

# Épreuve de Mathématiques 1

---

Durée 4 h

---

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

---

**Les calculatrices sont interdites**

## Exercice 1 (Série Harmonique)

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

L'objectif de la première partie est de montrer que  $H_n$  est proche de  $\ln(n)$  lorsque  $n$  devient grand en proposant une approche numérique de calcul d'intégrale.

L'objectif de la seconde partie est d'étudier le comportement de  $H_n$  lorsque  $n$  devient grand : il s'agit de trouver les premiers termes du développement asymptotique de  $H_n$ .

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

### Partie A

On rappelle que la **partie entière** d'un nombre réel  $x$ , notée  $[x]$ , est l'**entier**  $n \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$n \leq x < n + 1.$$

On considère la fonction  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , et la fonction  $g : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  (constante par morceaux) définie par  $g(x) = \frac{1}{[x]}$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ .

- 1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $g(x) = \frac{1}{k}$  pour  $k \leq x < k + 1$ .
- 2) Représenter les fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[1, 6]$ .
- 3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $I_n = \int_1^n f(x) dx$  et  $J_n = \int_1^n g(x) dx$ . Montrer que  $0 \leq I_n \leq J_n$ .
- 4) Montrer que  $J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$ .

5) Montrer que  $J_n = H_{n-1}$ .

### Partie B

8) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour  $k \geq 2$ ,

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

et que pour  $k \geq 1$ ,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

9) En déduire que  $\forall n \geq 1$  :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

10) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ .

11) Montrer que  $H_n$  est équivalent en  $+\infty$  à  $\ln(n)$ .

12) Pour  $n \geq 1$  un entier, on note

$$U_n = H_n - \ln(n)$$

et

$$V_n = U_{n+1} - U_n.$$

Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$V_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

13) Montrer que pour  $n$  suffisamment grand, on a :

$$V_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

14) Déterminer la nature de la série de terme général  $V_n$ .

15) En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite, notée  $\gamma$ .

16) En déduire les premiers termes du développement asymptotique de  $H_n$ .

## Exercice 2 (D'après Centrale)

### Notations

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à  $n$  toute fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

où, pour tout  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ . On note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note  $\mathcal{C}_{2\pi}^0$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{C}_{2\pi}^1$  le sous-espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$   $2\pi$ -périodiques. Pour  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $h > 0$ , on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

On rappelle deux résultats :

- Le théorème des bornes atteintes : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- L'inégalité des accroissements finis : Soit  $a < b$  deux réels. Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , telle qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  vérifiant  $m \leq f' \leq M$ , alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

## Partie A – Préliminaires

- 1) a) Montrer que, pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\sin(s) - \sin(t)| \leq |s - t|$ .  
b) En déduire que, si  $g$  est la fonction sinus, alors, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq h$ .
- 2) a) Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .  
i) Montrer que  $\|g\|_\infty$  existe, c'est-à-dire que la borne supérieure est un réel.  
ii) Montrer que, pour tous  $s, t \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ ,  $\omega_g(h)$  est un réel bien défini.  
On pourra considérer l'ensemble  $\mathcal{E}_h = \{|g(s) - g(t)| \mid |s - t| \leq h\}$ .  
b) On suppose que  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ . Montrer que, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq h \|g'\|_\infty$ . En déduire que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .  
On admet que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$  est vrai pour tout  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .
- 3) Soit  $h$  et  $h'$  deux réels strictement positifs et soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ .  
a) Montrer que, si  $h \leq h'$ , alors  $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$ .  
b) En posant  $u = \frac{h}{h+h'}s + \frac{h'}{h+h'}t$ , montrer que  $\omega_g(h+h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$ .  
c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 et pour tout réel  $\lambda$  strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1+\lambda)\omega_g(h).$$

- 4) Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ . À l'aide de  $G$ , une primitive de  $g$ , montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

On pourra exprimer les intégrales à l'aide de  $G$ .

- 5) Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $p \in \mathcal{T}_n$ , on note  $\Delta(p)$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que  $\Delta$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{T}_n$ , c'est-à-dire que  $\Delta$  est linéaire et à valeur dans  $\mathcal{T}_n$ .

## Partie B –

### I – La fonction $J_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $\varphi_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  en posant, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

6) Montrer que pour tout réel  $t$  n'appartenant pas à  $2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4.$$

7) Montrer que  $\varphi_n^2$  appartient à  $\mathcal{T}_n$ , puis que  $f_n$  appartient à  $\mathcal{T}_{2n}$ . Montrer que  $f_n$  est paire.

8) Montrer qu'il existe un réel strictement positif  $c_n$  tel que  $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose désormais  $J_n = c_n f_n$ , de sorte que  $J_n$  est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

## II – Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

9) En étudiant la parité des fonctions concernées, montrer que  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}$ .

10) Montrer que pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$ .

11) a) Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} t \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4$ .

On admettra que l'on peut alors étudier et manipuler l'intégrale  $\int_0^{\pi} t \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4 dt$  comme si la fonction  $t \mapsto t \left( \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4$  était définie en  $t = 0$ .

b) En déduire  $\int_0^{\pi} t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$ .

12) De même, en déduire également que  $\int_0^{\pi} f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$ .

13) On admet que  $u_n = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$  a une limite non nulle, ainsi que  $v_n = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$ .

Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}$ .

## III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $T_n g$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t) dt.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques telle que  $\|T_n g - g\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

14) Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt.$$

En déduire que  $|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt$ .

15) *Le cas  $\mathcal{C}^1$* . On suppose, seulement dans cette question, que  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ .

a) En commençant par majorer  $|T_n g(x) - g(x)|$  (où  $x \in \mathbb{R}$  quelconque), montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq \frac{a \|g'\|_\infty}{n+1},$$

où le réel  $a$  a été défini à la question 13

b) Conclure que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques telle que  $\|T_n g - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

16) *Le cas  $\mathcal{C}^0$* . Dans cette question, on ne suppose plus que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On rappelle le résultat admis à la question 2 :  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous réels  $t$  et  $x$ ,

$$|g(x-t) - g(x)| \leq (1+n|t|) \omega_g(1/n).$$

b) En déduire qu'il existe  $b > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n).$$

c) Conclure que  $\|T_n g - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**FIN DE L'ÉPREUVE**