

# Épreuve de Mathématiques 1

Correction

## Exercice 1 (ATS 2025)

### Partie A

1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , et  $x \in [k, k + 1[$ . Par définition de la partie entière,  $[x] = k$ . Donc

$$g(x) = \frac{1}{k} \text{ pour } k \leq x < k + 1$$

2) Représenter les fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[1, 6]$ .

3) Par définition de la partie entière, pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , on a  $[x] \leq x$ . Par conséquent, par décroissance de  $t \mapsto 1/t$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$0 \leq I_n \leq J_n$$

4) Par Chasles,  $J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} g(x) dx$ . En remplaçant par l'expression trouvée à la question 1,

$$J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

5) La fonction  $x \mapsto 1/k$  étant constante, il vient

$$J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1}$$

### Partie B

8) Soit  $k \geq 2$ .

$$\forall t \in [k-1, k],$$

$$0 < k-1 \leq t \leq k$$

$$\implies \forall t \in [k-1, k],$$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$$

(décroissance de  $t \mapsto 1/t$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ )

$\implies$

$$\frac{1}{k} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{k-1} dt = \frac{1}{k-1} \quad (\text{croissance de l'intégrale})$$

Ainsi,

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

Et l'inégalité de droite s'écrit, décalant les indices,

$$\forall k \geq 1, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

9) Pour tout  $k \geq 2$ , la question précédente donne l'encadrement

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

Soit  $n \geq 2$ . En sommant de  $k = 2$  à  $n$ , il vient

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = \int_2^n \frac{1}{t} dt$$

Or  $\int_a^b \frac{1}{t} dt = [\ln t]_a^b = \ln(b) - \ln(a)$ , d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n)$$

Comme, de plus,  $\ln(2) \leq 1 \leq 1$ , en sommant avec l'encadrement précédent il vient

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1}$$

10)  $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n)$ .

Or, par composition de limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + 1/n) = 0$ , c'est-à-dire  $\ln(1 + 1/n) = o(1)$  :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + o(1)$$

D'où,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1}$$

11) Soit  $n \geq 2$ . L'encadrement de la question 9 s'écrit, en divisant par  $\ln(n) > 0$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après la question 10,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ , et le membre de droite tend aussi vers 1.

Ainsi, par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ , c'est-à-dire

$$\boxed{H_n \sim \ln(n)}$$

12)  $V_n = U_{n+1} - U_n$

$$= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{V_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

*On peut écrire  $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$  en mettant au même dénominateur pour trouver la formule souhaitée. On pourrait aussi préférer la formule  $-\ln(1 + 1/n)$  qui donne un développement en  $1/n$  à la fin.*

13) Développement limité :  $\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ .

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Or  $1/(n+1) \sim 1/n$ , donc  $1/(n+1)^2 \sim 1/n^2$  et

$$V_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- 14) D'après la question 13,  $|V_n| \sim \frac{1}{2n^2}$ . Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ).  
Donc, par théorème de comparaison,  $\sum V_n$  converge absolument donc converge :

La série de terme général  $V_n$  converge

- 15) Soit  $n \geq 1$  fixé. La série  $\sum V_n$  est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n (U_{k+1} - U_k) = U_{n+1} - U_1$$

Notons  $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} V_k$ , en remarquant que  $U_1 = H_1 - \ln(1) = 1$ , il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell + U_1 = \ell + 1$$

Donc

La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge

- 16) En écrivant la limite ci-dessus à l'aide d'un petit  $o$ , il vient  $U_n = \gamma + o(1)$ . D'où

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

*La constante  $\gamma$  s'appelle la constante d'Euler.*

## Exercice 2 (D'après Centrale PC 2025)

### Partie A – Préliminaires

- 1) a) Soit  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ . La fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée cosinus. Donc l'inégalité des accroissements finis, entre  $s$  et  $t$ , s'écrit

$$|\sin(s) - \sin(t)| \leq \left( \sup_{h \text{ entre } s \text{ et } t} |\cos(h)| \right) |s - t|$$

Or  $|\cos| \leq 1$ . D'où

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sin(s) - \sin(t)| \leq |s - t|$$

- b) Soit  $h > 0$ , et  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|t - s| < h$ .

D'après la question précédente,  $|\sin(s) - \sin(t)| \leq |s - t|$ . D'où

$$|\sin(s) - \sin(t)| \leq h$$

Cette majoration étant vraie pour tout couple  $(s, t)$  tel que  $|t - s| < h$ , on peut passer à la borne supérieure :

$$\omega_g(h) \leq h$$

- 2) a) i) La fonction  $|g|$  est continue sur le segment  $[0, 2\pi]$ , donc, d'après le théorème des bornes atteintes, bornée et atteint ses bornes. Notons  $M$  la borne supérieure. Par  $2\pi$ -périodicité,  $|g|$  admet  $M$  pour borne supérieure sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $M = \|g\|_\infty$  :

$$\boxed{\|g\|_\infty \text{ existe}}$$

ii) Soit  $h > 0$ . Par définition,  $\omega_g(h) = \sup \mathcal{E}_h$ . Pour montrer que  $\omega_g(h)$  est réel, il suffit de montrer que  $\mathcal{E}_h$  est majoré. Or, pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|g(s) - g(t)| \leq |g(s)| + |g(t)| \leq 2\|g\|_\infty$$

Donc  $\mathcal{E}_h$  est majoré par  $2\|g\|_\infty$  :

$$\boxed{\omega_g(h) \text{ est un réel bien défini}}$$

b) Appliquons à nouveau l'inégalité des accroissements finis, à  $g$  désormais. La fonction  $g'$  est continue et  $2\pi$  périodique, donc, d'après 2.a.i,  $\|g'\|_\infty$  existe.

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(s) - g(t)| \leq \|g'\|_\infty |s - t| \leq h\|g'\|_\infty$$

Ainsi, en passant à la borne supérieure,

$$\boxed{\forall h > 0, \quad \omega_g(h) \leq h\|g'\|_\infty}$$

Par encadrement,

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0}$$

3) a) Avec les notations de la question 2.a.ii,  $\mathcal{E}_h \subset \mathcal{E}_{h'}$  car

$$|g(s) - g(t)| \leq h \leq h'$$

D'où, en passant aux bornes supérieures,

$$\boxed{h \leq h' \implies \omega_g(h) \leq \omega_g(h')}$$

b) Soit  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|s - t| \leq h + h'$ , et  $u = \frac{h}{h+h'}s + \frac{h'}{h+h'}t$ . Comme

$$\begin{aligned} s - u &= \frac{h+h'-h}{h+h'}s - \frac{h'}{h+h'}t \\ &= \frac{h'}{h+h'}(s-t) \\ \implies |s - u| &= \frac{h'}{h+h'}|s-t| < h' \quad \text{car } |s-t| < h+h' \end{aligned}$$

Il vient donc  $|g(s) - g(u)| \in \mathcal{E}_{h'} : |g(s) - g(u)| \leq \omega_g(h')$ . De même,  $|g(u) - g(t)| \leq \omega_g(h)$ .

$$\begin{aligned} g(s) - g(t) &= g(s) - g(u) + g(u) - g(t) \\ \implies |g(s) - g(t)| &\leq |g(s) - g(u)| + |g(u) - g(t)| \\ &\leq \omega_g(h') + \omega_g(h) \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure, il vient

$$\boxed{\omega_g(h+h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')}$$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$$

est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

- $\mathcal{H}_1$  est immédiat.

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$  : Supposons  $\mathcal{H}_n$  vraie.

$$\begin{aligned} \omega_g((n+1)h) &\leq \omega_g(nh) + \omega_g(h) & (3b) \\ &\leq (n+1)\omega_g(h) & (\mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie.

- Conclusion :  $\boxed{\forall n \geq 1 \quad \omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)}$

Soit  $\lambda > 0$ . Par croissance (3a),  $\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g([\lambda] + 1)h$ . Puis, en appliquant le résultat ci-dessus à  $n = [\lambda] + 1$ ,

$$\boxed{\forall \lambda > 0, \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda)\omega_g(h)}$$

- 4) Soit  $G$  une primitive de  $g$ , donc une fonction  $\mathcal{C}^1$  telle que  $G' = g$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons

$$f(x) = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = G(\pi+x) - G(-\pi+x)$$

En dérivant, il vient, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = g(\pi+x) - g(-\pi+x) = 0$  par  $2\pi$ -périodicité de  $g$ . Donc  $f$  est une fonction constante :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(0) = G(\pi) - G(-\pi)$ . C'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.}$$

- 5) Linéarité : Soient  $p, q \in \mathcal{T}_n^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . D'après l'énoncé,  $\lambda p + q \in \mathcal{T}_n$ , et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(\lambda p + q)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda p + q)(x-t)g(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \lambda p(x-t)g(t) + q(x-t)g(t) dt \\ &= \lambda \Delta(p)(x) + \Delta(q)(x) \end{aligned} \quad (\text{par linéarité de l'intégrale})$$

Donc  $\Delta$  est linéaire.

$\Delta : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$  : Soit  $p : x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \in \mathcal{T}_n$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \Delta(p)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik(x-t)} \right) g(t) dt \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ikt} g(t) dt \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt \\ &= \sum_{k=-n}^n d_k e^{ikx} \end{aligned} \quad \text{où } d_k = c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt \in \mathbb{C}$$

Donc  $\Delta(p) \in \mathcal{T}_n$ . Conclusion :

$$\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{T}_n)}$$

## Partie B

### I – La fonction $J_n$

6) Soit  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . Comme  $e^{it} \neq 1$ ,

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

Puis

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \\ &= e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{e^{i(n+1)t/2} (e^{-i(n+1)t/2} - e^{i(n+1)t/2})}{e^{it/2} (e^{-it/2} - e^{it/2})} \\ &= \frac{-2i \sin((n+1)t/2)}{-2i \sin(t/2)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4}$$

7) Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_n^2(t) &= e^{-int} \left( \sum_{k=0}^n e^{ikt} \right)^2 \\ &= e^{-int} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \sum_{p=0}^n e^{ipt} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^n e^{i(p+k-n)t} \end{aligned}$$

Lorsque  $(p, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,  $p+k-n \in \llbracket -n, n \rrbracket$ , donc

$$\boxed{\varphi_n^2 \in \mathcal{T}_n}$$

Posons  $(c_k)_{k \in \llbracket -n, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^{2n+1}$  tels que  $\varphi_n^2(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= (\varphi_n^2(t))^2 \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \sum_{p=-n}^n c_p e^{ipt} \\ &= \sum_{k=-n}^n \sum_{p=-n}^n c_k c_p e^{i(p+k)t} \end{aligned}$$

De même, pour  $(p, k) \in \llbracket -n, n \rrbracket$ ,  $p+k \in \llbracket -2n, 2n \rrbracket$ , donc

$$\boxed{f_n \in \mathcal{T}_{2n}}$$

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_n(-t) &= e^{ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{-ikt} \\ &= e^{ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{i(k-n)t} && \text{Par changement d'indice } k \mapsto n-k \\ &= e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \\ &= \varphi_n(t) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi_n$  est paire. Par conséquent,

La fonction  $f_n$  est paire

Pour la parité, on peut aussi utiliser la formule obtenue au 6, qui donne instantanément  $\varphi_n$  paire comme quotient de fonctions impaire, sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Puis  $\varphi_n$  étant continue comme somme finie de fonctions continue (avec la formule à base d'exponentielles),  $\varphi_n$  est paire sur  $\mathbb{R}$ .

**Avertissement** : L'énoncé d'origine demandait de montrer que  $\varphi_n$  et  $\varphi_n^2$  appartiennent à  $\mathcal{T}_n$ , ce qui est faux pour  $\varphi_n$  dans le cas impair.

- 8) D'après la formule obtenue à la question 6,  $f_n$  est positive sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . De plus  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions continues. Donc  $f_n \geq 0$ .

Supposons  $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = 0$ . Comme  $f_n$  est positive et continue sur  $[-\pi, \pi]$ , le théorème de l'intégrale nulle nous donne  $f_n = 0$  sur cet intervalle.

Or  $\varphi_n(0) = n + 1$ , donc  $f_n(0) = (n + 1)^4 \neq 0$  ( $n \geq 0$ ). Ainsi, par l'absurde,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt \neq 0$$

Par conséquent,

$$c_n = \left( \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt \right)^{-1} > 0 \text{ vérifie } \int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$$

## II – Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- 9) D'après la question 7,  $f_n$  est paire, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} f_n(t) dt$$

et  $J_n = c_n f_n$  est aussi paire, donc  $t \mapsto |t| J_n(t)$  aussi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} |t| J_n(t) dt = 2c_n \int_0^{\pi} t f_n(t) dt$$

D'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{2}{2 \int_0^{\pi} f_n(t) dt} \int_0^{\pi} t f_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}$$

- 10) La dérivée seconde de la fonction sinus sur  $[0, \pi/2]$  est  $-\sin \leq 0$ , donc sinus est concave sur  $[0, \pi/2]$ . Ainsi, la courbe de sinus est au-dessus de sa corde entre 0 et  $\pi/2$ , d'équation  $y = (2/\pi)x$ , et sous sa tangente en 0, d'équation  $y = x$  :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$$

Ici, la convexité est spécialement efficace. Mais, au pire, vous posez  $g(t) = \sin(t) - t$ , après calcul de  $g'$  et tableau de variations sur  $[0, \pi/2]$ , vous obtenez  $\sin(t) \leq t$ . Même méthode pour l'autre inégalité. Vous n'avez pas le droit de ne pas savoir faire.

- 11) a) On peut ruser en utilisant la continuité de  $\varphi_n$  et de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  déjà prouvées, puis la question 6. Mais la preuve directe par des équivalents est aussi rapide à écrire, et elle doit être connue.

Comme  $\sin x \sim x$  en 0,

$$\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sim \frac{(n+1)\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = n+1$$

D'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = n+1$$

Puis, par composition de limites,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 = 0$$

On verra plus tard que ces intégrales sont « faussement généralisées ».

- b) Pour tout  $t \in ]0, \pi]$ ,  $t/2 \in ]0, \pi/2]$  et l'encadrement de la question 10 s'écrit

$$0 < \frac{2}{\pi} \times \frac{t}{2} \leq \sin \frac{t}{2}$$

En élevant à la puissance  $-4$  (tout est positif), puis en multipliant par  $\sin^4(n+1)\frac{t}{2} \geq 0$ , il vient

$$\forall t \in ]0, \pi], \quad f_n(t) = \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 \quad \text{d'après 6}$$

$$\leq \frac{\sin^4(n+1)\frac{t}{2}}{t^4/\pi^4}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^\pi t f_n(t) dt \leq \pi^4 \int_0^\pi \frac{\sin^4(n+1)\frac{t}{2}}{t^3} dt$$

Le changement de variable  $u = (n+1)\frac{t}{2}$ , avec  $\begin{cases} dt = \frac{2}{n+1} dt \\ t = \pi \text{ donne } u = (n+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$  s'écrit

$$\int_0^\pi \frac{\sin^4(n+1)\frac{t}{2}}{t^3} dt = \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$$

Pour les 5/2 – et les 3/2 après le chapitre intégration : c'est une intégrale généralisée, il faut appliquer le théorème de changement de variable, vu qu'il n'y aura pas la question 11a – et le paragraphe « on admettra » – dans un vrai sujet.

En conclusion :

$$\int_0^\pi t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$$

- 12) On utilise la partie droite de l'encadrement de la question 10 : pour  $t \in ]0, \pi]$ ,  $0 < \sin(t/2) \leq t/2$  puis

$$\int_0^\pi f_n(t) dt \geq \int_0^\pi \frac{\sin^4(n+1)\frac{t}{2}}{(t/2)^4} dt$$

Le même changement de variable  $u = (n+1)t/2$  nous donne :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^4(n+1)\frac{t}{2}}{(t/2)^4} dt = 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$$

Conclusion :

$$\int_0^\pi f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$$

13) (Début de la parenthèse : pour 5/2 ou à relire après le chapitre d'intégration)

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \frac{\sin^4 u}{u^3} \right| \leq \frac{1}{u^3}$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3} du$  converge d'après Riemann ( $\alpha = 3 > 1$ ). Donc, par théorème de majoration,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$  converge absolument donc converge. En conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du = \ell_1$$

De même, par majoration par  $1/u^4$  sur  $[1, +\infty[$  et comparaison à une intégrale de Riemann convergente,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^4} du \text{ converge.}$$

(Fin de la parenthèse)

Comme  $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^4}$  est une fonction positive, continue, et non identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$ , donc par le théorème de l'intégrale nulle, son intégrale est non nulle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du > 0$$

Par conséquent la question 12 nous donne

$$\left( \int_0^\pi f_n(t) dt \right)^{-1} \leq \frac{1}{2(n+1)^3} \left( \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du \right)^{-1}$$

Puis, avec les question 9 et 13,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi |t| J_n(t) dt &= \frac{\int_0^\pi t f_n(t) dt}{\int_0^\pi f_n(t) dt} \\ &\leq \pi^4 \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \frac{1}{2(n+1)^3} \left( \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du \right) \left( \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du \right)^{-1} \\ &\leq \frac{\pi^4}{8(n+1)} \times \frac{u_n}{v_n} \end{aligned}$$

La suite  $u_n = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$  converge, notons  $\ell_1$  sa limite.

La suite  $v_n = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$  étant croissante, sa limite  $\ell_2$  est non nulle. Donc  $(u_n/v_n)$  converge vers  $\ell_1/\ell_2 \in \mathbb{R}$  : cette suite est en particulier bornée. Notons  $M > 0$  tel que

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq M$$

Alors  $\int_{-\pi}^\pi |t| J_n(t) dt \leq \frac{\pi^4 M}{8} \times \frac{1}{n+1}$ , et avec  $a = \pi^4 M/8 > 0$ ,

$$\boxed{\exists a > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^\pi |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}}$$

### III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

14) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Le changement de variable  $u = x - t$  donne

$$T_n g(x) = - \int_{\pi+x}^{-\pi+x} J_n(u) g(x-u) du$$

Or  $J_n = c_n f_n \in \mathcal{T}_{2n}$  donc est  $2\pi$  périodique, donc  $u \mapsto J_n(u)g(x-u)$  aussi. Or, d'après la question 4, l'intégrale sur une période ne dépend pas de l'intervalle considéré :

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(u) g(x-u) du$$

De plus, par définition de  $J_n$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1$ . Conclusion :

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt$$

$$\begin{aligned} T_n g(x) - g(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) [g(x-t) - g(x)] dt \end{aligned} \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire (sur les intégrales), comme  $J_n \geq 0$ ,

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt$$

15) a) Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Par inégalité des accroissements finis ( $g$  est  $\mathcal{C}^1$ ),

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g'| |x-t-x| = \|g'\|_{\infty} |t|$$

D'où, en utilisant la question 14 et  $J_n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |T_n g(x) - g(x)| &\leq \|g'\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \\ &\leq \frac{a \|g'\|_{\infty}}{n+1} \end{aligned} \quad \text{d'après 13}$$

Ainsi, en passant à la borne supérieure pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n g - g\|_{\infty} \leq \frac{a \|g'\|_{\infty}}{n+1}$$

b) La fonction  $J_n$  appartient à  $\mathcal{T}_{2n}$ , donc, d'après la question 5,  $T_n g = \Delta(J_n) \in \mathcal{T}_{2n}$  :  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques. L'inégalité précédente nous permet de conclure, par encadrement :

$$(T_n g) \text{ est une suite de polynômes trigonométriques telle que } \|T_n g - g\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

16) a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t \in \mathbb{R}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $h > 0$ . Par définition de  $\omega_g(h)$ , pour tout  $s, t' \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|t' - s| \leq h$ ,

$$|g(s) - g(t')| \leq \omega_g(h)$$

Avec  $s = x - t$ ,  $t' = x$  et  $h = |t| > 0$ , il vient

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|)$$

La question 3c avec  $\lambda = n|t|$  et  $h = 1/n$  s'écrit alors

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|) \leq (1 + n|t|) \omega_g(1/n)$$

Cette majoration reste vraie dans le cas où  $t = 0$ . Ainsi,

$$|g(x-t) - g(x)| \leq (1 + n|t|) \omega_g(1/n)$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . La question 14 nous donne

$$\begin{aligned}
 |T_n g(x) - g(x)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) (1 + n|t|) \omega_g(1/n) dt && \text{D'après 16a} \\
 &\leq \omega_g(1/n) + n\omega_g(1/n) \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |t| dt && \text{car } \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |t| dt = 1 \\
 &\leq \omega_g(1/n) \left(1 + \frac{na}{n+1}\right) && \text{d'après 13}
 \end{aligned}$$

Or  $n/(n+1)$  est bornée car convergente, donc en passant à la borne sup pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\boxed{\exists b > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|T_n g - g\|_{\infty} \leq b \omega_g(1/n)}$$

c) On a admis que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_g(1/n) = 0$  et, par majoration,

$$\boxed{(T_n g) \text{ est une suite de polynômes trigonométriques telle que } \|T_n g - g\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

**FIN DE L'ÉPREUVE**