

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1

A. Intégrales de Wallis *cette partie est extrêmement classique, donc à connaître.*

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) **a)** $\boxed{W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.
Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).
Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

b) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t) \,\mathrm{d}t \\
&= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \Big(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\Big) \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t) \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1) W_{n-2} - (n-1) W_n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

c) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison 1 et de premier terme $u_1 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est constante de valeur } \frac{\pi}{2}.}$

2) **a)** Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$
Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n} W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k > 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ \dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

b) D'après la question précédente, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$. Ainsi,

$$\boxed{W_n \sim W_{n-1}}$$

Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

c) D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2nW_n}$ ($W_n \neq 0$) et l'équivalent précédent s'écrit :

$$W_n \sim \frac{\pi}{2nW_n}$$

Donc, $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

B. Formule de Stirling

1) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \frac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}}e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e$$

Donc $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e}$

b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)$, d'après 1)a)

$$v_n = \ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} e\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$$

Finalement : $\boxed{v_n = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1}$

Comme on ne précise pas la formule à obtenir, du moment que vous avez simplifié les factorielles et un peu débroussaillé le reste, ça va. Le but est de faciliter l'obtention du DL à la question suivante.

c) Le développement de $\ln(1-u)$ en 0 est $\ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$.

Un peu de tactique : si on vous le demande à l'ordre 3, c'est sans doute qu'il sert à l'ordre 3. Et non 2.

d) Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right) + 1 \\
&= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + 1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= -\frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}$

e) D'après la question précédente, $|v_n| \sim \dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par équivalent, la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ est convergente}}$

f) La série $\sum v_n$ est télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (\ln u_k - \ln u_{k-1}) = \ln u_n - \ln u_1 = (\ln u_n) - 1$.

Or cette série converge, donc $\boxed{(\ln u_n)_n \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}}$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\text{la suite } u_n = e^{\ln(u_n)} \text{ converge donc aussi}}$, et sa limite est $K = e^{\ell} > 0$.

Comme $K > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = K$ peut s'écrire $u_n \sim K$, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K$$

La compatibilité des équivalent avec le produit nous donne

$$\boxed{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

2) **a)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(p) : \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie : $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} = W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} && \text{(d'après 1)c))}\\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

D'après 1)d), pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$. Ainsi

$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) D'après B.1)e),

$$p! \sim Kp^p e^{-p}\sqrt{p} \qquad \text{et} \qquad (2p)! \sim K2p^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}$$

Donc d'après B.2)a)

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(2^p K p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{K}{K^2} \times \frac{2^{2p}}{2^{2p}} \times \frac{p^{2p+1/2}}{p^{2p+1}} \times \frac{e^{-2p}}{e^{-2p}} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

c) D'après B.2)b), $W_{2p} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. De plus, d'après A.2)b), $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

Donc, par transitivité, $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et ainsi $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$

En conclusion,

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Stirling. *Elle est à votre programme : le résultat est du cours.*

Exercice 2

1) Continuité, dérivabilité :

La fonction g est continue et dérivable sur $]0,1]$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]$.

En 0, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = g(0)$, donc g est continue en 0.

De plus $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

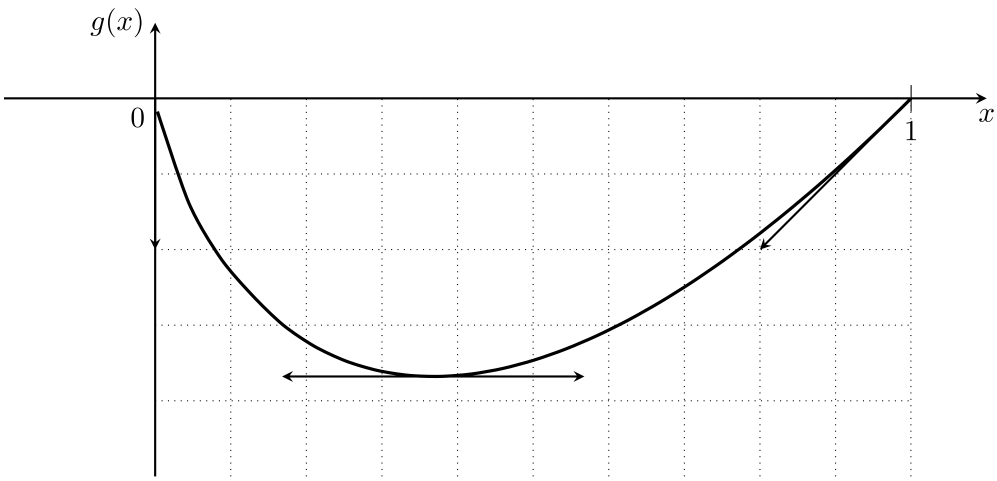
En conclusion, $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur } [0,1], \text{ dérivable sur }]0,1] \text{ mais pas en } 0.}$

De plus, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une tangente verticale en 0.

Variations : Pour tout $x \in]0,1]$, $g'(x) = (\ln x) + 1$.

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	1
g	0	↘	$-e^{-1}$	↗	0

Pour vérifier vos calculs, par exemple le signe de la dérivée : tester quelques valeurs, par exemple ici $x = 1$ (qui sert pour tracer la courbe, en plus).



2) D'après le tableau de variation précédent, $\inf\limits_{x\in[0,1]} g(x) = -e^{-1}$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} g(x) = 0$.

Donc $\boxed{M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)| \text{ existe et } M = \max\left(\left|\inf\limits_{x\in[0,1]} g(x)\right|, \left|\sup\limits_{x\in[0,1]} g(x)\right|\right) = e^{-1}}$

Si on ne nous demandais pas la valeur du maximum, nous aurions pu nous contenter d'appliquer le théorème « $|g|$ continue sur le segment $[0,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes ».

3) Comme g est décroissante sur $[0, e^{-1}]$, $-g$ est croissante sur cet intervalle.
Montrons que, sur $]0, e^{-1}]$, $x \leqslant -g(x)$:
Soit $h(x) = x + g(x)$, h est dérivable sur $]0, 1]$ d'après 1) et $h'(x) = 1 + g'(x) = 2 + \ln x$. D'où le tableau

- $\lim\limits_{0^+} h = 0$
- $h(e^{-1}) = 0$

x	0		e^{-2}		e^{-1}
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	1
h	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc $\forall x \in]0, e^{-1}]$, $h(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant -g(x)$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$: D'après ci-dessus, $x \leqslant -g(x)$ sur $]0, e^{-1}]$ donc en particulier pour t_0. Ainsi $t_0 \leqslant -g(t_0) = t_1$.
De plus, d'après le tableau de variation de g, $\forall x \in [0, 1]$, $-g(x) \leqslant e^{-1}$. Donc $t_1 \leqslant e^{-1}$.
Finalement : $t_0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant e^{-1}$, et $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie : $t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$

$$\begin{array}{lll} \Longrightarrow & -g(t_0) \leqslant -g(t_n) \leqslant -g(t_{n+1}) \leqslant -g(e^{-1}) & \text{(en appliquant } -g\text{, croissante sur }]0, e^{-1}]) \\ \Longrightarrow & t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} & \\ \Longrightarrow & t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} & (\mathcal{H}_0) \end{array}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}}$

4) La fonction g' est dérivable sur $I = [t_0, e^{-1}] \subset \mathbb{R}_+^*$, et $g''(x) = \dfrac{1}{x}$. Cette fonction vérifie l'encadrement

$$\forall u \in I \qquad 0 < g''(u) \leqslant \frac{1}{t_0}$$

Soit $x \in [t_0, e^{-1}]$ fixé. En intégrant cet encadrement entre x et e^{-1} ($x \leqslant e^{-1}$), il vient

$$0 \leqslant \int_x^{e^{-1}} g''(u)\,\mathrm{d}u = g'(e^{-1}) - g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)$$

Or $g'(e^{-1}) = 0$ donc

$$\boxed{0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)}$$

Puis en intégrant de nouveau entre x et e^{-1}

$$0 \leqslant -g(e^{-1}) + g(x) = \int_x^{e^{-1}} -g'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{e^{-1}} \frac{1}{t_0}(e^{-1} - t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_0}\left[\frac{(e^{-1} - t)^2}{2}\right]_x^{e^{-1}} = \frac{(e^{-1} - x)^2}{2t_0}$$

Donc, en prenant des valeurs absolues :

$$\boxed{|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 3), $t_n \in I = [t_0, e^{-1}]$. Donc, d'après 4), avec $x = t_n$,

$$|-t_{n+1} + e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est immédiate.
- $\underline{\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après ci-dessus,

$$|t_{n+1} - e^{-1}| \leqslant \frac{(t_n - e^{-1})^2}{2t_0}$$

Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$|t_{n+1} - e^{-1}| \leqslant \frac{1}{2t_0}\left(2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}\right)^2 = \frac{(2t_0)^2}{2t_0}\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n \times 2} = 2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^{n+1}}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}}$

6) Comme $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$, $|t_0 - e^{-1}| \leqslant \frac{2}{3}e^{-1} \leqslant e^{-1} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n} = 0$.

D'après 5), par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} |t_n - e^{-1}|$ existe et égal 0.

En conclusion $\boxed{\text{La suite } (t_n)_n \text{ converge vers } e^{-1}}$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer par différentes méthodes que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les parties sont indépendantes.

Partie 1

1) Sous forme factorisée, P s'écrit

$$P = a_n(X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} X - \alpha_k$$

En développant le produit, les termes de degré $n-1$ sont de la forme $\alpha_k X^{n-1}$, avec $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, il vient

$$\boxed{\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

Comme $\deg P = n$, $a_n \neq 0$.

2) **a)** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$e^{i(2p+1)\varphi} = (e^{i\varphi})^{2p+1} = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^{2p+1} = \sum_{q=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} i^q \sin^q(\varphi)\cos^{2p+1-q}(\varphi)$$

Ainsi, $\sin((2p+1)\varphi) = \Im(e^{i(2p+1)\varphi}) = \Im\left(\sum_{q=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} i^q \sin^q(\varphi)\cos^{2p+1-q}(\varphi)\right)$.

On ne garde que les $q = 2k+1$ impairs, donc k varie entre 0 et p et il vient

$$\boxed{\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi)}$$

b) Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \neq 0[\pi]$, on a $\sin(\varphi) \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}
\sin((2p+1)\varphi) &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi) \\
&= \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \left(\frac{\sin^{2k+1}(\varphi)}{\sin^{2p+1}(\varphi)}\right) \\
&= \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\frac{\cos^{2p-2k}(\varphi)}{\sin^{2p-2k}(\varphi)}\right) \\
\sin((2p+1)\varphi) &= \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2(\varphi)\right)^{p-k}
\end{aligned}$$

3) **a)** On remplace γ_k par son expression, et d'après 2)b) ($k\pi/(2p+1) \neq 0[\pi]$) il vient

$$\begin{aligned}
P(\gamma_k) &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \gamma_k^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{p-k} \\
&= \frac{\sin\left((2p+1)\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout entier } k \in \{1, \dots, p\},\ P(\gamma_k) = 0.}$

b) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$,

$$0 < \frac{\pi}{2p+1} \leqslant \frac{k\pi}{2p+1} \leqslant \frac{p\pi}{2p+1} < \frac{p\pi}{2p} = \frac{\pi}{2}$$

Ce n'est pas une question de limites ici, mais d'inégalité (vraies pour tout k et tout p, et pas seulement lorsque $p \to +\infty$).

On vient de montrer que les γ_k sont des racines de P. Il reste donc à prouver qu'ils sont distincts. La fonction cotan est strictement décroissante de $]0, \pi/2[$ sur $]0, +\infty[$, donc cotan^2 est strictement décroissante de $]0, \pi/2[$ sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, vu que les $k\pi/(2p+1) \in]0, \pi/2[$ sont tous distincts, leurs images γ_k par cotan^2 sont aussi toutes distinctes (la fonction est injective). De plus, il y en a p, et le polynôme P est de degré p, donc il ne peut pas y avoir d'autres racines.

Donc $\boxed{\text{le polynôme } P \text{ possède } p \text{ racines distinctes, } \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}.}$

c) D'après, 1), $\sigma_1 = \gamma_1 + \cdots + \gamma_p = -\dfrac{a_{p-1}}{a_p}$. D'où en remplaçant

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = -\frac{(-1)^1\binom{2p+1}{3}}{(-1)^0\binom{2p+1}{1}} = \frac{\frac{(2p+1)(2p)(2p-1)}{3!}}{2p+1} = \frac{p(2p-1)}{3}$$

Et en utilisant $1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^{p}\left(1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right) \\
&= p + \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}
\end{aligned}$$

4) **a)** Pour tout $\varphi \in]0, \pi/2[$,

$$\begin{aligned}
0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi &\implies 0 < \frac{1}{\tan\varphi} < \frac{1}{\varphi} < \frac{1}{\sin\varphi} \\
&\implies 0 < \frac{1}{\tan^2\varphi} < \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\sin^2\varphi}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, puisque $\gamma_k \in]0, \pi/2[$, il vient

$$\frac{1}{\tan^2\gamma_k} < \frac{1}{\gamma_k^2} < \frac{1}{\sin^2\gamma_k}$$

En sommant sur k et en remplaçant avec les expression de 3)c), l'encadrement précédent s'écrit

$$\frac{p(2p-1)}{3} = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

b) En divisant par $\dfrac{(2p+1)^2}{\pi^2} > 0$ l'encadrement précédent, il vient

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

Par encadrement, on trouve donc $\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

Partie 2 (CNM TSI 2017)

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. *Les intégrales de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ se calculent par intégration par parties, en dérivant jusqu'à ce que mort du polynôme P s'en suive.*

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}\left(\left[\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)(-\frac{\cos(kx)}{k})\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2\pi}\underbrace{[\sin(kx)/k]_0^\pi}_{=0} \\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

2) *Il faut savoir adapter les questions de cours, vérifier les hypothèses...* Soit $x \in]0,\pi]$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k \\ &= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \qquad\qquad \text{(car } x\neq 0\text{, donc } e^{ix}\neq 1) \\ &= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}(e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}})} \\ &= e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Donc, par linéarité de la partie réelle,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \Re\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}}$$

3) Cf. exercice.

4) **a)** Prenons un équivalent de g en 0^+ :

$$\frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin(x/2)} \sim \frac{-x}{2\frac{x}{2}} = -1$$

Donc g est continue en 0. De plus, g est continue sur $[0,\pi]$ comme composée de fonctions continues. En conclusion,

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0,\pi]}$$

b) Pour tout $x\in]0,\pi]$, g est $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonction $\mathscr{C}^1$, et

$$g'(x) = \frac{(\frac{x}{\pi}-1)(2\sin(x/2)) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)\cos(x/2)}{(2\sin(x/2))^2}$$

<u>Étude en 0</u> : Utilisons le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. *(Avec les DL, il ne vous arrivera jamais de mésaventure. À condition d'être soigneux : le dernier $o(x)$ de la première ligne est fondamental.)*

Cherchons la limite de g' en 0^+ :

$$\begin{aligned}(\frac{x}{\pi}-1)(2\sin(\frac{x}{2})) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)\cos(\frac{x}{2}) &= (\frac{x}{\pi}-1)2(\frac{x}{2}+o(x)) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)(1+o(x)) \\ &= -x + x^2/\pi - x^2/(2\pi) - x + o(x^2) \\ &= x^2/(2\pi) + o(x^2) \\ &\sim x^2/(2\pi)\end{aligned}$$

Or $(2\sin(x/2))^2 \sim x^2$, donc $g(x) \sim \dfrac{x^2/(2\pi)}{x^2} = \dfrac{1}{2\pi}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ existe et est finie, donc, comme g est continue sur $[0,\pi]$, **d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$**,

$$\boxed{g \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$$

5) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 1),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \cos(kx)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\, \mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\, \mathrm{d}x \qquad \text{(d'après 2)} \\
&= = \int_0^{\pi} 2\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2) g(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

De plus, $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, donc

$$2\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2) = \sin((2n+1)x/2) + \sin(-x/2)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \int_0^{\pi} (\sin((2n+1)x/2) - \sin(x/2)) g(x)\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2\pi} - x\, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^2}{2\pi} - x\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \mathrm{d}x}$$

L'idée est toujours la même : souvent, on ne voit pas a priori *pourquoi on obtient ce résultat. Il faut se laisser porter par les questions du sujet – où a-t-on calculé $\sum \frac{1}{k^2}$? On cherche toujours un stylo à la main, et non les yeux dans le vague.*

b) D'après 4)b), g est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Donc d'après 3), avec $m = (2n+1)/2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\psi = g$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \mathrm{d}x = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE