
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Étude d'un endomorphisme matriciel

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$. En particulier, on remarque qu'en notant O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice d'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{O_n} est l'application nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A .

Partie I - Généralités

- Q1.** Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Q2.** Montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
- Q3.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dédurre de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. **Indication :** si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

- Q4.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.
- Q5.** Déterminer la matrice de φ_A dans la base $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Q6.** En déduire les valeurs propres de φ_A , puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.
- Q7.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A .

- Q8.** Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.
- Q9.** En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.
- Q10.** Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Q11. On note χ_A le polynôme caractéristique de A . Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A , puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

Q12. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ .

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A , l'application Ψ qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n -uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

Q13. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A .

EXERCICE 2

Les polynômes de Hermite

Présentation générale

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H'_n.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

Partie I - Préliminaires

Les deux sous-parties suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

I.1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur \mathbb{R} .

Q15. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

Q16. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$

Q17. Justifier que u est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner une expression de sa dérivée.

Q18. Justifier que v est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner une expression de sa dérivée.

Q19. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur \mathbb{R} , puis que sa valeur est $\frac{\pi}{4}$.

Q20. En déduire que la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est $\sqrt{\pi}$.

Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie dans la présentation générale de l'exercice.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Q21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n .

Q22. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$.

On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie I.1.

Q23. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Montrer pour tout entier $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$ que :

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt.$$

Q24. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille (H_0, \dots, H_d) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q25. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p .

Partie III - Série génératrice exponentielle des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on considère un nombre $x \in \mathbb{R}$.

III.1 - Expression de la série génératrice

L'objectif de cette première sous-partie est de démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ de la variable complexe z admet un rayon de convergence infini et on calcule sa somme.

Q26. Donner les développements en série entière des fonctions $z \mapsto \exp(2xz)$ et $z \mapsto \exp(-z^2)$ sur \mathbb{C} en précisant leur rayon de convergence respectif.

Q27. Montrer qu'il existe une suite de nombres complexes $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ ait un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(-(x-z)^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

En considérant la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ introduite dans la **partie II**, on déduit du résultat de la question ci-dessus que l'on a l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Q28. En utilisant la relation ci-dessus et la question **Q22**, en déduire que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

III.2 - Expression intégrale des polynômes de Hermite

Dans cette seconde sous-partie, on exploite les résultats de la sous-partie précédente afin d'établir une expression intégrale pour les polynômes de Hermite.

On considère un entier $p \in \mathbb{N}$ et la fonction $G_x : z \mapsto \exp(2xz - z^2)$. On définit également pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $g_n : \theta \mapsto \frac{H_n(x)}{n!} e^{i(n-p)\theta}$.

Q29. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Q30. Montrer que :

$$H_p(x) = \frac{p!}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_x(e^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta.$$

EXERCICE 3

Succession de tirages dans une urne

Présentation générale

On fixe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

1. si la boule tirée est de couleur blanche lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k boules blanches supplémentaires ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par B_n l'évènement « la boule tirée lors du n -ième tirage est blanche » et on note :

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n.$$

L'objectif principal de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que la probabilité de l'évènement E soit nulle.

On considère également la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k.$$

On rappelle que si A et C sont deux évènements avec $P(C) > 0$, on note $P(A | C)$ ou $P_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C .

Partie I - Probabilité de l'évènement E

Dans cette partie, on considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q31. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente, puis justifier que $P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Q32. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^k B_i$ est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de S_k juste avant d'effectuer le $(k+1)$ -ième tirage. En déduire la probabilité $P\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right)$.

Q33. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}}.$$

Partie II - Caractérisation de la propriété $P(E) = 0$

- Q34.** Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Q35.** Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1}\right)$ et $\sum \frac{1}{S_k}$ sont de même nature.
- Q36.** Montrer que $P(E) = 0$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{S_k}$ est divergente.
- Q37.** Dans cette question, on suppose que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(E)$.
- Q38.** Proposer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $P(E) \neq 0$ en justifiant votre réponse.

FIN

**PC****CONCOURS COMMUN INP****RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES**

1/ PRESENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices entièrement indépendants. Le premier portait sur l'étude des propriétés d'un endomorphisme défini par multiplication matricielle. Le deuxième introduisait la famille des polynômes de Hilbert, dont plusieurs propriétés étaient ensuite établies. Enfin, le troisième exercice analysait une suite de tirages aléatoires dans une urne dont la composition évoluait au cours du temps.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

2/ COMMENTAIRES GENERAUX SUR LES COPIES

L'ensemble des correcteurs a constaté une augmentation significative de la proportion de copies dont la présentation et le soin ne sont pas satisfaisants : rappelons que ces aspects participent à l'évaluation de la production du candidat. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie particulièrement difficile. Par ailleurs, bien que l'usage d'un effaceur soit interdit, cela n'empêche pas les candidats de corriger proprement leurs erreurs. Il est également recommandé de soigner la mise en page : aérer les réponses, éviter les abréviations et mettre en valeur les résultats afin d'en faciliter la lecture.

En outre, un nombre préoccupant de copies présentent des réponses dénuées d'explications ou de justifications. Une épreuve de mathématiques ne vise pas uniquement à évaluer les compétences calculatoires : elle exige aussi une présentation claire et rigoureuse du raisonnement. Lorsqu'un candidat souhaite invoquer un résultat du cours, il doit le citer explicitement et vérifier attentivement que toutes ses hypothèses sont réunies. De plus, il est important de choisir une présentation structurée (sous forme de liste par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

Par ailleurs, une part importante des candidats utilise implicitement des résultats établis dans les questions précédentes sans les mentionner, ce qui nuit à la clarté de leurs raisonnements. Rappelons que si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en rappelant clairement le numéro

de la question concernée. Les candidats doivent également faire attention à introduire correctement les objets et les notations qu'ils utilisent pendant leur raisonnement.

Enfin, de nombreuses questions étaient simplement des questions de cours ou d'application directe de celui-ci. La réussite modérée de ces dernières semble indiquer un manque de travail de fond chez beaucoup de candidats.

3/ REMARQUES DETAILLEES PAR QUESTION

Exercice 1 (Étude d'un endomorphisme matriciel) :

Q1 – Question globalement bien traitée.

Q2 – Il s'agissait de démontrer l'égalité entre deux applications, ce qui a souvent posé des difficultés de rédaction.

Q3 – De nombreux candidats se contentent de montrer l'injectivité ou la surjectivité de l'application linéaire sans expliquer ou justifier pourquoi cela suffit dans le cadre de cette question.

Q4 – Il ne suffit pas d'énoncer la bonne caractérisation : une démonstration rigoureuse est indispensable. Par ailleurs, certains candidats confondent les notions de matrice diagonalisable et de matrice inversible. Il convient de rappeler que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé à racines simples, alors la matrice est diagonalisable, mais la réciproque est fautive.

Q5 – Les réponses à cette question sont souvent fantaisistes, alors que la matrice d'un endomorphisme en dimension finie est une notion centrale du programme.

Q6 – Question généralement bien traitée par les candidats ayant réussi la question précédente.

Q7 – Bien que la réponse donnée soit fréquemment correcte, elle n'est que trop rarement accompagnée d'une justification suffisante.

Q8 – Il ne faut pas bâcler la rédaction de la récurrence. Attention à bien initialiser la récurrence à l'indice $k=0$.

Q9 – Il s'agissait de démontrer l'égalité entre deux applications, ce qui a souvent posé des difficultés de rédaction.

Q10 – La méconnaissance du cours est rédhibitoire pour répondre à cette question.

Q11 – Même constat que pour la question précédente.

Q12 – Question globalement bien traitée.

Q13 – Beaucoup de candidats qui ont essayé de traiter cette question ont oublié de tenir compte des multiplicités des valeurs propres.

Exercice 2 (Les polynômes de Hermite) :

Q14 – Peu de candidats pensent à mentionner la continuité par morceaux de la fonction intégrée, alors qu'il s'agit de la première chose à faire.

Q15 – En cas d'utilisation des règles de comparaison, on ne peut pas se contenter de faire une étude de la convergence de l'intégrale à une seule de ses deux bornes.

Q16 – La propriété « définie positive » est souvent mal démontrée. Rappelons que si l'intégrale d'une fonction est nulle, il faut mentionner la continuité et la positivité de cette dernière pour en déduire qu'elle est nulle.

Q17 – Beaucoup de candidats tentent d'appliquer maladroitement le théorème de dérivation pour une intégrale à paramètre, alors qu'il s'agissait principalement de mentionner le théorème fondamental de l'intégration.

Q18 – L'hypothèse de domination dans le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre est fréquemment mal vérifiée.

Q19 – Question globalement bien traitée. Cependant, certains candidats divisent par x sans se soucier que cette quantité pourrait être nulle.

Q20 – Le cheminement du raisonnement est souvent correct, mais il manque de rigueur. Par exemple, il faut justifier proprement que v est de limite nulle en l'infini.

Q21 – Il ne faut pas bâcler la rédaction de la récurrence. Attention à bien initialiser la récurrence à l'indice $n=0$. Il faut justifier soigneusement le raisonnement dans l'hérédité.

Q22 – Il ne faut pas bâcler la rédaction de la récurrence. Attention à bien initialiser la récurrence à l'indice $n=0$.

Q23 – Question peu abordée.

Q24 – Question traitée de manière satisfaisante par une bonne part des candidats.

Q25 – Une part importante des candidats a su exploiter le résultat de la question 23, mais a commis des erreurs dans le calcul de la dérivée p -ième du polynôme H_p .

Q26 – Question globalement bien traitée. Il est inutile de recourir à des raisonnements complexes pour déterminer les rayons de convergence.

Q27 – Certains candidats ont remplacé z par $x-z$ dans le développement établi précédemment, ce qui ne permet pas d'aboutir.

Q28 – Question peu abordée.

Q29 – Certains candidats écrivent des inégalités entre nombres complexes, ce qui n'a aucun sens. Très peu de candidats ont su gérer correctement les valeurs absolues sur $H_n(x)$ lors de l'étude de la convergence normale de la série de fonctions.

Q30 – Il est indispensable de s'appuyer sur un théorème du cours et d'en vérifier les hypothèses pour pouvoir intervertir l'intégrale et la somme.

Exercice 3 (Succession de tirages dans une urne) :

Q31 – Beaucoup de candidats utilisent des raisonnements inutilement complexes, parfois erronés, pour justifier la décroissance de la suite. Il convient de s'appuyer sur un résultat du cours pour établir la dernière égalité demandée.

Q32 – Question globalement bien traitée.

Q33 – Il est nécessaire de s'appuyer sur un résultat du cours pour obtenir la formule demandée.

Q34 – Se contenter d'indiquer que la série de terme général u_k diverge grossièrement n'est pas suffisant pour prouver le résultat demandé.

Q35 – Pour utiliser les règles de comparaison, il ne faut pas oublier de préciser que les séries considérées sont à termes positifs (ou de signe constant).

Q36 – Il est nécessaire de mentionner que la série est à termes positifs afin de justifier que sa divergence équivaut à ce que sa suite des sommes partielles diverge vers l'infini.

Q37 – Question globalement bien traitée.

Q38 – Beaucoup d'exemples donnés sont corrects, mais encore faut-il en fournir une démonstration rigoureuse.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Racine cubique d'une matrice

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A .

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A .

Q1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Q2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D .

Q3. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D . Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.

Q4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D , puis l'ensemble des racines cubiques de A . On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ .

Partie II - Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe \mathcal{B} . On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Q5. Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est M ?

Q6. En déduire une racine cubique de la matrice M .

Q7. Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant -1 . Montrer que N admet une racine cubique.

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres **deux à deux distinctes** de la matrice A .

III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

Q8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

Q9. Dédurre de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

III.2 - Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k).$$

Q10. Montrer que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont non nuls.

Q11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.

Q12. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur \mathbb{C} .

Q13. Dédurre des questions précédentes que si B est une racine cubique de A , alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2

La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) la fonction f est de classe C^1 ,
- (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,
- (iii) la fonction f' est croissante,
- (iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Q14. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Q15. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.$$

Q16. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

Q17. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions **Q18** et **Q19** sont indépendantes.

Q18. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

Q19. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p), \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}.$$

Q20. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.

Q21. Conclure que $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Q22. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

Q23. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

Q24. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

EXERCICE 3

Temps d'attente avant une collision

Présentation générale

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées par les entiers de 1 à n . On procède à une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour tirer pour la seconde fois une boule déjà tirée auparavant.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère la variable aléatoire T_n définie de la façon suivante :

$$T_n = \min \{ j \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket \mid \exists i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, X_i = X_j \}.$$

Par exemple, si on suppose que $n = 4$ et que l'évènement :

$$(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 2) \cap (X_4 = 3) \cap (X_5 = 4)$$

est réalisé, alors on a $T_n = 4$, car c'est au quatrième tirage que pour la première fois réapparaît un résultat déjà obtenu.

L'objectif de cet exercice est de déterminer un équivalent de l'espérance de la variable aléatoire T_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie I - Une expression de l'espérance de T_n

Q25. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire T_n .

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et la variable aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_k)$.

Q26. Justifier que Z suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^k$.

Q27. Dans cette question, on considère l'évènement :

$$A = \{(a_1, \dots, a_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid \text{les éléments } a_1, \dots, a_k \text{ sont deux à deux distincts}\}.$$

Exprimer le cardinal de A en fonction de n et de k , puis en déduire que :

$$P(T_n > k) = P(Z \in A) = \frac{n!}{(n-k)! n^k}.$$

On remarque que le résultat de la question précédente est encore valable pour $k = 0$.

Q28. Justifier que la variable aléatoire T_n est d'espérance finie et que l'on a :

$$E(T_n) = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)! n^\ell}.$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Dans cette partie, on détermine une expression de l'espérance de T_n sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt.$$

Q29. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale I_k est convergente.

Q30. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_k = k!$.

Q31. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ converge, puis que :

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt.$$

Partie III - Un équivalent de l'espérance

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question **Q31** lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt.$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

III.1 - Étude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Q32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un changement de variable, établir que :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv.$$

Q33. Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité $1 + x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q34. En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

III.2 - Étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on définit la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall u \in]0, +\infty[, \quad f_n(u) = \begin{cases} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} & \text{si } u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } u \geq \sqrt{n}. \end{cases}$$

Q35. Montrer que :

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du.$$

Q36. Montrer que pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a l'égalité :

$$\ln(f_n(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Q37. En déduire que pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a les inégalités :

$$\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}}, \quad \ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{6}.$$

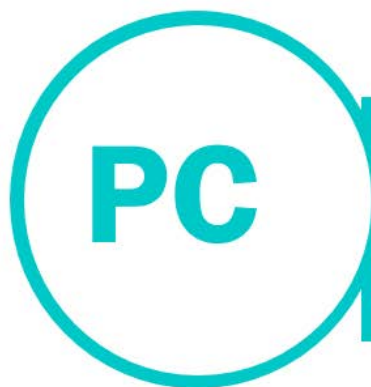
Q38. Justifier que la fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis établir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(u) du \right) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

III.3 - Conclusion

Q39. En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, déterminer un équivalent de $E(T_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

FIN



CONCOURS COMMUN INP RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice introduisait la notion de racine cubique d'une matrice et étudiait quelques-unes de ses propriétés. Le second exercice permettait de démontrer une caractérisation du logarithme de la fonction gamma d'Euler, puis de l'exploiter pour établir la formule de duplication. Le troisième exercice concernait l'étude du temps d'attente avant une collision lors d'une succession de tirages avec remises dans une urne.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions. Les résultats obtenus sont cependant assez décevants dans l'ensemble.

2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

Comme durant la session précédente, les correcteurs ont remarqué une amélioration dans la qualité de la présentation des copies, notamment lors de l'utilisation de théorèmes nécessitant la vérification de nombreuses hypothèses.

Par contre, une part trop importante des candidats utilise implicitement les questions précédentes d'un exercice sans les citer, ce qui nuit à la clarté de leurs raisonnements. Rappelons que si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question. Les candidats doivent également faire attention à introduire correctement les objets et les notations qu'ils utilisent pendant leur raisonnement.

Rappelons également que l'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il doit le citer et vérifier soigneusement toutes ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

Nous avons constaté une fois de plus qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas l'énoncé et les questions assez consciencieusement : certains d'entre eux restent bloqués en ayant raté une information dans l'énoncé ; d'autres oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a été traité de manière pertinente par une majorité de candidats. Les difficultés rencontrées par ces derniers se situaient principalement dans la partie II à cause d'une mauvaise maîtrise des connaissances du cours et dans la partie III.2 par manque d'aisance dans la manipulation des outils algébriques.

L'exercice 2 a mis en évidence les lacunes des candidats sur des notions fondamentales au programme d'analyse de la filière (telles que, par exemple, développements limités, étude de la convergence d'une série, etc.). Ainsi, la proportion des candidats capables de traiter convenablement les trois premières questions de cet exercice est très faible.

L'exercice 3 a principalement posé des difficultés aux candidats dans la première partie portant sur les probabilités. Rappelons que la rigueur et le respect du formalisme sont indispensables lors de la résolution des problèmes de probabilité.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Exercice 1 (Racine cubique d'une matrice) :

Q1. Question globalement bien traitée. Quelques candidats confondent la notion de matrice diagonalisable et la notion de matrice inversible.

Q2. Une part importante de candidats ne considère qu'une implication, alors qu'il s'agissait de prouver une équivalence.

Q3. Question globalement bien traitée.

Q4. La rédaction des candidats manque souvent de rigueur. Peu d'entre eux justifient les différentes étapes du raisonnement et ne citent pas les résultats des questions précédentes.

Q5. Beaucoup de réponses ne sont pas suffisamment précises.

Q6. Question globalement bien traitée par les candidats ayant réussi la question précédente.

Q7. Le cours n'est pas suffisamment maîtrisé.

Q8. Question globalement bien traitée. Quelques candidats ont traité différents cas en fonction du signe de λ , ce qui était inutile.

Q9. Malgré les indications très détaillées, les réponses à cette question sont souvent décevantes et peu rigoureuses.

Q10. Question globalement bien traitée.

Q11. Très peu de candidats pensent à mentionner que ρ n'est pas nul pour conclure que les trois solutions sont bien distinctes.

Q12. Une part importante de candidats affirment de manière erronée qu'un produit de polynômes scindés à racines simples est encore scindé à racines simples.

Q13. Le cours n'est pas suffisamment maîtrisé. Beaucoup de candidats affirment que Q est le polynôme caractéristique de A ou de B , ce qui est faux en général.

Exercice 2 (La fonction logarithme de Gamma) :

Q14. Bien qu'il s'agisse d'une question basique dans le programme de la filière, une majorité des candidats n'a pas été capable de donner un raisonnement rigoureux pour justifier la convergence de la série.

Q15. Une part importante de candidats n'a pas lu correctement la question : ils ont essayé d'appliquer le théorème de dérivabilité pour la limite d'une suite de fonctions, ce qui est hors sujet. De même, la suite dont il fallait prouver l'existence ne devait pas dépendre de la variable x .

Q16. Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à gérer correctement les valeurs absolues.

Q17. Très peu de candidats ont réussi à faire apparaître les sommes télescopiques permettant de montrer rigoureusement que la fonction vérifiait le point (ii).

Q18. Question globalement bien traitée.

Q19. Question globalement bien traitée.

Q20. Question difficile qui a souvent amené des solutions erronées.

Q21. Une part importante de candidats a déduit directement de la question précédente que la fonction h est constante, ce qui n'est pas un résultat immédiat.

Q22. La relation à démontrer étant notée dans l'énoncé, il faut faire attention à présenter une démonstration complète sans étape floue.

Q23. La plupart des candidats connaissent la formule de Stirling, mais ils l'exploitent de manière non rigoureuse pour aboutir au résultat.

Q24. Question globalement bien traitée par les candidats ayant compris le lien avec les questions précédentes.

Exercice 3 (Temps d'attente avant une collision) :

Q25. Peu de candidats ont donné la bonne réponse, alors qu'il s'agissait essentiellement de lire correctement l'énoncé.

Q26. La plupart des candidats se contentent de paraphraser l'énoncé, ce qui n'est pas suffisant : il faut donner l'image de Z et calculer la distribution de probabilités.

Q27. Peu de candidats fournissent une solution convaincante à cette question.

Q28. La formule nécessaire pour répondre à cette question (directement issue du cours) est rarement connue des candidats.

Q29. Question globalement bien traitée. Attention à ne pas oublier de préciser sur quel intervalle la fonction est continue.

Q30. Il est indispensable de rédiger entièrement la récurrence pour que la réponse donnée soit rigoureuse. De plus, pour appliquer le théorème d'intégration par parties, il faut commencer par vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration.

Q31. Peu de candidats pensent à utiliser la linéarité de l'intégrale pour faire le lien avec les questions précédentes.

Q32. Question globalement bien traitée.

Q33. Question globalement bien traitée.

Q34. Le lien entre K_n et J_n est rarement fait. Pour conclure, il ne faut pas oublier de préciser que la raison de la suite géométrique se trouve dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Q35. Question globalement bien traitée.

Q36. Il ne faut pas oublier de vérifier que l'on utilise le développement en série entière adéquat en un point de l'intervalle de convergence.

Q37. Question peu abordée par les candidats.

Q38. Question peu abordée par les candidats.

Q39. Question peu abordée par les candidats.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .

Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

Q3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M .

Q5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de \mathbb{N}^* . Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points x_0, \dots, x_n par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que x_0, \dots, x_n sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.

Q9. Dédurre de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.

Q10. Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

Q11. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. En utilisant **Q9**, en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

EXERCICE 2

Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin la série n°1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

$$\begin{array}{l}
 \text{Exemple 1 : } \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n°3}} \cap F_8 \cap \dots \\
 \text{Exemple 2 : } \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n°3}} .
 \end{array}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n°1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n°1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q14. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k .$$

Q15. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q16. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.

Q17. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q18. En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

Q19. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q20. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .

Q21. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

Q22. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ les relations :

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap P_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap F_n).$$

Q23. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m P(N_m = k)x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

Q24. Dédire de **Q23** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

Q25. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q26. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

Q27. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .

EXERCICE 3

La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n).$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

Q28. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.

Q29. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$ est convergente.

Q30. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans **Q30**, on a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

Q31. Soit $t \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geq n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

Q32. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$.

Q34. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u) du.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q35. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Q36. Dédire des résultats de la sous-partie II.1 que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

Q37. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Q38. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + nJ_n.$$

Q39. Dédire des questions précédentes que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

FIN



CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ PRESENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice s'intéressait à la réduction d'un endomorphisme défini à partir d'une division euclidienne de polynômes. Le second exercice étudiait les séries apparaissant lors d'une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Le troisième exercice permettait d'établir une expression classique de la constante d'Euler sous la forme d'une intégrale.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

2/ COMMENTAIRES GENERAUX SUR LES COPIES

L'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement toutes ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question. Les candidats doivent également faire attention à introduire correctement les objets et les notations qu'ils utilisent pendant leur raisonnement. De plus, ils ne doivent pas confondre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Nous avons constaté qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas les questions assez consciencieusement : il arrive souvent qu'ils oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a principalement posé des difficultés aux candidats dans la dernière partie. Les correcteurs ont notamment remarqué que de nombreux candidats semblent penser que l'on peut évaluer une égalité polynomiale seulement sur une partie de la relation. Il s'est avéré que de nombreux candidats n'ont pas réussi à résoudre la question correspondante, car ils n'arrivaient pas à justifier que $B(x_i) = 0$ alors que cette information est donnée dans l'énoncé.

L'exercice 2 a été traité de manière pertinente par une part importante de candidats. Cependant, nous tenons à rappeler que la rigueur et le formalisme ne sont pas facultatifs en probabilité. Il ne faut pas confondre un événement avec sa probabilité, les calculs doivent être justifiés soigneusement en mentionnant l'incompatibilité ou l'indépendance des événements lorsqu'elles sont nécessaires et il faut citer les théorèmes utilisés en vérifiant leurs hypothèses. En particulier, pour utiliser la formule des probabilités totales, il est nécessaire de citer un système complet d'événements.

Finalement, l'exercice 3 a mis en évidence les faiblesses des candidats sur la manipulation des outils basiques de l'analyse. De nombreux candidats n'utilisent pas correctement les limites, les équivalents et les inégalités et principalement les différents liens entre ces notions. De plus, le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées n'est presque jamais correctement rédigé. Il faut mentionner la régularité des fonctions utilisées et vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration. Finalement, il faut mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu pour pouvoir écrire la relation d'égalité.

3/ REMARQUES DETAILLEES PAR QUESTION

Exercice 1 (Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes) :

Q1 – Question globalement bien traitée.

Q2 – Presque aucun candidat ne donne les précisions nécessaires sur le degré du reste permettant d'établir rigoureusement que l'application étudiée est linéaire.

Q3 – Question globalement bien traitée. Cependant, certains candidats se contentent quasiment de recopier la réponse donnée dans l'énoncé, ce qui n'est pas suffisant. Il faut détailler un minimum les calculs pour convaincre le correcteur que le candidat sait réellement traiter la question.

Q4 – Certains candidats ne justifient pas leurs réponses : ils les donnent sans aucun détail, laissant supposer qu'ils ont simplement utilisé la calculatrice. Les candidats pourraient penser à vérifier leurs calculs en utilisant par exemple la trace de la matrice. La détermination des sous-espaces propres est souvent entachée d'erreurs de logique.

Q5 – Lorsque l'on souhaite utiliser le critère avec la multiplicité des valeurs propres, il ne faut pas oublier de mentionner que le polynôme caractéristique est scindé.

Q6 – Question globalement bien traitée.

Q7 – Certains candidats ne semblent pas savoir qu'une matrice diagonale est diagonalisable. La plupart des candidats mentionnent que la matrice admet une unique valeur propre, mais ils ont des difficultés pour conclure.

Q8 – Question globalement bien traitée.

Q9 – Il est important de préciser le degré du polynôme D pour conclure et de rappeler que les nombres x_0, \dots, x_n sont deux à deux distincts.

Q10 – Question globalement bien traitée, même si beaucoup de candidats ne pensent pas à utiliser directement que la famille est génératrice avec un argument de cardinalité.

Q11 – Une part importante de candidats a utilisé des raisonnements sans aucun sens en évaluant partiellement une relation polynomiale ou en cherchant à justifier avec le degré des polynômes en jeu. Beaucoup de candidats ne remarquent pas que $B(x_i) = 0$, alors que c'est une hypothèse donnée dans l'énoncé.

Q12 – Question peu abordée.

Q13 – Beaucoup de candidats mentionnent que les nombres $A(x_0), \dots, A(x_n)$ sont deux à deux distincts, ce qui n'est pas le cas en général.

Exercice 2 (Étude de séries de pile ou de face) :

Q14 – Beaucoup de candidats ne lisent pas la question entièrement et oublient de donner la somme de la série entière.

Q15 – Peu de candidats ont pensé à justifier, même succinctement, que l'on peut dériver terme à terme la somme de la série.

Q16 – De nombreux candidats distinguent le cas d'une série de piles ou d'une série de faces, sans écrire un symbole entre ces deux cas.

Q17 – Beaucoup de candidats ne pensent pas à mentionner l'incompatibilité et l'indépendance des événements en jeu.

Q18 – De nombreux candidats se contentent de prendre la limite du résultat précédent, ce qui est insuffisant pour aboutir à la réponse correcte rigoureusement.

Q19 – Une part importante de candidats ne mentionnent pas la convergence absolue de la série définissant l'espérance, mais uniquement la convergence.

Q20 – Certains candidats se contentent de donner des valeurs numériques sans aucune explication, ce qui n'est pas satisfaisant. Il faut penser à préciser l'ensemble des valeurs prises par chacune des variables aléatoires.

Q21 – Question globalement bien traitée. Quelques maladroresses de notations.

Q22 – La relation entre les événements est globalement bien expliquée. L'indépendance est souvent évoquée de manière floue pour obtenir la relation entre les probabilités.

Q23 – Une part importante de candidats utilisent à tort l'indépendance entre les événements ($N_n = k$) et P_n et s'en sortent avec des simplifications fausses pour conclure.

Q24 – La gestion des termes au bord est souvent non expliquée.

Q25 – Beaucoup d'erreurs sur l'exposant.

Q26 – Question globalement bien traitée.

Q27 – Question peu abordée.

Exercice 3 (La constante d'Euler) :

Q28 – De nombreux candidats additionnent des équivalents.

Q29 – Il ne faut pas oublier de mentionner le signe du terme général de la série pour utiliser une règle de comparaison.

Q30 – Question globalement bien traitée par les candidats connaissant leur cours.

Q31 – Cette question a posé beaucoup de difficulté, notamment à cause des différents quantificateurs présents dans l'assertion à démontrer.

Q32 – Beaucoup de candidats utilisent une composition maladroite d'un équivalent et de la fonction exponentielle.

Q33 – Beaucoup d'étudiants ne remarquent pas qu'il y a deux cas à distinguer. Pour utiliser l'inégalité rappelée dans l'énoncé, il faut vérifier que la quantité à laquelle on l'applique se trouve bien dans l'intervalle de validité de l'inégalité.

Q34 – Il ne faut pas oublier de mentionner la continuité de la fonction.

Q35 – Il faut bien lire la question : beaucoup de candidats utilisent à tort le théorème de convergence dominée dans cette question.

Q36 – Question globalement bien traitée.

2022

Q37 – Presque aucun candidat ne rédige correctement le théorème d'intégration par parties en vérifiant préalablement ses hypothèses et en écrivant la relation entre les intégrales seulement une fois que l'on est assuré que les intégrales en jeu convergent.

Q38 – Il serait souhaitable de mentionner, même succinctement, les hypothèses du théorème du changement de variable.

Q39 – Question globalement bien traitée.

4/ UTILISATION DE LA CALCULATRICE À PARTIR DE LA SESSION 2023

Nous vous informons que les calculatrices seront interdites pour l'épreuve écrite de mathématiques, à partir de la session 2023.

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC**

MATHÉMATIQUES**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

- Q1.** Déterminer la loi de X_1 .
- Q2.** Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .
- Q3.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- Q4.** Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
- Q5.** À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

- Q6.** Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ avec les évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i) \ell \notin \{k-1, k\}, \quad (ii) \ell = k-1, \quad (iii) \ell = k.$$

Q10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

Q11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

EXERCICE 2

Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (\text{P})$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q12. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$.

Q13. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

Q14. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Q15. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

Q16. Montrer que si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q17. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ du problème (P).

Q18. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Q19. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+ .

Q20. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q21. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q22. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

Q23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

Q24. En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt.$$

EXERCICE 3

Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^T la transposée de la matrice M et par $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice M .

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_k(x) = \frac{1}{2} \left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right).$$

On admet que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Q25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q27. Dédurre des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2 - Majoration de l'erreur

Q28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right).$$

Q29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}.$$

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on dit que B est une racine carrée de A .

Q30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geq 0$.

Q31. Étudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

Q32. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Q33. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S .

Partie III - Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

On note \mathcal{D}_n^+ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère également la partie C_P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$C_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^+\}.$$

Q34. Vérifier que $I_n \in C_P$. Montrer que si $M \in C_P$, alors M est une matrice inversible et on a :

$$\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in C_P.$$

La question précédente implique que l'on peut définir la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C_P par :

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_k = \frac{1}{2} (U_{k-1} + S U_{k-1}^{-1}).$$

On considère également la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $V_k = P^{-1} U_k P$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q35. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer V_k en fonction de D et V_{k-1} . En déduire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

où f_k est la fonction définie dans la partie **I** de cet exercice.

On considère l'application $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(B) = \sqrt{\text{Tr}(BB^T)}.$$

On admet que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q36. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$.

Q37. En déduire à l'aide de la question **Q29** que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité :

$$N(R - U_k) \leq \frac{\text{Tr}(S) + n}{2^k}.$$

Q38. Conclure que la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers R .

FIN

**PC****CONCOURS COMMUN INP**
RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES**1/ PRÉSENTATION DU SUJET**

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était basé sur le problème classique des urnes de Pólya. Le second exercice permettait de déterminer l'unique solution d'une équation fonctionnelle sous la forme d'une somme de série de fonctions, puis d'établir certaines de ses propriétés. Le troisième exercice étudiait la généralisation au cas des matrices symétriques positives de la méthode de Héron.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

L'ensemble des correcteurs a constaté une portion plus élevée qu'habituellement de copies relativement faibles. Cette remarque statistique s'explique certainement par les difficultés rencontrées par les candidats durant cette année scolaire perturbée par la situation sanitaire.

L'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement toutes ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question.

Nous avons constaté qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas les questions assez consciencieusement : il arrive souvent qu'ils oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a principalement posé des difficultés de compréhension sur le déroulé de l'expérience aléatoire étudiée. Une part importante de candidats s'est trompée sur le nombre de boules présentes dans l'urne à un instant donné, ce qui rendait difficile le traitement correct de cet exercice.

L'exercice 2 a été traité de manière satisfaisante par une part importante des candidats. Il a donné l'occasion aux étudiants sérieux de se mettre en valeur en appliquant directement des résultats et des méthodes du cours dans de nombreuses questions.

Finalement, l'exercice 3 a mis en évidence les faiblesses des candidats sur la manipulation des inégalités. Lorsque les solutions proposées étaient justes, elles étaient souvent complexes et mal rédigées, ce qui rendait difficile leur évaluation.

Pour terminer, voici quelques remarques générales sur des erreurs récurrentes :

- La rigueur et le formalisme ne sont pas facultatifs en probabilité. Il ne faut pas confondre un évènement avec sa probabilité. De plus, pour utiliser la formule des probabilités totales, il est nécessaire de citer un système complet d'évènements.
- Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées permet de montrer que deux intégrales sont de même nature, mais il ne permet pas d'écrire une égalité tant que l'on ne s'est pas assuré qu'une des deux intégrales en jeu converge.
- Les candidats doivent faire attention à la manipulation des inégalités. Les correcteurs ont observé beaucoup d'erreurs, notamment dans l'exercice 3.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Exercice 1 (Les urnes de Pólya) :

Q1 – La réponse est souvent correcte, mais la justification est souvent absente.

Q2 – Les premières erreurs dans la compréhension de l'énoncé se manifestent dans cette question. Certains candidats utilisent des notations dénuées de sens, comme $P(X_2|X_1)$. Peu de candidats précisent le système complet d'évènements utilisé.

Q3 – Il faut être précis dans le vocabulaire employé pour décrire ce que représente S_n . Les expressions « à l'issue » et « pendant » n'ont pas le même sens.

Q4 – Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à compter le nombre de boules dans l'urne, ce qui ne leur a pas permis de répondre correctement à cette question.

Q5 – Il faut mentionner le théorème des probabilités totales et citer le système complet d'évènements utilisé.

Q6 – Beaucoup de candidats ont mal formulé leur hypothèse de récurrence.

Q7 – Un certain nombre de candidats a additionné les évènements, ce qui n'a aucun sens.

Q8 – Une part importante de candidats suppose que les évènements $(X_k = 0)$ sont indépendants pour effectuer leur calcul, ce qui n'est pas le cas.

Q9 – Peu de candidats ont réussi à dominer correctement la fonction.

Q10 – Les évènements $(S_n = k)$ et $(S_n = k-1)$ ne forment pas un système complet d'évènements.

Q11 – Question globalement bien traitée. Néanmoins, il faut faire attention à traiter séparément les deux cas particuliers $k = 1$ et $k = n+1$.

Exercice 2 (Résolution d'une équation fonctionnelle) :

Q12 – Question globalement bien traitée.

Q13 – Question globalement bien traitée. Il faut néanmoins faire attention à rester rigoureux dans la manipulation des sommes infinies en n'utilisant pas des points de suspension.

Q14 – Question globalement bien traitée. Cependant, quelques candidats ont confondu la décroissance de $f_n(x)$ par rapport à n et celle par rapport à x pour vérifier les hypothèses du théorème spécial des séries alternées.

Q15 – Une part non négligeable de candidats permute la somme et la limite sans aucune justification pour aboutir au résultat demandé, ce qui n'est pas licite en général. La plupart des autres candidats ne font pas attention au premier terme de la somme dans la rédaction de leur démonstration.

Q16 – Question globalement bien traitée. Néanmoins certains candidats s'autorisent à ne pas rédiger une démonstration complète : ils ont été pénalisés.

Q17 – Question souvent mal traitée. La majorité des candidats ne voient pas le lien avec les questions précédentes.

Q18 – Beaucoup de confusions entre la convergence simple et la convergence uniforme.

Q19 – De nombreux candidats déduisent de la question précédente que la série de fonctions converge uniformément sur tout l'intervalle de définition de la fonction, ce qui n'est pas le cas. De plus, les hypothèses pour appliquer le théorème de continuité sont rarement toutes citées et vérifiées.

Q20 – Commentaires analogues à ceux de la question précédente.

Q21 – Pour appliquer le théorème spécial des séries alternées, il est nécessaire de vérifier au moins succinctement ses hypothèses, ce que peu de candidats font.

Q22 – L'inégalité est globalement bien traitée. L'équivalent donné par les candidats pour la fonction étudiée est souvent correct, mais il est rarement établi de manière rigoureuse.

Q23 – La justification de l'intégrabilité est presque toujours fautive. Pour utiliser le théorème d'intégration par parties, il est nécessaire de commencer par vérifier toutes ses hypothèses.

Q24 – Souvent non traitée ou mal traitée. Très peu de candidats identifient la somme, encore moins le théorème d'interversion série-intégrale sur un intervalle.

Exercice 3 (Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron) :

Q25 - Il faut mentionner que $f_k(x)$ est positif pour conclure.

Q26 - La démonstration proposée est souvent laborieuse, mais la plupart des candidats arrivent à prouver le résultat souhaité.

Q27 - Une part écrasante des candidats pense que le minorant trouvé pour la suite est automatiquement sa limite sans aucune justification.

Q28 - Question globalement bien traitée.

Q29 - L'initialisation est souvent mal vérifiée.

Q30 - Question globalement bien traitée.

Q31 - La plupart des étudiants aboutit au système à résoudre, mais sa résolution est souvent erronée.

Q32 - Il est fondamental de préciser que la matrice est à coefficients réels pour utiliser le théorème spectral.

Q33 - La démonstration que R est une matrice symétrique est souvent fautive. Des candidats ne mentionnent pas que la matrice P est orthogonale ou ne connaissent pas les propriétés de la transposition.

Q34 - Les deux premiers points sont globalement bien traités. La démonstration du troisième point manque souvent de rigueur.

Q35 - Question globalement bien traitée.

Q36 - Les calculs sont souvent difficiles à suivre. Il faut mentionner que deux matrices semblables ont la même trace ou une autre propriété analogue.

Q37 - Question très peu abordée.

Q38 - Les rares candidats qui ont abordé cette question l'ont globalement bien traitée.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Lundi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x, t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

- Q1.** Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Q2.** En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

- Q3.** Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x, t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

- Q4.** Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
- Q5.** Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

- Q6.** En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x, t) dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Q7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0, 1]$.

Q8. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt.$$

Q9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0, 1]$.

Q10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I .

EXERCICE 2

Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geq 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de \mathbb{R}^n .

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et on considère l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n . On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si } i = j \\ \frac{a_{i,j}}{2} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

- Q11.** Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2 .
- Q12.** En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2 .
- Q13.** Justifier que f est de classe C^1 et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B'_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de \mathbb{R}^2 .
- Q14.** En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1 .
- Q15.** Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2 .

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.

On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.

Q17. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On fixe une matrice **orthogonale** $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q18. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.

Q19. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$.

Q20. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Q21. Dans le cas où $\lambda_1 \geq 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n .

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geq 3$ et que l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j.$$

Q22. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

EXERCICE 3

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur \mathbb{Z}

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'évènement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide. Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q23. Que représente la variable aléatoire S_n ?

Q24. Calculer p_0 , p_1 et p_2 .

Q25. Justifier que si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Q26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q27. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n .

Q28. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Dédurre de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q29. Montrer que $R_p \geq 1$.

Q30. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

Q31. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q32. Calculer q_1 et q_2 .

Q33. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

Q34. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q35. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

Q36. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q37. En utilisant **Q33** et **Q35**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

Q38. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

FIN

PC

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était centré sur un calcul de l'intégrale de Dirichlet en utilisant une intégrale à paramètre. Le second exercice permettait d'établir un lien entre les extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée de \mathbf{R}^n et les valeurs propres d'une matrice symétrique associée à cette forme quadratique. Le troisième exercice concernait l'étude du temps de retour à l'origine d'une marche aléatoire sur \mathbf{Z} .

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

La dernière question du sujet aurait pu gagner en clarté si elle avait été formulée différemment : pour les candidats ayant abordé cette question, il a été tenu compte de cette difficulté dans la notation.

2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

L'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question.

Les candidats doivent faire attention à rester dans le cadre du programme officiel de mathématiques de la filière PC. Par exemple, la notion de compacité ou la règle de d'Alembert pour les séries entières sont utilisées par certains candidats, alors que ces deux notions ne sont pas au programme. De même, l'espace vectoriel L^1 ou les coefficients binomiaux généralisés n'en font pas partie.

Nous avons constaté qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas les questions assez consciencieusement : il arrive souvent qu'ils oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur

n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a été traité de manière satisfaisante par une part importante des candidats. Ce grand classique a donné l'occasion aux étudiants sérieux de se mettre en valeur en appliquant directement des résultats et des méthodes du cours dans de nombreuses questions.

A contrario, les notes des candidats à l'exercice 2 sont relativement faibles. La raison principale est qu'une majorité de candidats semble avoir considéré qu'il n'était pas nécessaire de connaître les résultats et les méthodes élémentaires du cours sur les fonctions de plusieurs variables. De plus, il est très inquiétant de constater que peu de candidats sont capables de déterminer rigoureusement le minimum et le maximum de la fonction d'une variable introduite dans la question 12.

Finalement, l'exercice 3 est globalement bien réussi par les candidats, à l'exception des deux dernières questions qui étaient plus difficiles.

Pour terminer, voici quelques remarques générales sur des erreurs récurrentes :

- le théorème d'intégration par parties permet de montrer que deux intégrales sont de même nature, mais il ne permet pas d'écrire une égalité tant que l'on ne s'est pas assuré de la convergence d'une des deux intégrales en jeu ;
- les candidats doivent faire attention à la manipulation des inégalités. Les correcteurs ont observé beaucoup d'erreurs, notamment lorsque les expressions comportaient des fonctions trigonométriques ou des valeurs absolues ;
- dans les théorèmes sur les intégrales à paramètre, la fonction dominante ne doit dépendre que de la variable d'intégration (et pas du paramètre) ;
- il n'est pas suffisant de majorer une fonction pour en déduire qu'elle admet un maximum ;
- attention à ne pas confondre un événement avec sa probabilité ;
- la somme d'une suite de probabilité (p_n) n'est pas égale à 1 en général.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Exercice 1 (Calcul de l'intégrale de Dirichlet) :

Q1 - Il s'agit de la première question de l'exercice : les candidats doivent être très soigneux dans la rédaction de leur solution. Une majorité de candidats oublie de préciser que la fonction f est continue par rapport à la variable t sur l'intervalle ouvert d'intégration.

Q2 - Pour utiliser le théorème d'intégration par parties, il est nécessaire de commencer par vérifier ses hypothèses (régularité des fonctions considérées et limites de leur produit). De plus, l'application du théorème ne permet pas d'écrire directement une égalité entre deux intégrales, mais d'assurer qu'elles sont de même nature. De nombreux candidats rédigent maladroitement le calcul des limites en mélangeant l'utilisation des développements limités et des équivalents.

Q3 - Peu de candidats pensent à justifier que la fonction est dérivable. La notation $u'(x,t)$ n'est pas claire : il faut utiliser une notation usuelle pour une dérivée partielle.

Q4 - Pour déduire la limite à partir de l'inégalité, il faut justifier un minimum, en citant par exemple le théorème d'encadrement.

Q5 - Il faut être précis sur les quantificateurs dans les différentes hypothèses du théorème de dérivation. Nous rappelons que la fonction dominante ne doit pas dépendre du paramètre.

Q6 - Certains candidats ont calculé directement $F'(x)$ sans utiliser le résultat de la question 3. On ne peut pas utiliser la valeur de F en 0 pour déterminer l'expression explicite de $F(x)$. De même, on ne peut pas choisir arbitrairement la valeur de la constante comme le suggère certains candidats.

Q7 - Question globalement bien traitée. Le problème le plus fréquent est une erreur dans l'hypothèse de

Q8 - Pour l'intégrabilité, de nombreux candidats ont donné un argument qui n'était pas valable dans le cas où $x = 0$. Certains candidats n'utilisent pas l'inégalité triangulaire mais majorent dans les valeurs absolues, ce qui n'est pas correct en général.

Q9 - Peu de candidats ont réussi à dominer correctement la fonction.

Q10 - Pour en déduire la valeur de $F(0)$, il ne suffit pas d'évaluer en 0 : il faut utiliser la limite de la fonction F en 0^+ .

Exercice 2 (Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée) :

Q11 - Une majorité de candidats ne connaît pas son cours. Beaucoup se contentent de montrer que la fonction f est bornée, ce qui n'est pas suffisant. Pour justifier que f est continue, on peut invoquer son caractère polynomial.

Q12 - Très peu de candidats ont été capables de déterminer rigoureusement le minimum et le maximum de l'application. En général, il ne suffit pas d'étudier les valeurs de la fonction aux points où la dérivée s'annule.

Q13 - Il n'est pas suffisant d'indiquer que f est de classe C^1 par rapport à chacune de ses variables pour en déduire qu'elle est de classe C^1 . Peu de candidats se souvenaient de la définition d'un point critique.

Q14 - Très peu de candidat ont réussi correctement cette question, bien que la méthode de résolution figure explicitement au programme.

Q15 - Une part non négligeable de candidat n'a pas réussi à écrire la matrice M_f à cause d'une mauvaise compréhension de l'énoncé.

Q16 - Comme il était difficile de rédiger une solution propre à cette question, les correcteurs ont valorisé les tentatives sérieuses de résolution.

Q17 - Il est fondamental de préciser que la matrice est à coefficients réels pour utiliser le théorème spectral.

Q18 - Question globalement bien traitée.

Q19 - Beaucoup de candidats n'ont pas pensé à calculer explicitement la quantité $Y^T D Y$ pour pouvoir l'encadrer.

Q20 - Il ne suffit pas d'indiquer que f atteint ses bornes pour déduire le résultat à partir de la question précédente.

Q21 - Question peu abordée sérieusement.

Q22 - Les rares candidats qui ont abordé cette question l'ont globalement bien traitée.

Exercice 3 (Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur Z) :

Q23 - Question globalement bien traitée. Cependant, certains candidats ont utilisé des expressions maladroites comme « distance parcourue ».

Q24 - La plupart des candidats a donné les bonnes probabilités. Cependant, une part importante n'a pas mené rigoureusement le calcul de p_2 en utilisant notamment l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 .

Q25 - Question globalement bien traitée, même si certains candidats ont eu des difficultés à rédiger leur solution.

Q26 - Certains candidats semblent penser que X_k suit une loi de Bernoulli, ce qui n'est pas le cas. Il ne faut pas oublier de justifier que Y_k ne prend que les valeurs 0 et 1.

Q27 - Attention à ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance mutuelle pour les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n . Certains candidats ont exprimé Z_n en fonction de S_n , ce qui ne répondait pas à la seconde partie de la question (qui demandait d'exprimer S_n en fonction de Z_n).

Q28 - Question globalement bien traitée.

Q29 - Certains candidats essaient d'appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières : cette dernière n'étant pas au programme, elle ne peut pas rapporter de points. De plus, lorsque l'on utilise la

règle de d'Alembert pour les séries numériques, il ne faut pas s'arrêter après avoir calculé la limite du quotient : il faut ajouter une phrase de conclusion pour faire le lien avec le rayon de convergence. Finalement, de nombreux candidats ont indiqué que la somme des p_n est égale à 1, ce qui est faux.

Q30 - Question globalement bien traitée.

Q31 - Question globalement bien traitée.

Q32 - La plupart des candidats a donné les bonnes probabilités, mais leur justification manque souvent de rigueur.

Q33 - La plupart des candidats pense à majorer le terme général de la série par q_n . Cependant, il ne suffit pas d'indiquer que q_n est une probabilité pour justifier que la série de terme général q_n est convergente. De plus, une partie des candidats a utilisé le fait que la somme des q_n est égale à 1, ce que l'on ne peut pas savoir à ce stade de l'exercice.

Q34 - Pour appliquer le théorème relatif au produit de Cauchy, il faut commencer par vérifier ses hypothèses. Beaucoup de candidats ont eu des difficultés à gérer le terme d'indice 0 dans la somme.

Q35 - Il est surprenant que certains candidats déterminent une expression de $g(x)$ sans avoir trouvé l'expression de $f(x)$ auparavant. Les correcteurs ont observé de nombreuses erreurs de signes dans le développement en série entière de la fonction g .

Q36 - Certains candidats utilisent l'expression « par identification » qui n'est pas satisfaisante : il est préférable de citer l'unicité du développement en série entière. De plus, il faut ensuite faire attention à distinguer les indices pairs et les indices impairs.

Q37 - Les rares candidats qui ont abordé cette question ont trouvé la bonne valeur pour la probabilité avec un raisonnement erroné, mais ils ont correctement interprété le résultat.

Q38 - Question très peu abordée.

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC**

MATHÉMATIQUES**Lundi 29 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- Q1.** Justifier que l'intégrale définissant $(P | Q)$ est convergente.
Q2. Montrer que l'application $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

- Q3.** Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

- Q4.** Conclure que $(X^k | 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

- Q5.** Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Q8.** Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
- Q9.** En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
- Q10.** Justifier que P_k est de degré k .
- Q11.** Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille (P_0, \dots, P_n)

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

- Q12.** Montrer que $(\alpha(P) | Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.
- Q13.** En déduire que $(\alpha(P) | Q) = (P | \alpha(Q))$.
- Q14.** Montrer que (P_0, \dots, P_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note x_1, \dots, x_n .

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

- Q15.** Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie (*) si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

- Q16.** En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (*).
- Q17.** Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

EXERCICE 2

Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- Q18.** Justifier que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.
- Q19.** Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

- Q20.** Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Q21.** En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

- Q22.** Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur]0, 1[ou]1, +∞[

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y(x).$$

Q23. Justifier que z est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle I , puis exprimer z' et z'' avec y , y' et y'' .

Q24. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

Q25. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

Q26. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .

Partie III - Solutions de (E) sur]0, +∞[

Q27. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 3

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(A_n), \quad q_n = P(B_n), \quad r_n = P(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

- Q28.** Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Q29.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.
- Q30.** En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Q31.** Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \bar{A}_n \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

- Q32.** Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et le nombre $E(X_1 + \dots + X_n)$.
- Q33.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Q34.** En déduire une expression de a_n .

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

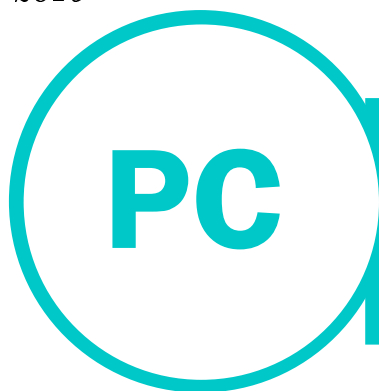
- Q35.** Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.
- Q36.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer \bar{B}_n en fonction de A_n et C_n .
- Q37.** Établir que $P(B_3 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}P(\bar{B}_2 \cap \bar{B}_1)$, puis en déduire que $P(B_3 | \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^n \bar{B}_k\right) = \frac{1}{4}.$$

- Q38.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$?
- Q39.** Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

FIN



CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ REMARQUES GÉNÉRALES

1.1- PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet est composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était centré sur l'étude des polynômes de Laguerre définis comme les vecteurs propres unitaires d'un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}_n[X]$. Le second exercice avait pour but de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre en commençant par déterminer les solutions développables en série entière. Le troisième exercice concernait l'étude d'une marche aléatoire sur un triangle.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices et la progressivité de la difficulté des questions permettaient aux candidats de commencer le sujet avec les parties du programme qu'ils maîtrisaient le mieux. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

1.2- PROBLÈMES CONSTATÉS PAR LES CORRECTEURS

L'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un théorème du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement ses hypothèses. Il ne faut pas négliger la rédaction des raisonnements par récurrence : une majorité de candidats se contente d'indiquer que le raisonnement est trivial.

Les candidats doivent faire attention à maîtriser le vocabulaire mathématique utilisé. Par exemple, les correcteurs ont pu lire dans les copies les expressions « la dimension du polynôme » ou « le rayon de convergence est $]-R, R[$ » qui n'ont aucun sens rigoureux.

Les correcteurs souhaitent signaler que certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, nous recommandons aux élèves d'éviter au maximum les ratures dans leurs copies et de mettre en valeur leurs résultats.

Ajoutons quelques remarques précises sur des erreurs importantes constatées par les correcteurs :

- Il est nécessaire de justifier soigneusement la convergence des intégrales manipulées dans l'exercice 1 avant de les utiliser dans les différents calculs.
- Un espace vectoriel réel de dimension 1 ne contient pas qu'un vecteur non nul, mais une infinité de vecteurs. Certains candidats semblent avoir confondu cardinal et dimension.
- De nombreux candidats ne semblaient pas à l'aise avec les propriétés de bases sur les séries entières.
- Une partie des candidats semble ignorer qu'un produit de fonctions de classe C^2 est une fonction de classe C^2 .

64 Un temps d'attente ne suit pas nécessairement une loi géométrique.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Exercice 1 (Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss) :

- Q1.** La rédaction de la convergence est souvent partielle. Une majorité de candidats oublie de préciser le domaine de continuité de la fonction ou de passer par la convergence absolue pour utiliser les règles de comparaison.
- Q2.** L'argument de continuité pour le caractère défini est souvent oublié.
- Q3.** Avant de réaliser le calcul amené par l'intégration par partie, il faut citer les hypothèses du théorème (régularité des fonctions et limites du produit) et justifier la convergence des intégrales.
- Q4.** La récurrence n'est souvent pas rédigée.
- Q5.** Un polynôme de $R_n[X]$ n'est pas nécessairement de degré n .
- Q6.** Question bien traitée en général.
- Q7.** Certains candidats pensent qu'une matrice triangulaire est diagonalisable.
- Q8.** Question bien traitée en général.
- Q9.** La compréhension et la rédaction pour cette question ont souvent été très mauvaises. De nombreux candidats confondent la dimension et le cardinal.
- Q10.** Question peu abordée.
- Q11.** Question bien traitée en général.
- Q12.** Question assez bien traitée en général. Quelques candidats se sont égarés dans les calculs.
- Q13.** Question bien traitée en général.
- Q14.** La solution proposée est souvent incomplète : une partie des candidats justifie que la famille est orthogonale, mais pas qu'elle est une base.
- Q15.** Cette question a posé de nombreuses difficultés. L'équivalence est souvent oubliée et les quantificateurs mal maîtrisés.
- Q16.** Peu de candidats ont reconnu la matrice de Vandermonde.
- Q17.** Question très peu abordée.

Exercice 2 (Étude d'une équation différentielle) :

- Q18.** Le cours sur les séries entières n'est pas maîtrisé par une partie non négligeable des candidats. Plusieurs candidats ont indiqué qu'une série entière converge normalement sur son intervalle ouvert de convergence, ce qui est faux.
- Q19.** Question bien traitée en général.
- Q20.** L'unicité du développement en série entière est rarement citée.
- Q21.** Question bien traitée en général mais peu de candidat ont justifié que $r \geq 1$.
- Q22.** Question bien traitée en général.
- Q23.** Certains candidats semblent ignorer qu'un produit de fonctions de classe C^2 est une fonction de classe C^2 .
- Q24.** Il faut faire attention à la rédaction dans cette question pour bien démontrer une équivalence.
- Q25.** La résolution de l'équation différentielle est souvent bien menée, mais la rédaction pourrait être fortement améliorée. Certains candidats se contentent de vérifier que l'expression donnée dans l'énoncé est correcte, ce qui n'est pas suffisant.
- Q26.** Question bien traitée en général. Certains candidats ont oublié la constante d'intégration.
- Q27.** Question peu abordée.

Exercice 3 (Étude d'une marche aléatoire) :

- Q28.** Question très bien traitée en général.
- Q29.** Peu de candidats indiquent que (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'évènements et utilisent la formule des probabilités totales. Les correcteurs ont lu plusieurs copies utilisant un raisonnement par récurrence, ce qui n'était pas approprié dans cette question.
- Q30.** Globalement bien traitée. Certains candidats ont oublié que M^n était donné dans l'énoncé.
- Q31.** L'interprétation est parfois très maladroite. Une expression de la forme « après une infinité de déplacements » n'a pas de sens.

Q32. De nombreux candidats ont omis de préciser « entre l'étape 1 et l'étape n ».

Q33. Question bien traitée en général.

Q34. La simplification explicite de la somme n'a que rarement été effectuée.

Q35. Les réponses trouvées sont souvent justes, mais les différentes étapes de calculs devraient être plus justifiées.

Q36. Quelques confusions entre évènements et probabilités. Additionner deux évènements n'a pas de sens.

Q37. La plupart des candidats se contentent d'une explication intuitive à la place d'un calcul justifié.

Q38. La formule des probabilités composées n'est presque jamais citée.

Q39. Question peu abordée.

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC**

MATHÉMATIQUES**Lundi 30 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est constitué d'un seul problème en six parties.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLÈME

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n -ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n .

Partie I - Quelques résultats généraux

Q1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

Q2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n .

Q3. Montrer que la famille (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n , en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X - 1)^{n-1}(X + 1)^{n-1}(X - \alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1) \cdots (X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1) \cdots (X-\beta_{k+1}).$$

Q6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note x_1, \dots, x_n , en convenant que $x_1 < \dots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = a_n A_n$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Q7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions **Q8** à **Q13**, n désigne un entier naturel.

Q8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ .

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ . Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi_n(P) = \phi(P)$.

Q9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, m_{k,k} = k(k+1)$.

Q10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question Q9.*

Q11. Vérifier que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

Q12. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question **Q11**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

Q13. Montrer que, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n , en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question Q12.*

Q14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ .

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Q15. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Q16. Établir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle.$$

Q17. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On pourra utiliser la question **Q13**.

Q18. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle P, L_n \rangle = 0$.

Q19. On admet que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Q20. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^n (c_k(P))^2, \text{ où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle.$$

Q21. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

Partie IV - Fonction génératrice

On admet dans la suite du problème que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$ et on considère la série entière de la variable t : $\sum L_n(x)t^n$. On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

Q22. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |L_n(x)| \leq r^n$. On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.

Q23. Pour $x \in [-1, 1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum L_n(x)t^n$. Montrer que : $R(x) \geq \frac{1}{r}$.

Q24. Pour $x \in [-1, 1]$ et $t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$, on pose $S_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$. Montrer que S_x est solution sur $\left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0.$$

Q25. En déduire que : $\forall x \in [-1, 1], \forall t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

Q26. Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question **Q25**, de retrouver l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2 .

Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre

Pour $\theta \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n du$.

Q27. Soit $t \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction v_n de $[-\pi, \pi]$ dans \mathbb{C} définie par : $v_n(u) = t^n (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n$. Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$.

Q28. Justifier l'égalité : $\forall t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u}$.

Dans les questions **Q29** et **Q30**, a désigne un réel strictement positif.

Q29. Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0$. On pourra utiliser le changement de variable défini par $v = \pi - u$.

Q30. Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+a^2 \cos^2 u} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \arctan v$.

Q31. En déduire que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \forall \theta \in [0, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-t \cos \theta - it \sin \theta \cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}}.$$

Q32. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, \pi], L_n(\cos \theta) = w_n(\theta)$.

Q33. Justifier que : $\forall x \in [-1, 1], \forall t \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

Q34. Prouver que : $\forall x \in [-1, 1], R(x) = 1$. On pourra raisonner par l'absurde et montrer qu'alors, pour tout z de \mathbb{C} tel que $|z| < R(x)$, on a : $(z^2 - 2xz + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n \right)^2 = 1$.

Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

Dans les questions **Q35** à **Q43**, n désigne un entier naturel non nul.

Q35. Soit h une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^{2n-1} sur \mathbb{R} telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \dots < t_{2n}$ vérifiant : $\forall i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, h(t_i) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que : $h^{(2n-1)}(c) = 0$.

Q36. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, à valeurs dans \mathbb{R} , par : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ell_i(P) = P(x_i)$ (on rappelle que x_1, \dots, x_n désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes). Montrer que (ℓ_1, \dots, ℓ_n) est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

Q37. En déduire que pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R} , il existe un unique n -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \ell_k$.

Q38. Montrer qu'il existe un unique n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 P(t) dt = \alpha_1 P(x_1) + \dots + \alpha_n P(x_n).$$

Q39. Montrer que la relation de la question **Q38** reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On pourra, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, utiliser la division euclidienne de P par L_n et la question **Q18**.

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^{2n} sur $[-1, 1]$.

Q40. Montrer que : $\exists! H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H'_n(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$. On pourra commencer par déterminer le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans \mathbb{R}^{2n} qui à P associe : $(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$.

On rappelle que A_n a été défini à la question **Q6**.

Q41. Soit $x \in [-1, 1]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \neq x_i$.

Montrer que : $\exists c \in [-1, 1], f(x) - H_n(x) = \frac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$. On pourra considérer l'application g définie sur $[-1, 1]$ par $g(t) = f(t) - H_n(t) - \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} K$, où K est un réel dépendant de x à préciser, et appliquer le résultat de la question **Q35** à la fonction g' .

Q42. Montrer que : $\forall y \in [-1, 1], \exists c \in [-1, 1], f(y) - H_n(y) = \frac{A_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$.

Q43. Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \right| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt.$$

Q44. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt$.

FIN



1/ CONSIGNES GÉNÉRALES :

Présentation du sujet :

Le sujet, composé d'un seul problème en six parties largement indépendantes, abordait le thème des polynômes de Legendre.

La partie I permettait principalement d'établir que ces polynômes sont scindés à racines simples.

La partie II avait pour but de prouver la diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'en étudier les éléments propres, avec dans la dernière question une application à la détermination des éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

La partie III permettait d'obtenir une famille orthonormale pour un produit scalaire défini sur l'espace $\mathbb{R}[X]$, puis s'intéressait à la distance d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

La partie IV concernait la fonction génératrice associée aux polynômes de Legendre, la partie V permettant d'en obtenir une expression intégrale.

Enfin, la partie VI proposait une application des polynômes de Legendre à l'approximation d'intégrales.

Ce sujet avait pour but d'évaluer les connaissances des candidats sur de très nombreuses notions des programmes des deux années de classes préparatoires. Il devait permettre d'évaluer chez ces candidats les six grandes compétences exposées dans les objectifs de formation du programme de la classe de PC.

Problèmes constatés par les correcteurs :

L'épreuve proposée a permis de classer correctement les candidats de niveau moyen à fort, mais a sans doute pénalisé les candidats les plus faibles par le niveau de technicité exigé et l'absence de questions très faciles.

Les correcteurs ont cependant constaté des lacunes importantes chez de nombreux candidats. Il faut insister sur le fait que les définitions doivent être connues avec précision et que les théorèmes utilisés comportent des hypothèses qu'il convient de rappeler et de vérifier. Les raisonnements doivent être plus précis et plus rigoureux.

Notons quelques remarques signalées par les correcteurs sur des points précis des programmes de PCSI et de PC :

- en algèbre, la notion d'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme n'est pas maîtrisée. $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , à coefficients réels. Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est donc pas, en général, de degré n . La définition d'un produit scalaire est trop souvent mal connue et on ne trouve dans les copies que très rarement une preuve correcte du caractère défini.
- en analyse, les manipulations de valeurs absolues (ou de modules) ainsi que celles des inégalités ne sont très souvent pas maîtrisées. Une connaissance des formules élémentaires de trigonométrie est attendue. La règle de d'Alembert n'est pas la seule manière de déterminer un rayon de convergence.
- de manière générale, la rédaction d'un raisonnement par récurrence pose des problèmes à de trop nombreux candidats.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :**Partie I (Quelques résultats généraux) :**

Q1. Question bien traitée.

Q2. Cette question, apparemment facile, a posé des problèmes à de nombreux candidats.

Q3. La notion de famille échelonnée en degré est maîtrisée par la majorité des candidats. Une famille de $(n+1)$ polynômes de $R_n[X]$ n'est cependant pas nécessairement génératrice de $R_n[X]$.

Q4. Un certain nombre de candidats a résolu la question par un calcul direct. Pour les autres, l'énoncé du théorème de Rolle est souvent mal connu.

Q5. Question plus délicate, mal traitée par une majorité de candidats.

Q6. Très rares sont les candidats qui comprennent qu'un raisonnement par récurrence a été mis en place en Q4 et Q5.

Partie II (Étude des éléments propres d'un endomorphisme) :

Q7. Un certain nombre de candidats confond $R[X]$ et $R_n[X]$. Par ailleurs, la définition d'un endomorphisme n'est pas toujours connue.

Q8. Un polynôme de $R_n[X]$ n'est pas nécessairement de degré n .

Q9. Question bien traitée par une majorité de candidats.

Q10. Le fait que les valeurs propres sont deux à deux distinctes est rarement justifié.

Q11. Question bien traitée en général.

Q12. La principale erreur est l'absence des coefficients binomiaux dans la formule de Leibniz.

Q13. Question très souvent traitée, mais le fait que L_k est non nul est rarement mentionné.

Q14. Cette question n'a pas été comprise. Certains candidats donnent le résultat attendu, mais la justification est presque toujours absente.

Partie III (Distance à $R_n[X]$) :

Q15. Question très mal traitée. Le cours est mal connu (définition d'un produit scalaire et preuve du caractère défini).

Q16. Question bien traitée en général.

Q17. Q18. Q19. Questions souvent correctement traitées.

Q20. Le fait que $R_n[X]$ est de dimension finie n'est quasiment jamais mentionné, preuve que le cours est connu de manière trop superficielle.

Q21. Question peu abordée.

Partie IV (Fonction génératrice) :

Q22. Question très mal traitée en général. Le maniement des valeurs absolues et des inégalités pose de gros problèmes aux candidats. La notion de récurrence forte (ou double) est très mal maîtrisée.

Q23. Une grande majorité de candidats veut utiliser la règle de d'Alembert et échoue. Pour ceux qui utilisent un théorème de comparaison, l'hypothèse de positivité est souvent absente.

Q24. Le calcul commence souvent correctement, mais rares sont ceux qui arrivent au bout.

Q25. La constante multiplicative est souvent choisie par le candidat pour arriver au résultat demandé. L'étude du signe de $1 - 2xt + t^2$ n'est quasiment jamais faite.

Q26. Souvent abordée, mais de manière incomplète.

Partie V (Expression intégrale) :

Q27. Question très mal traitée. De nombreux candidats ignorent la définition de la convergence normale et les inégalités sur des nombres complexes ne sont pas rares.

Q28. On attend plus de précision sur les hypothèses du théorème d'interversion.

Q29. Question souvent bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

Q30. Question peu abordée. Peu de candidats savent calculer $\cos^2(\arctan x)$ et peu d'entre eux connaissent ou savent retrouver une primitive de $1/x^2 + a^2$.

Q31. Question presque systématiquement délaissée. Seuls les tous meilleurs candidats s'en sont sortis.

Q32. L'unicité du développement en série entière n'est que très rarement évoquée.

Q33. Le lien avec ce qui précède n'a quasiment jamais été observé.

Q34. Question presque jamais abordée.

Partie VI (Application à l'approximation d'intégrales) :

Q35. L'idée du raisonnement apparaît dans un certain nombre de copies, mais la rigueur est souvent absente.

Q36. Question abordée, mais très rarement bien traitée.

Q37. Beaucoup de candidats confondent $L(R_{n-1}[X], R)$ et $R_{n-1}[X]$.

Q38. Bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

Q39. à Q44. Questions très peu abordées et le plus souvent mal traitées.

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

MATHEMATIQUES**Mardi 2 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties largement indépendantes.

Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLÈME

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n -ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

Dans les parties **I**, **II** et **V**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC, puis CPC et CCPPC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III** et **V**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie **V**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q4** et de la partie **II** que par la question **Q10**. La partie **V** utilise seulement la question **Q11** de la partie **II** et la partie **IV**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

Partie I - Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

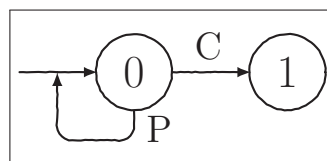


Figure 1

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geq 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[, \quad G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n)t^n.$$

Q1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q2. Montrer que $R_Y = \frac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left] -\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right[$, $G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt}$.

Q3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G_Y'(1) = \frac{1}{q}$ et $G_Y''(1) = \frac{2p}{q^2}$.

Q4. Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

Partie II - Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\frac{1}{a^{n+1}}$.

Q5. Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

Q6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q7** à **Q10**, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^n u_k(a)u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que

$|t| < |a|$, $f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$.

Q7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).$$

Q8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Q9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Q10. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leq |b| \leq |c|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose : $g(t) = \frac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

Q11. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geq |a|$.

Partie III - Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

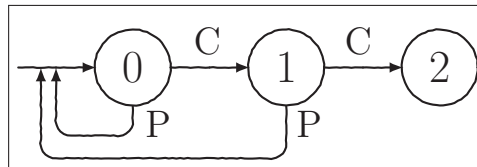


Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(Z = n)$. On note G_Z la série génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geq 1$.

Q12. Calculer p_1 , p_2 et p_3 .

Q13. Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'événements.

Q14. En déduire que pour tout $n \geq 3$, on a : $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$.

Q15. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \frac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

Q16. Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.

Q17. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t - a)(t - b)$.

Q18. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q19. Montrer à l'aide de la question **Q10** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

Q20. Montrer que, pour tout $t \in]-|a|, |a|[$, on a : $G_Z(t) = \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q21. Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $\mathbf{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

Q22. Vérifier, à l'aide des questions **Q4** et **Q21**, que $\mathbf{E}(Z) \geq \mathbf{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie I.

Q23. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie IV - Algèbre linéaire

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A , si bien que $\chi_A(t)$ est le déterminant de $A - tI_4$.

Q24. Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Q25. Trouver les réels α , β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

Q26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, S est solution de (E_t) si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

Q27. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4 \chi_A(1/t)$.

Q28. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

Q29. En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S .

Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on note U_k la k -ième colonne de $I_4 - tA$. On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) .

Q30. Vérifier que $L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3$.

Q31. En déduire que $\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

Q32. Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A . On note λ une valeur propre complexe non nulle de A .

Q33. Montrer que λ est valeur propre de la matrice transposée de A .

Q34. En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases} .$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système (\mathcal{H}) . On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :

i) $M = |x_3|$; **ii)** $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$; **iii)** $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

Q35. Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.

Q36. Montrer l'existence de nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = t(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3).$$

Q37. Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que :

$$\mu \neq 0, \quad 1 < |a| \leq |b| \leq |c| \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(t) = \mu(t - a)(t - b)(t - c).$$

Partie V - Étude d'un dernier cas

Dans cette partie, on suppose que :

- l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C ;
- l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre P ;
- l'automate passe du niveau 2 au niveau 3 en générant la lettre C ;
- si l'automate est au niveau 0 ou 2 et qu'il génère la lettre P, alors il retombe au niveau 0 ;
- si l'automate est au niveau 1 et qu'il génère la lettre C, alors il reste au niveau 1.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 3, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CPC.

Q38. Reproduire, sur votre copie, la figure 3 suivante en la complétant pour résumer l'expérience de cette partie **V**.

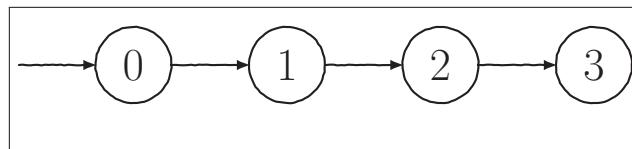


Figure 3

Pour $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_{n,i}$ l'événement « après avoir généré la n -ième lettre, l'automate se trouve au niveau i » et $E_{0,i}$ l'événement « l'automate se trouve initialement au niveau i ». On pose $p_{n,i} = \mathbf{P}(E_{n,i})$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, on définit $S_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,i} t^n$.

On note T l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 3.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On remarque que la série génératrice de T (notée G_T) est alors S_3 et on note R_T son rayon de convergence. On rappelle que $R_T \geq 1$.

Q39. Déterminer $p_{0,0}, p_{0,1}, p_{0,2}$ et $p_{0,3}$.

Q40. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} p_{n,0} &= p \cdot p_{n-1,0} + p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} &= q \cdot p_{n-1,0} + q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} &= p \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,3} &= q \cdot p_{n-1,2} \end{cases} .$$

Soit $t \in [-1, 1]$. On note $S(t)$ la matrice colonne suivante : $S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}$.

Q41. Montrer que

$$\begin{cases} S_0(t) &= tp \cdot S_0(t) + tp \cdot S_2(t) + 1 \\ S_1(t) &= tq \cdot S_0(t) + tq \cdot S_1(t) \\ S_2(t) &= tp \cdot S_1(t) \\ S_3(t) &= tq \cdot S_2(t) \end{cases} .$$

Q42. Montrer que la matrice colonne $S(t)$ est solution de l'équation (E_t) définie en partie **IV**.

Q43. Montrer que $\forall t \in]-R_T, R_T[$, $G_T(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$ et montrer que $R_T > 1$.

Q44. Montrer que T admet une espérance et une variance.

Q45. Donner l'expression de $\mathbf{E}(T)$ en fonction de q seulement.

Q46. Proposer une méthode permettant de déterminer le temps d'attente moyen de la première réalisation par l'automate de la séquence CCPPC : on précisera notamment le schéma des six niveaux correspondants et la matrice analogue à A que l'on peut faire intervenir dans ce problème.

FIN

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES :

Présentation du sujet :

Le sujet proposait l'étude d'un automate qui génère à des instants successifs les lettres C ou P. On s'intéressait alors particulièrement au temps d'attente Y d'une certaine séquence de lettres et à sa fonction génératrice. Le problème comportait 5 parties largement indépendantes les unes des autres. La partie I consistait à retrouver les résultats du cours sur la loi géométrique en probabilité. La partie II établissait des résultats préliminaires d'analyse sur les séries entières. En partie III, un cas intermédiaire était abordé : son étude nécessitait d'établir une formule de récurrence linéaire d'ordre 2 et les propriétés de Y en découlaient assez simplement. Des résultats particuliers d'algèbre linéaire étaient ensuite établis en partie IV afin d'étudier un cas plus complet en partie V.

La problématique du sujet était largement inspirée par l'étude des automates telle qu'elle est abordée par Graham, Knuth et Patashnik dans le livre « Mathématiques concrètes ».

Dans son ensemble, le sujet cherchait à évaluer les candidats sur les connaissances d'une partie la plus large possible du programme. La difficulté des questions se voulait progressive et de nombreuses questions correspondaient à des applications directes du cours ; les questions ouvertes n'étaient pas bloquantes si bien qu'un candidat n'ayant pas trouvé le bon résultat à une question ouverte pouvait continuer sa composition sans difficulté. Le sujet se donnait également pour but d'évaluer chez les candidats les six compétences explicitement détaillées dans le programme de PCSI-PC. La longueur relative du sujet était un point essentiel d'évaluation de l'efficacité des candidats.

Problèmes constatés par les correcteurs :

L'épreuve de cette année s'est avérée très discriminante. Un nombre plus conséquent de candidats a su mobiliser ses connaissances et ses compétences afin de réussir pleinement les deux tiers du problème. En revanche, le reste des candidats s'est retrouvé assez rapidement en difficulté et n'a pu réussir correctement que les questions du problème faisant intervenir des compétences de manipulation élémentaire des outils mathématiques ou de représentation.

La présentation écrite est très bonne, en règle générale. La mise en œuvre de stratégies pour répondre correctement à un maximum de questions a encore progressé si bien que les copies traitant sérieusement moins de 15 questions sont quasiment inexistantes. Les candidats ayant traité la quasi-totalité du sujet sont moins rares cette année.

La tonalité « probabiliste » du sujet a pu faire peur à certains candidats mais la variété des parties du programme présentées a toujours permis d'évaluer ces candidats sur leurs compétences en analyse et en algèbre.

Tout cela ne doit pas pour autant occulter les graves lacunes qu'ont rencontrées les correcteurs cette année encore. On constate notamment :

- une maîtrise très insuffisante du socle des connaissances ; les définitions moins courantes sont souvent oubliées ;
- les candidats s'engagent souvent dans des calculs sans prendre de recul alors que le résultat peut être obtenu avec beaucoup plus de concision ;
- les liens logiques entre les différentes parties d'un même raisonnement ne sont pas toujours très clairs ;
- beaucoup de candidats essayent de « bluffer » le correcteur en faisant croire qu'ils ont obtenu honnêtement le résultat ; cette attitude n'a pas manqué d'être préjudiciable à l'évaluation globale de la copie.

Sur quelques points du programme de PCSI-PC, nous ajouterons les remarques détaillées suivantes :

- en probabilités, l'indépendance des expériences dans la loi géométrique, la définition précise d'un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales et la croissance de l'espérance doivent être mieux connues ;
- en algèbre, la définition de vecteur propre et le lien avec sa valeur propre associée, la multilinéarité du déterminant, les propriétés de la transposée d'une matrice, le théorème de d'Alembert-Gauss et la multiplicité d'une racine doivent être mieux compris ;
- en analyse, la manipulation de la règle de d'Alembert pour les séries entières, les équivalents simples, la manipulation d'inégalités, les propriétés de la valeur absolue, le produit de Cauchy, le développement en série entière et la dérivabilité d'un quotient de fonctions doivent être mieux assimilés.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I (Etude d'un cas simple) :

Q1. La loi géométrique a été reconnue dans la très grande majorité des cas mais l'indépendance des expériences de Bernoulli donnant lieu à un temps d'attente est très rarement évoquée.

Q2. La maîtrise des arguments permettant de conclure à la valeur du rayon de convergence n'est pas au rendez-vous. Beaucoup utilisent la règle de d'Alembert pour les séries (souvent sans précaution avec le cas $x = 0$) et affirment que ce critère donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série entière. L'oubli des valeurs absolues est fréquent. L'inégalité $1/p > 1$ n'est pas souvent traitée.

Q3. La justification de la dérivabilité est souvent laborieuse.

Q4. La formule donnant la variance de Y à l'aide des dérivées de G en 1 est mal connue.

Partie II (Séries entières) :

Q5. Même genre de problème qu'en **Q2**.

Q6 et Q7. Bien réussies.

Q8. Réussie seulement dans une bonne moitié des cas et rarement bien justifiée. Confusions entre suites et constantes, entre inégalité et négligeabilité, disparition des constantes multiplicatives dans l'équivalent simple.

Q9. La question pouvait se faire avec **Q8** pour le rayon de convergence et avec le produit de Cauchy pour l'égalité.

Pour l'égalité, les candidats ont souvent opté pour la version calculatoire à l'aide de **Q7** sans reconnaître de produit de Cauchy.

Q10 et Q11. De graves confusions entre les notions « développable en série entière au voisinage de 0 » et « fonction prolongeable par continuité en 0 » ou encore « fonction de classe C^∞ ».

Partie III (Etude d'un cas intermédiaire) :

Q12. Les résultats sont souvent justes mais la décomposition des événements en réunions et intersections est rarement faite.

Q13. La définition d'un système complet d'événements est très rarement donnée correctement. Beaucoup de confusions avec une conséquence de la définition : vérifier que la somme des probabilités vaut 1 n'est pas suffisant.

Q14. La formule des probabilités totales (dont l'emploi était largement suggéré par la question **Q13**) a été assez rarement utilisée. Les candidats ont donc souvent paraphrasé le résultat sans la moindre justification mathématique convaincante.

Q15. Ce calcul d'analyse un peu technique a posé des problèmes aux candidats faibles.

Q16. La question la mieux réussie de tout le problème.

Q17. Une question simple du niveau du secondaire qui pouvait se faire avec concision grâce aux éléments indiqués pour faire gagner du temps. Malgré cela, certains candidats ont effectué le développement de $(t - a)(t - b)$ en se trompant dans le calcul.

Q18. Souvent traitée mais très mal réussie. Les candidats ont de gros problèmes de manipulation des valeurs absolues. La fonction valeur absolue est assimilée à une fonction croissante ou décroissante sur \mathbb{R} suivant les besoins. L'inégalité $a > 1$ est souvent parachutée après des calculs obscurs et sans issue.

Q19 et Q20. Le lien avec les questions précédentes est souvent fait.

Q21. Le raisonnement pour obtenir l'existence de l'espérance et de la variance est souvent confus. Le résultat final n'est pas toujours atteint par manque de maîtrise dans le calcul de la dérivée et dans les simplifications tenant compte du fait que $p = 1 - q$.

Q22. Bien réussie.

Q23. Grave confusion entre $E(Z) \geq E(Y)$ et $E(Z) \geq E(Y) + 1$. Beaucoup d'arguments trop vagues sur le résultat en moyenne. Quasiment personne ne justifie que $Z \geq Y + 1$ pour utiliser ensuite la croissance de l'espérance.

Partie IV (Algèbre linéaire) :

Q24. Que de perte de temps sur cette question. La plupart des candidats commence cette question en calculant le polynôme caractéristique qui est demandé en question suivante. La question faisait un tout et déterminer un vecteur propre associé à 0 permettait directement de vérifier que 0 était valeur propre.

Q25. Bien réussie.

Q26. Très bien réussie à part quelques candidats qui ne font pas attention au sens dans lequel les produits matriciels sont exécutés.

Q27. La propriété de multilinéarité n'étant connue que par une moitié des candidats, les autres ont utilisé la question **Q28** pour répondre à la question.

Q28. Beaucoup de candidats trouvent ce polynôme en refaisant un calcul direct et long de déterminant. En utilisant **Q27**, c'était immédiat dans le cas où t est différent de 0. Pour $t = 0$, c'est aussi immédiat par propriété de la matrice identité.

Q29. Cette question a souvent posé des problèmes. Le lien entre la non-nullité du déterminant et l'existence et unicité d'une solution du système n'est pas clair pour beaucoup.

Q30, Q31 et Q32. Bien réussies.

Q33. Pour réussir cette question, la plupart des candidats refait un calcul long de déterminant !

Q34. Le résultat était souvent parachuté. Avec quelques détails, on comprenait parfois que le candidat choisissait de prendre $x_4 = 0$.

Q35. Cette question a été mal réussie à cause de la confusion fréquente entre inégalité stricte et inégalité large. Dans le cas i), il est souvent utilisé que $|x_1| < |x_3|$ pour aboutir au résultat.

Q36. Le théorème de d'Alembert-Gauss est parfois évoqué à travers le fait que tout polynôme complexe est scindé. Toutefois, il est très rare d'avoir l'argument sur la multiplicité de 0 dans le polynôme (confusion fréquente avec la dimension du sous-espace propre associé à 0).

Q37. La question a été rarement traitée. Le lien avec **Q27** et **Q36** a été vu mais il ne fallait pas oublier le cas $t = 0$.

Partie V (Etude d'un dernier cas) :

Q38 et Q39. Bien réussies.

Q40. La rédaction n'évoque quasiment jamais de système complet d'évènements ni de formule des probabilités totales.

Q41, Q42, Q43 et Q44. Bien réussies par ceux qui ont traité ces questions.

Q45. Le calcul est rarement bien maîtrisé jusqu'à une formule juste.

Q46. La représentation du schéma a été réussie par ceux qui ont traité cette question. En revanche, la matrice associée était rarement correcte. La méthode générale a été bien comprise par les rares candidats à avoir traité cette dernière question.

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

MATHEMATIQUES**Mardi 3 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties qui sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLEME

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}.$$

On propose d'étudier quelques aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques de cette famille de polynômes appelés "polynômes de Bernstein".

Dans la partie 1, on considère des exemples de courbes dont le paramétrage fait intervenir des polynômes de Bernstein dans des cas simples. Dans la partie 2, on s'intéresse à deux endomorphismes φ_n et B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les propriétés sont liées au fait que la famille des polynômes de Bernstein correspond à une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La loi binomiale permet de faire le lien avec l'endomorphisme B_n dont on étudie en détail la restriction à $\mathbb{R}_2[X]$. On étudie, dans la partie 3, les aspects analytiques de $B_n(f)$ pour une fonction f définie sur $[0, 1]$ avec B_n défini sur le modèle de la partie 2. Par l'usage des probabilités, on obtient une démonstration "naturelle" de la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur $[0, 1]$ sous l'hypothèse forte que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. La partie 4 complète la partie 3 par l'étude d'intégrales impropres et d'intégrales à paramètres. La partie 5 aborde la question des séries de fonctions liées aux polynômes de Bernstein.

Les parties 1 et 5 sont indépendantes des autres parties. La partie 3 dépend seulement de la partie 2 et cela uniquement par la question 5 faisant intervenir les probabilités. La partie 4 dépend seulement de la partie 3 et uniquement par la question 11.d).

PARTIE 1. GEOMETRIE

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de \mathbb{R}^2 définis par $A_0 = (0, 1)$, $A_1 = (1, 1)$ et $A_2 = (1, 0)$.

On note \mathcal{T} l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \geq 1\}$.

Pour $t \in [0, 1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1 - t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :

$$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1, \quad B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2 \quad \text{et} \quad C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t).$$

1. Soit $t \in [0, 1]$.

1.a) Déterminer l'expression de $p_{0,2}(t)$, $p_{1,2}(t)$ et $p_{2,2}(t)$ en fonction de t .

1.b) Déterminer les coordonnées de $A(t)$, $B(t)$ et vérifier que $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)$.

1.c) Montrer que $C(t) = \sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t)A_k$.

2. Montrer que \mathcal{T} est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

3. Soit \mathcal{C} l'arc paramétré défini à partir de la fonction $f : \begin{array}{ll} t & \mapsto C(t) \\ [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}^2. \end{array}$

3.a) Justifier que tous les points de \mathcal{C} sont dans \mathcal{T} .

3.b) Pour $t \in [0, 1]$, déterminer un vecteur directeur de la tangente \mathcal{D}_t à \mathcal{C} en $C(t)$.

3.c) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, le segment $[A(t), B(t)]$ est inclus dans \mathcal{D}_t .

3.d) Représenter dans un même repère orthonormé la courbe \mathcal{C} , la partie \mathcal{T} et les segments $[A(t), B(t)]$ pour $t = 0$, $t = 1/2$ et $t = 1$.

PARTIE 2. ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROBABILITÉS

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Pour $P(X)$ un polynôme réel, on note $P'(X)$ le polynôme dérivé.

On note \mathcal{F} la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \dots, p_{n,n}(X))$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes $\varphi_n(P)$ et $B_n(P)$ par :

$$\varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

et

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X).$$

4.

4.a) Montrer que φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b) Vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n(p_{k,n})(X) = k p_{k,n}(X)$.

4.c) En déduire que \mathcal{F} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ_n est diagonalisable.

4.d) Montrer que φ_n n'est pas bijectif et que B_n est bijectif.

5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et T_r une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$. On note $\bar{T}_r = T_r/r$.

Pour Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbf{E}(Y)$ l'espérance de Y et $\mathbf{V}(Y)$ la variance de Y .

On rappelle que si $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, r \rrbracket$ et h est une fonction à valeurs réelles définie sur $\llbracket 0, r \rrbracket$, alors

$$h(Y) \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(h(Y)) = \sum_{k=0}^r h(k) \mathbf{P}(Y = k).$$

5.a) Donner un exemple de situation probabiliste qui peut être décrite par une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$.

5.b) Donner $T_r(\Omega)$ et justifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, on a : $\mathbf{P}(T_r = k) = p_{k,r}(t)$.

5.c) Donner l'expression simplifiée des quantités suivantes :

$$\mathbf{E}(T_r), \mathbf{E}(\bar{T}_r), \mathbf{V}(T_r), \mathbf{V}(\bar{T}_r), \mathbf{E}(T_r^2) \text{ et } \mathbf{E}((\bar{T}_r)^2) ;$$

vérifier en particulier que $\mathbf{E}((\bar{T}_r)^2) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1)$.

5.d) En déduire que les égalités suivantes sont valables pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) t^2 + \frac{1}{r} t.$$

5.e) Montrer que les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est stable par B_n .

On note \tilde{B}_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par B_n ; on rappelle que dans ce cas, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\tilde{B}_n(P) = B_n(P)$. On note A_n la matrice de \tilde{B}_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3.

On note aussi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H$.

8.

8.a) La matrice H est-elle diagonalisable ?

8.b) Soit a et b deux réels et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible.

8.c) Déterminer (sans chercher à calculer Q^{-1}) deux réels a et b tels que $H = QDQ^{-1}$.

9. On suppose dans toute la fin de cette partie que les réels a et b ont été choisis de telle sorte

que $H = QDQ^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Si une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notée (M_ℓ) , converge vers une matrice M , on note $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$. On admet alors que $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on a : $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell)_{i,j} = M_{i,j}$.

9.a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n) = I_3$.

9.b) Montrer que l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est linéaire.

9.c) En déduire que si $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$, alors $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = QMQ^{-1}$.

9.d) Montrer que $A_n = QD_n Q^{-1}$.

9.e) Déterminer explicitement, pour $n \geq 2$, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (A_n^\ell)$.

9.f) Déterminer explicitement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^n)$.

PARTIE 3. ANALYSE ET PROBABILITES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 5 avec $r = n$. On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$f(t) - B_n(f)(t) = \mathbf{E}(f(t) - f(\bar{T}_n)) = \sum_{k=0}^n (f(t) - f(k/n)) p_{k,n}(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration les résultats de cette question 5.

10.

10.a) Montrer que pour toute variable aléatoire discrète Y admettant une variance, on a l'inégalité suivante : $\mathbf{E}(Y) \leq \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$.

10.b) En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbf{E}(|t - \bar{T}_n|) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

11. On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

11.a) Justifier l'existence d'un réel M_f tel que : $\forall(a, b) \in [0, 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f|a - b|$.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que M_f est un réel choisi de telle sorte que :

$$\forall(a, b) \in [0, 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f|a - b|.$$

11.b) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbf{E}(|f(t) - f(\bar{T}_n)|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

11.c) En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$.

11.d) Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

PARTIE 4. INTEGRALES

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

On reprend les notations de la partie 3 pour $B_n(f)$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat de la question 11.d).

12. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) dx$.

13. On note $S_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

13.a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1} dx$.

13.b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le réel $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx$ est indépendant de l'entier k et que $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx = \frac{1}{(n+1)}$.

13.c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$.

14. Montrer que le résultat de la question 13.c) reste vrai pour la seule hypothèse que f est continue sur $[0, 1]$.

15. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b \leq c - 2$.

15.a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est convergente.

15.b) Montrer que, pour $b \geq 1$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

15.c) Montrer que la fonction $h : \begin{array}{l} t \mapsto \frac{t}{1-t} \\ [0, 1[\longrightarrow [0, +\infty[\end{array}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui est strictement croissante et bijective.

15.d) En utilisant le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$, calculer $F(0)$; en déduire la valeur de $F(1)$.

PARTIE 5. SERIES DE FONCTIONS

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on note :

$$f_n(t) = \begin{cases} p_{k,n}(t) & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{si } n < k, \end{cases} \quad \text{si bien que} \quad f_n(t) = \begin{cases} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{si } n < k. \end{cases}$$

16. Montrer que $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire, pour tout $t \in]0, 1[$, un équivalent de $f_n(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

17. Etablir que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

Pour $t \in [0, 1]$, on note $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

18. Déterminer $S(t)$ pour $t = 0$ et pour $t = 1$.

19.

19.a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.

19.b) En déduire que, pour tout $u \in [0, 1[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$.

19.c) Montrer que, pour tout $t \in]0, 1]$, $S(t) = \frac{1}{t}$.

19.d) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$?

Fin de l'énoncé

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Présentation du sujet

Le sujet proposait l'étude de la famille des polynômes de Bernstein sous des aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques. Le problème comportait 5 parties largement indépendantes les unes des autres. La géométrie était abordée exclusivement en partie 1 et l'algèbre linéaire en partie 2. Les probabilités étaient évoquées en parties 2 et 3 alors que l'analyse intervenait de façon essentielle en parties 3, 4 et 5. On commençait donc avec quelques propriétés géométriques des polynômes de Bernstein à l'ordre 1 et 2 en allant jusqu'à la représentation d'un pseudo-arc de cercle compris dans une partie convexe triangulaire. On introduisait ensuite deux endomorphismes φ_n et B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les propriétés étaient liées au fait que la famille des polynômes de Bernstein correspond à une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La loi binomiale était alors utilisée afin d'aller plus loin dans l'étude de la restriction de $\mathbb{R}_2[X]$ de B_n ainsi que dans l'approximation de f sans faire trop de calculs. Par cette voie, on obtient une démonstration « naturelle » de la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur $[0,1]$ qui se rapproche des caractérisations classiques des opérateurs de Bernstein. Les deux dernières parties recoupaient ces propriétés avec quelques études d'intégrales classiques, d'intégrales à paramètre (fonction hypergéométrique), de séries entières et de séries de fonctions.

Dans son ensemble, le sujet cherchait à évaluer les candidats sur les connaissances d'une partie la plus large possible du programme. La difficulté des questions se voulait progressive et de nombreuses questions correspondaient à des applications directes du cours. Par ailleurs, les questions ouvertes n'étaient pas bloquantes si bien qu'un candidat n'ayant pas trouvé le bon résultat à une question ouverte pouvait continuer sa composition sans difficulté. Le sujet se donnait également pour but d'évaluer chez les candidats les six compétences explicitement détaillées dans le programme de PCSI-PC. La longueur relative du sujet était un point essentiel d'évaluation de l'efficacité des candidats.

Problèmes constatés par les correcteurs

Les correcteurs se sont accordés pour dire que l'épreuve avait été mieux réussie par les candidats que la précédente épreuve. Une évaluation spécifique de l'ensemble des compétences requises par le programme de PCSI-PC a en effet permis de rattraper, en partie, les graves faiblesses constatées dans la pratique du raisonnement et la maîtrise du formalisme mathématique. La présentation écrite est très bonne, en règle générale. La compétence de modélisation (surtout sur des situations probabilistes) semble être en nette amélioration par rapport à l'année précédente. La représentation matricielle est bien assimilée alors que la représentation géométrique pose tout de même des problèmes aux trois quarts des candidats. La mise en œuvre de stratégies pour répondre correctement à un maximum de questions a encore progressé si bien que les copies traitant sérieusement moins de 10 questions sont très rares. En revanche, les candidats ayant bien traité la quasi-totalité du sujet sont moins nombreux que d'habitude. L'ensemble a donné plus d'homogénéité aux copies que les années précédentes.

Tout cela ne doit pas pour autant occulter les graves lacunes qu'ont rencontrés les correcteurs cette année. On constate notamment :

- une maîtrise très insuffisante du socle des connaissances ; les définitions moins courantes sont souvent oubliées et les hypothèses de la plupart des théorèmes sont négligées ;

- les candidats s'engagent souvent dans des calculs sans prendre de recul alors que le résultat peut être obtenu avec beaucoup plus de concision ;
- les liens logiques entre les différentes parties d'un même raisonnement ne sont pas toujours très clairs ;
- beaucoup de candidats essaient de « bluffer » le correcteur en faisant croire qu'ils ont obtenu honnêtement le résultat ; cette attitude n'a pas manqué d'être préjudiciable à l'évaluation globale de la copie.

Sur quelques points du programme de PCSI-PC, nous ajouterons les remarques détaillées suivantes :

- en géométrie, l'étude de la convexité d'une partie et l'étude des courbes paramétrées doit être améliorée ;
- en probabilités, l'ensemble des valeurs de X , les formules pour $E(aX+b)$, pour $V(aX+b)$ et la formule de Koenig-Huygens (pour calculer $V(X)$ ou pour déduire $E(X^2)$ à partir de $E(X)$ et de $V(X)$) doivent être mieux connues ;
- en algèbre, le théorème de concaténation de familles de vecteurs propres, la continuité des applications linéaires en dimension finie et les conditions suffisantes pour avoir une égalité entre deux polynômes doivent être mieux assimilés ;
- en analyse, le théorème sur l'image continue d'un segment, le théorème des accroissements finis, la définition des sommes de Riemann, la mise en œuvre du théorème de comparaison pour la convergence d'intégrales ou de séries (obtention d'équivalents plus simples ou/et utilisation de règles de négligeabilité), la bijectivité d'une fonction, le changement de variable dans une intégrale, les développements et propriétés des séries entières et la convergence normale de séries de fonctions doivent être mieux compris.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES

Partie 1 (Géométrie)

1.a, b et c. Questions très bien réussies.

2. La définition d'une partie convexe n'est pas connue dans la moitié des cas.

3.a. Les candidats se contentent souvent de vérifier que $x(t)+y(t) \geq 1$ mais oublient de vérifier que $x(t)$ et $y(t)$ sont dans $[0,1]$.

3.b. Question peu traitée.

3.c. Question très peu traitée et quasiment jamais réussie : au mieux, les candidats vérifient que le vecteur directeur précédemment trouvé est colinéaire au vecteur $A(t)B(t)$.

3.d. Question peu traitée. Pour une moitié de ceux qui ont traité la question, la représentation de la courbe n'est pas en accord avec les résultats précédents.

Partie 2 (Algèbre linéaire et probabilités)

4.a. La linéarité a été vue sauf par ceux qui n'ont pas voulu détailler le calcul. La stabilité de $R_n[X]$ par φ_n n'a été maîtrisée que dans un tiers des cas.

4.b. Beaucoup de calculs malhonnêtes sur cette question : quand le résultat d'une question est donné, on s'attend bien sûr à ce que les calculs soient particulièrement bien détaillés.

4.c. Question très mal réussie pour justifier le caractère basique. Très peu de candidats ont compris que la liberté de la famille des $p_{\{k,n\}}$ résultait de la question précédente et du théorème de concaténation de familles de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes. Beaucoup de candidats ont prétendu que la famille était étagée en degré. La diagonalisabilité de φ_n a été en revanche bien comprise.

4.d. Bien pour φ_n mais plus rarement vu pour B_n .

- 5.a.** Bien pour la description du modèle mais il manquait souvent la définition précise de la variable aléatoire attachée à l'expérience décrite.
- 5.b.** L'ensemble des valeurs d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale est très mal connu.
- 5.c et d.** Beaucoup de calculs inutiles. L'espérance et la variance pour une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ne sont pas suffisamment connues et les formules pour $E(aX+b)$ et $V(aX+b)$ non plus. Il suffisait ensuite d'utiliser la formule de Koenig-Huygens pour obtenir $E(X^2)$ à partir de $E(X)$ et de $V(X)$. Les candidats ont très souvent fait des calculs longs et laborieux pour retrouver $E(T_r)$ et $E(T_r^2)$ à la main. Au lieu de gagner du temps, plusieurs candidats croient que ce genre de question est une occasion de redonner une démonstration classique sûrement déjà vue en cours. Quelques candidats ont toutefois démontré astucieusement les deux dernières égalités de 5.d en réutilisant la question 4.b et la linéarité de φ_n .
- 5.e.** Question peu traitée et très rarement comprise. Les candidats ont souvent essayé de justifier les résultats en indiquant que les calculs étaient « généralisables » à t quelconque sans être suffisamment convaincants. On rappelle que si deux polynômes coïncident sur une infinité de valeurs, alors ils sont égaux. Cet argument classique permet de redonner, par exemple, une démonstration probabiliste de la formule du binôme de Newton.
- 6.** Beaucoup de candidats se sont contentés de vérifier que $R_2[X]$ était un sous-espace vectoriel de $R_n[X]$ et ont prétendu que la stabilité par B_n était conséquence de 4.a en prenant $n = 2$.
- 7.** La représentation matricielle donnant A_n était le point essentiel de la question et seulement un tiers des candidats a fait le lien avec la question 5.
- 8.a.** Question assez bien réussie même si les réponses ont été parfois bâclées, ce qui a souvent coûté quelques points. On rappelle que le polynôme caractéristique doit être signalé comme scindé dans $R[X]$ si on veut pouvoir conclure à la diagonalisabilité à partir du calcul des multiplicités des valeurs propres et des dimensions des sous-espaces propres correspondants.
- 8.b, c, 9.a et b.** Questions très bien réussies.
- 9.c.** La continuité des applications linéaires en dimension finie a été rarement évoquée et beaucoup de candidats ont cru avoir traité correctement cette question par « passage à la limite » ou par « linéarité ».
- 9.d.** Cette question était une conséquence facile de 7 et 8.c mais peu de candidats l'ont vu ainsi. Dans ce cas, ils ont refait des calculs pour en arriver au fait que A_n est diagonalisable. Certains ont alors bien justifié que l'on pouvait prendre encore la même matrice de passage Q mais pour d'autres, ce dernier point n'était pas clair.
- 9.e.** Question bien réussie.
- 9.f.** Question moins bien réussie à cause de la limite de $(1-1/n)^n$ qui n'est correcte que dans un tiers des cas.

Partie 3 (Analyse et probabilités)

- 10.a.** Beaucoup de candidats utilisent à bon escient la positivité de la variance pour obtenir $E(Y)^2 \leq E(Y^2)$. En revanche, le « passage à la racine carrée » donne systématiquement le résultat voulu sans autres détails (ou certains disent que $E(Y)$ est aussi positif pour s'affranchir des valeurs absolues sur $E(Y)$).
- 10.b.** La définition première de $V(Y)$ sous la forme de $E((Y-E(Y))^2)$ est très rarement connue et les candidats ont donc souvent refait le calcul de $E((Y-E(Y))^2)$ en développant le carré.
- 11.a.** Il y avait deux théorèmes à utiliser dans cette question et souvent aucun des deux n'était correctement utilisé car l'hypothèse du théorème sur les inégalités des accroissements finis est souvent oubliée. Au final, on ne sait pas souvent d'où vient M_f ou alors c'est un majorant de f ou de f' et non de $|f'|$.
- 11.b.** Question bien réussie.
- 11.c.** Beaucoup de malhonnêtetés ont été relevées dans cette question : il fallait utiliser l'inégalité triangulaire et aussi montrer que pour t dans $[0,1]$, $t(1-t) \leq 1/4$.
- 11.d.** Beaucoup de copies ne mentionnent pas la norme infinie et confondent donc la convergence simple avec la convergence uniforme.

Partie 4 (Intégrales)

12. Cette question était une conséquence directe de la question 11.d. Ceux qui ont voulu faire intervenir un théorème de convergence dominée n'ont pas su donner une hypothèse de domination réellement correcte.

13.a. Question très bien réussie.

13.b. Les candidats ont souvent fait cette question à « l'envers » en compliquant beaucoup les calculs. Le calcul de l'intégrale de $p_{\{k,n\}}$ n'a pas été relié à celle de $p_{\{k-1,n\}}$ mais plutôt à celle de $p_{\{0,n\}}$ par itérations successives (sans évoquer de récurrence).

13.c. Question bien réussie.

14. Le lien avec les sommes de Riemann a été très rarement évoqué et presque jamais correctement établi. Là encore les candidats prétendent que la méthode utilisée est « clairement » généralisable à une fonction seulement continue.

15.a. Question souvent traitée mais très mal réussie. La continuité de la fonction intégrée n'est pas toujours évoquée. L'équivalent simple en $+\infty$ est très souvent donné comme étant $x.u^{\{a+b-c\}}$ pour tout x au lieu de $x^b.u^{\{a+b-c\}}$ si $x > 0$. Avec l'hypothèse faite sur a, b et c , les candidats en déduisent alors que la fonction intégrée est $o(1/u^2)$ au voisinage de $+\infty$ alors que c'est faux dans le cas où $a+b-c = -2$.

15.b. Question assez souvent traitée mais mal maîtrisée. Le calcul de la dérivée partielle n'est pas toujours juste et l'hypothèse de domination rarement correctement traitée.

15.c. Cette question n'a été souvent réussie que partiellement car le calcul de $h([0,1[)$ est rarement évoqué.

15.d. Le changement de variable a rarement abouti, souvent à cause de $h'(t)$ qui n'était pas mis sous la bonne forme.

Partie 5 (Séries de fonctions)

16. Près d'un tiers des candidats s'est précipité sur la formule de Stirling et a prétendu (quasiment toujours à tort) au résultat indiqué en début de question.

17. Question très mal réussie, même par ceux qui ont trouvé un équivalent correct pour $f_n(t)$. Nombreuses confusions entre suites de fonctions et séries de fonctions.

18. Beaucoup de précipitation dans cette question qui révèle parfois de graves incompréhensions dans la manipulation des sommes.

19.a. Question assez bien réussie par ceux qui ont repéré cette question facile.

19.b. La rédaction de cette question a été très rarement correcte. Presque personne ne parle de rayon de convergence de la série entière si bien que la dérivation terme à terme d'une série entière relève du miracle. D'autres candidats essayent de partir plutôt du développement en série entière de $(1+u)^\alpha$ mais ils sont rares à s'en sortir correctement.

19.c. Question peu traitée.

19.d. Très peu de candidats font le lien avec les questions 18 et 19.c pour en déduire que la convergence normale ne peut pas avoir lieu. Plusieurs candidats ont tenté de déterminer si la série des normes infinies de f_n était convergente mais personne n'a correctement abouti au résultat voulu.