-1)(\ln 2)e^{-t\ln 2}(1 - e^{-t\ln 2})^{n-1} \end{aligned}$$

Or $(n-1)(\ln 2)e^{-t\ln 2} \geqslant 0$, et $e^{-t\ln 2} \leqslant e^{-0} = 1$, d'où

$$g_n'(t) \leqslant 0$$

Ainsi, g_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \forall t \in [k, k+1], \quad g_n(k+1) \leqslant g_n(t) \leqslant g_n(k)$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad g_n(k+1) = \int_k^{k+1} g_n(k+1) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} g_n(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} g_n(k) \,\mathrm{d}t = g_n(k)$$

Comme $g_n(k) = a_k$, en sommant l'encadrement s'écrit

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} g_n(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k}$$

8) Comme $g_n(v) = f_{n-1}(v\ln 2)$, effectuons le changement de variable $u = v\ln 2$:

$$\mathrm{d}u = (\ln 2)\,\mathrm{d}v \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v = 0 \Longrightarrow u = 0 \\ v = \beta \Longrightarrow u = \beta\ln 2 \end{cases}$$

Puis

$$\boxed{\int_0^{\beta} g_n(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\beta\ln 2} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u}$$

9) D'après la question 3b, $\sum a_k$ converge.

D'après la question 5a, I_p converge, donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m\ln 2} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u$ existe et vaut I_{n-1}.

Donc, d'après la question 8, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{\ln 2}I_{n-1}$.

Donc on peut prendre la limite lorsque $m \to +\infty$ dans l'encadrement, puisque ces différentes limites existent :

$$-a_0 + S_n \leqslant \frac{1}{\ln 2}I_{n-1} \leqslant S_n$$

Ainsi, comme l'inégalité de gauche peut s'écrire $S_n \leqslant a_0 + \dfrac{1}{\ln 2}I_{n-1}$,

$$\frac{1}{\ln 2}I_{n-1} \leqslant S_n \leqslant a_0 + \frac{1}{\ln 2}I_{n-1}$$

Puis, comme $\ln n > 0$,

$$\frac{1}{\ln 2}\frac{I_{n-1}}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant \frac{a_0}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2}\frac{I_{n-1}}{\ln n}$$

Or, d'après 6c, $I_{n-1} \sim \ln n$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln 2}\frac{I_{n-1}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_0}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2}\frac{I_{n-1}}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2}$$

Donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2}$, et

$$\boxed{S_n \sim \frac{\ln n}{\ln 2}}$$

Exercice 3 (E3A MP 2017)

1) **a)** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, et positive.

Étude en $+\infty$: Comme $\alpha > 0$,

$$f(t) \sim \frac{1}{t^{n\alpha}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{n\alpha}}\,\mathrm{d}u$ converge (Riemann, $n\alpha > n \geqslant 1$). Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) Appliquons le théorème de changement de variable : La fonction $\varphi : u \mapsto \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante $(1/\alpha > 0)$ et bijective de $]0, +\infty[$ dans lui-même.

D'après le théorème de changement de variable, les intégrales

$$I_n \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\varphi(u)^\alpha)^n}\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature. Or I_n converge d'après a), donc la seconde aussi.

De plus, comme, pour tout $u > 0$, $\varphi'(u) = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(u)}{(1+\varphi(u)^\alpha)^n}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Ici les bornes ne changent pas. Mais il faut vérifier plutot 2 fois qu'une !

En conclusion,

$$\boxed{\text{L'application } f_n : u \longmapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\text{ et } I_n = \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u}$$

c) *On peut aussi étudier $g(u) = \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n - 1 - u$, en dérivant jusqu'à disparition du $-(1+u)$, et on trouve le résultat.*
Le $(a+b)^n$ peut faire penser au binôme de Newton, et c'est ce que nous allons utiliser ici. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \geqslant 0$. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\left(\frac{u}{n}\right)^k \\ &= 1 + n\frac{u}{n} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} 1^{n-k}\left(\frac{u}{n}\right)^k}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant 1+u \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0, \quad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u}$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \geqslant 0$. Comme $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u > 0$, par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$
(non, la fonction inverse n'est pas « décroissante » tout court, cf le graphe de $y = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$)

$$\frac{1}{(1+\frac{u}{n})^n} \leqslant \frac{1}{1+u}$$

Or $u^{\frac{1}{\alpha}-1} \geqslant 0$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0, \quad f_n(u) \leqslant \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}}$$

2) Question de cours.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u}$$

3) **a)** Soit $u \in]0,+\infty[$ fixé.

D'après la question 2), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{e^u} = u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}$.

Conclusion :

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers } f : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u} \end{cases}}$$

b) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(u) = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}$$

Montrons que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur $\mathbb{R}_+^*$) : elle est positive et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, et en $+\infty$

$$\varphi(u) \sim \frac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}$$

Or $0 < 1 < \alpha$, donc $0 < \dfrac{1}{\alpha} < 1$ et donc $2 - \dfrac{1}{\alpha} > 2 - 1 = 1$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}\,\mathrm{d}u$ est convergente (Riemann, $2 - \dfrac{1}{\alpha} > 1$), et par théorème de comparaison,

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \text{ converge.}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et f sont continues donc continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- D'après a), (f_n) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Hypothèse de domination : $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est intégrable d'après ci-dessus et, de plus, d'après 1)d),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant f_n(u) \leqslant \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, pour tout n f et f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

En remplaçant, il vient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

c) D'après 1)b), $I_n = \dfrac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} v_n$. Or $\Gamma(1/\alpha) \neq 0$, donc $v_n \sim \Gamma(1/\alpha)$. Conclusion :

$$\boxed{I_n \sim \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

FIN DE L'ÉPREUVE