Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 9 octobre 2023

Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
Ne pas utiliser de correcteur.
Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (Une fonction définie à partir d'une intégrale)

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'applications : automatique, traitement du signal, etc. On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

Partie 1 (Définition de la fonction)

1) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \, \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

2) Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t) lorsque t tends vers 0^+, de la fonction définie sur $]0,1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

3) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0,+\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie 2 (Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

1) Montrer que $f(1) = \ln 2$, puis que $f(2) = 1 - \ln 2$. On pourra calculer, pour $t \in [0,1]$,

$$1 - \frac{1}{1+t}$$

2) Montrer que, pour $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1-(-t)^n = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$$

3) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$f(n) = (-1)^{n-1}\ln 2 + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

On pourra remarquer que, pour $n \geqslant 2$ et $t \in [0,1]$, $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$.

Partie 3 (Variations de f)

1) Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2) Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leqslant \beta$. Comparer, pour $t \in]0,1]$, t^α et t^β.
En déduire que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0,1]$,

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1}$$

En déduire que, pour $x > 0$,

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

4) En déduire la limite de f en $+\infty$, ainsi que la limite de f en 0.

Partie 4 (Équivalent de f en $+\infty$)

1) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$

2) En utilisant le résultat de la question 3.2, montrer que, pour $x > 1$,

$$f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1)$$

3) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 2

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$.
En déduire un équivalent de $1-(1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2) Soient a et b deux réels, avec $a > 0$. Exprimer a^b à l'aide de l'exponentielle.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

a) Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

b) Montrer que la série de terme général a_k est convergente.
On notera S_n sa somme, que l'on ne cherchera pas à calculer.

4) Démontrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $u_k > 0$.

5) Pour tout t réel, on pose $f_0(t) = 0$, et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(t) = 1-(1-e^{-t})^p$.

a) Pour tout entier naturel p, montrer que l'intégrale $I_p = \int_0^{+\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Calculer $I_{p+1} - I_p$ pour tout entier naturel p.

c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.

6) Un encadrement.

a) Prouver que, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

b) En déduire que $\ln n \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

c) En déduire un équivalent simple de I_{n-1}.

7) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \geqslant 0, \quad g_n(t) = 1 - (1 - 2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^{n-1}$$

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k$$

8) Soit β un réel strictement positif, montrer que l'on a :

$$\int_0^{\beta} g_n(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{\beta \ln 2} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u$$

9) Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1) Soit un entier n strictement positif.

a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t$.

b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application

$$f_n : u \longmapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et exprimer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u$ en fonction de l'intégrale I_n.

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \qquad \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1 + u.$$

d) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \qquad f_n(u) \leqslant \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}.$$

2) Déterminer la limite : $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u.$$

a) Déterminer la limite f de la suite de fonctions (f_n) pour la convergence simple, sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} \, \mathrm{d}u$.

c) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

FIN DE L'ÉPREUVE