Samedi 9 avril 2022

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2022

Épreuve de Mathématiques MP - PC - PSI

Dans la partie I de ce problème, on étudie des intégrales dépendant d'un paramètre. Dans les parties II et III, on exploite le calcul intégral afin d'obtenir des relations entre différentes sommes de séries. Dans la partie IV, on applique les résultats ainsi obtenus à l'étude aux bornes d'une série entière. Les parties sont assez largement indépendantes à condition d'admettre certains résultats établis.

■ PARTIE I : INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

On désigne par a un réel strictement positif et on se propose d'étudier pour tout réel x les intégrales :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t \qquad ; \qquad K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} \cos(\pi x t)\,\mathrm{d}t.$$

1°) *Calcul de l'intégrale $J(0)$*

On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\sqrt{\pi}$.

Pour tout réel strictement positif a, en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $J(0)$.

2°) *Calcul de l'intégrale $J(x)$ et d'une intégrale associée*

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J(x)$ pour tout réel x.

b) Etablir que la fonction J est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner une expression intégrale de $J'(x)$.

c) Etablir que la fonction J est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{\pi x}{2a}\, y = 0$.

d) En déduire la valeur de $J(x)$ pour tout réel x, puis montrer la convergence de $K(x)$ et l'égalité :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}.$$

■ PARTIE II : ÉTUDE DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

On désigne par g une application de classe C^2 définie de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dans $\mathbb{C}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(g) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

3°) *Etude d'une fonction auxiliaire*

Pour tout réel x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, on pose : $h(x) = \frac{g(x)-g(0)}{\sin(\pi x)}$.

a) Déterminer la limite L de $h(x)$ lorsque x tend vers 0.

On supposera désormais h prolongée par continuité sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ en posant : $h(0) = L$.

b) Exprimer $h'(x)$ pour x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ et préciser sa limite L' lorsque x tend vers 0.

c) En déduire que h est de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et préciser $h'(0)$.

4°) *Calcul d'une somme trigonométrique*

a) Vérifier par récurrence sur l'entier $p \geq 1$ qu'on a pour tout réel x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{p} \cos(2\pi n x) = \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

Cette égalité se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

b) En déduire la relation suivante pour tout entier naturel p : $\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,\mathrm{d}x = 1.$

5°) *Convergence et somme de la série* $\sum a_n(g)$

a) Etablir la relation suivante pour tout entier $p \geq 1$:

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) = g(0) + \int_{-1/2}^{+1/2} (g(x) - g(0))\,\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

b) En exploitant les résultats de la question 3 et une intégration par parties, en déduire que :

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) = g(0).$$

■ PARTIE III : FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Dans toute cette partie, on désigne par a un réel strictement positif et on pose pour tout réel x :

$$f_a(x) = e^{-\pi a x^2} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k) + f_a(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$$

où $g_a(x)$ est défini sous réserve de convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$.

Et dans ce cas, on conviendra de noter plus simplement : $g_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(x+k)$.

6°) *Propriétés de la fonction* g_a

a) Etablir la convergence des séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction g_a est 1-périodique.

c) Justifier la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2}\, e^{2ka\pi A}$ pour tout réel strictement positif A.

En déduire la convergence normale sur $[-A, A]$ des séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$, puis la continuité de la fonction g_a sur $\mathbb{R}$.

d) Etablir que la fonction g_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On établit de même, et on l'admettra, que la fonction g_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

7°) *La formule sommatoire de Poisson et application*

a) Justifier l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$a_n(g_a) = \int_{-1/2}^{+1/2} g_a(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} f_a(x+k)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

b) En effectuant le changement de variables $t = x + k$, en déduire l'égalité suivante :

$$a_n(g_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t.$$

A l'aide des résultats de la partie I, en déduire la valeur (sans signe intégral) de $a_n(g_a)$.

c) Déduire alors des résultats de la partie II que :

$$1+2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

d) En vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ que : $e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \leq e^{-\frac{\pi n}{a}}$, en déduire qu'on a lorsque a tend vers 0 :

$$1+2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + o(1).$$

■ PARTIE IV : APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

8°) On considère la série entière de la variable réelle x définie par :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} = \frac{1}{2} + x + x^4 + x^9 + x^{16} + \dots .$$

a) Quel est le rayon de convergence de cette série entière? Sur quel intervalle réel est-elle définie?

b) En posant $t = 1 - x$ avec $x \in]0,1[$, démontrer que : $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\right) = 0.$

A l'aide des résultats de la partie III, établir qu'on a alors quand x tend vers 1 :

$$S(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} + o(1).$$

c) En déduire un réel C tel qu'on a quand x tend vers 1 : $S(x^4) = \frac{C}{\sqrt{1-x}} + o(1).$

d) Exprimer, pour $|x| < 1$, la somme $S(x) + S(-x)$ en fonction de $S(x^4)$.

En déduire enfin que :

$$\lim_{x\to -1} S(x) = 0.$$

E.P.I.T.A. 2021

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Dans ce problème, on considère un espace vectoriel réel E supposé de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, et on se propose d'étudier les sommes de projecteurs de E qui commutent deux à deux. Dans la partie I, on traite un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans la partie II, on examine le cas général d'une somme de deux projecteurs qui commutent. Enfin, dans la partie III, on généralise l'étude au cas d'une somme de n projecteurs qui commutent deux à deux. Ces trois parties sont largement indépendantes.

■ PRÉLIMINAIRES

1°) On rappelle qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $f^2 = f$ et on convient de noter Id l'application Identité de E.

a) Etablir qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que p est un projecteur de E.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.

c) A l'aide de l'égalité : $\forall\, x \in E,\ x = p(x) + (x - p(x))$, montrer que : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

d) Ecrire la matrice de p dans une base de E obtenue par réunion de bases de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
En déduire que p est diagonalisable et préciser ses valeurs propres et leurs ordres de multiplicité en fonction de son rang.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère les endomorphismes p et q dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

2°) *Nature des endomorphismes p et q*

a) Calculer les matrices P^2 et Q^2.

b) Déterminer des bases de l'image et du noyau de chacun des deux endomorphismes p et q.
En déduire la nature géométrique et les éléments caractéristiques des endomorphismes p et q.

c) Calculer enfin les produits $P\,Q$ et $Q\,P$.

3°) *Etude de l'endomorphisme* $p + q$

a) Ecrire la matrice $P + Q$ et déterminer son polynôme caractéristique.

b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme $p + q$. Celui-ci est-il diagonalisable?

c) Préciser des vecteurs propres v_0, v_1, v_2 associés aux valeurs propres 0, 1, 2 de $p + q$.
On choisira ces vecteurs propres v_0, v_1, v_2 avec une première composante égale à 1.

d) En déduire une matrice inversible R telle que $R^{-1}(P + Q)\,R = D$ soit diagonale, et préciser D.
Déterminer les images des vecteurs v_0, v_1, v_2 par p et par q, et en déduire $R^{-1}\,P\,R$ et $R^{-1}\,Q\,R$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

Dans cette partie, on considère à nouveau un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, on note Id l'endomorphisme identité de E, et on se propose d'étudier l'endomorphisme $f = p + q$ où p et q sont deux projecteurs de E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient : $p \circ q = q \circ p$.

4°) *Etude des valeurs propres de $f = p + q$*

a) Exprimer f^2 et f^3 en fonction de p, de q, et de $p \circ q = q \circ p$.
En déduire des réels β et γ tels que : $f^3 + \beta f^2 + \gamma f = 0$.

b) Soit x un vecteur propre de l'endomorphisme f associé à une valeur propre λ.
Préciser $f^2(x)$ et $f^3(x)$ en fonction de λ et x, puis montrer que : $\lambda^3 + \beta \lambda^2 + \gamma \lambda = 0$.

c) En déduire les valeurs propres possibles de l'endomorphisme $f = p + q$.

5°) *Etude des sous-espaces propres de $f = p + q$*

a) Démontrer l'égalité : $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \bigcap \mathrm{Ker}(q)$.
En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(p + q - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p) \bigcap \mathrm{Im}(q)$.

b) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Ker}(q)$, $\mathrm{Im}(p)$, $\mathrm{Im}(q)$ chacun des réels 0 et 2 est-il valeur propre de $f = p + q$?
Préciser dans ce cas les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres 0 et 2.

c) Montrer l'inclusion : $\mathrm{Im}\left(2 f - f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$.
En vérifiant l'égalité : $x = (\mathrm{Id} - f)^2 (x) + \left(2 f - f^2\right)(x)$, montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f) \subset \mathrm{Im}\left(2 f - f^2\right)$.
En déduire l'égalité $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\left(2 f - f^2\right) = \mathrm{Im}(p + q - 2\, p \circ q)$.

d) Calculer $(\mathrm{Id} - 2\,p)^2$ et $(\mathrm{Id} - 2\,p) \circ (p + q - 2\,p \circ q)$.
En déduire que 1 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $p \neq q$.

6°) *Réduction de l'endomorphisme $f = p + q$*

a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2\,x_2$.
Exprimer $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction de x_0, x_1, x_2.
En déduire x_0, x_1, x_2 en fonction de x, $f(x)$, $f^2(x)$.

b) Etablir alors que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

c) Etablir que l'endomorphisme $f = p + q$ est diagonalisable, et préciser les projecteurs π_0, π_1, π_2 associant à un vecteur x ses projections sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ dans la direction de la somme des deux autres.

■ PARTIE III : SOMME DE *n* PROJECTEURS QUI COMMUTENT

On considère toujours un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, un entier $n \geq 1$, et on étudie l'endomorphisme $f_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ où $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont n projecteurs de E commutant deux à deux, c'est-à-dire qui vérifient : $\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$.

7°) *Co-diagonalisation de $p_1, p_2, \dots, p_n$*

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ suivante :
"Si n projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie commutent deux à deux, alors il existe une base de cet espace dans laquelle leurs n matrices sont diagonales."

a) Etablir que $\mathrm{Im}(p_n)$ et $\mathrm{Ker}(p_n)$ sont stables par p_k pour $1 \leq k \leq n$.

b) En supposant l'hypothèse $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie pour un entier $n \geq 2$, établir qu'il existe :

- une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(p_n)$ dans laquelle les matrices des endomorphismes induit par $p_1, \ \dots, p_{n-1}$ sur $\mathrm{Im}(p_n)$ sont diagonales.
- une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(p_n)$ dans laquelle les matrices des endomorphismes induit par $p_1, \ \dots, p_{n-1}$ sur $\mathrm{Ker}(p_n)$ sont diagonales.

c) Décrire la forme des matrices de $p_1, \ p_2, \ \dots, \ p_{n-1}$ et la matrice de p_n dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ de E.
En déduire que l'hypothèse $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

8°) *Etude des valeurs propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$

a) Décrire la forme de la matrice F_n de $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ de E.

b) En déduire que f_n est diagonalisable, préciser ses valeurs propres possibles, puis justifier l'égalité suivante : $E = \mathrm{Ker}(f_n) \oplus \mathrm{Ker}(f_n - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f_n - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ \dots \ \oplus \mathrm{Ker}(f_n - n\,\mathrm{Id})$.

c) Calculer le produit $f_n \circ (f_n - \mathrm{Id}) \circ (f_n - 2\,\mathrm{Id}) \circ \ \dots \ \circ (f_n - n\,\mathrm{Id})$.

9°) *Etude de certains sous-espaces propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$

a) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, pour toute partie à k éléments $I_k = \{i_1, i_2, \ \dots, i_k\}$ de $[\![1, n]\!]$, exprimer le produit $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_k} \circ \left(p_{i_1} + p_{i_2} + \ \dots \ + p_{i_k}\right)$ en fonction de $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_k}$.

b) On considère un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$, donc vérifiant $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \ \dots \ + p_n)(x) = 0$.
Qu'obtient-on en composant cette égalité à gauche par $p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$?

c) On considère un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$, donc vérifiant $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \ \dots \ + p_n)(x) = 0$.
On suppose qu'il existe un entier $k \in [\![2, n]\!]$ tel que, pour toute partie $I_k = \{i_1, i_2, \ \dots, i_k\}$ de $[\![1, n]\!]$ ayant k éléments distincts, on ait : $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_k}(x) = 0$.
Etablir alors que, pour toute partie $\{i_1, i_2, \ \dots, i_{k-1}\}$ de $[\![1, n]\!]$ ayant $k-1$ éléments distincts, on a :

$$p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_{k-1}}(x) = 0.$$

En déduire qu'on a : $p_1(x) = p_2(x) = \ \dots \ = p_n(x) = 0$.

d) Etablir l'égalité : $\mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ \dots \ + p_n) = \mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(p_2) \bigcap \ \dots \ \bigcap \mathrm{Ker}(p_n)$.
En déduire que : $\mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ \dots \ + p_n - n\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p_1) \bigcap \mathrm{Im}(p_2) \bigcap \ \dots \ \bigcap \mathrm{Im}(p_n)$.

e) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p_1), \ \dots, \mathrm{Ker}(p_n)$ et $\mathrm{Im}(p_1), \ \dots, \mathrm{Im}(p_n)$ chacun des réels 0 et n est-il valeur propre de f_n ? Quels sont les sous-espaces propres associés?

10°) *Etude des projecteurs sur les sous-espaces propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$

A tout polynôme $P(X) = a_p X^p + \ \dots \ + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$, on associe l'endomorphisme $P(f_n)$ de E obtenu en substituant f_n à X dans P, et donc défini par : $P(f_n) = a_p f_n^p + \ \dots \ + a_1 f_n + a_0\,\mathrm{Id}$.
Si P et Q désignent deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on vérifie que :

$$(P+Q)(f_n) = P(f_n) + Q(f_n) \qquad \text{et} \qquad PQ\left(f_n\right) = P(f_n) \circ Q(f_n).$$

a) Pour $0 \leq k \leq n$, démontrer qu'il existe un et un seul polynôme L_k de degré n vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\} \ : \ L_k(i) = 0 \qquad \text{et} \qquad L_k(k) = 1.$$

b) Montrer que $L_0 + L_1 + \ \dots \ + L_n = 1$.
En déduire, pour tout $x \in E$, l'égalité (1) : $L_0(f_n)(x) + L_1(f_n)(x) + \ \dots \ + L_n(f_n)(x) = x$.

c) En exploitant 8.c), établir, pour $0 \leq k \leq n$ et pour tout $x \in E$, que : $L_k(f_n)(x) \in \mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$.

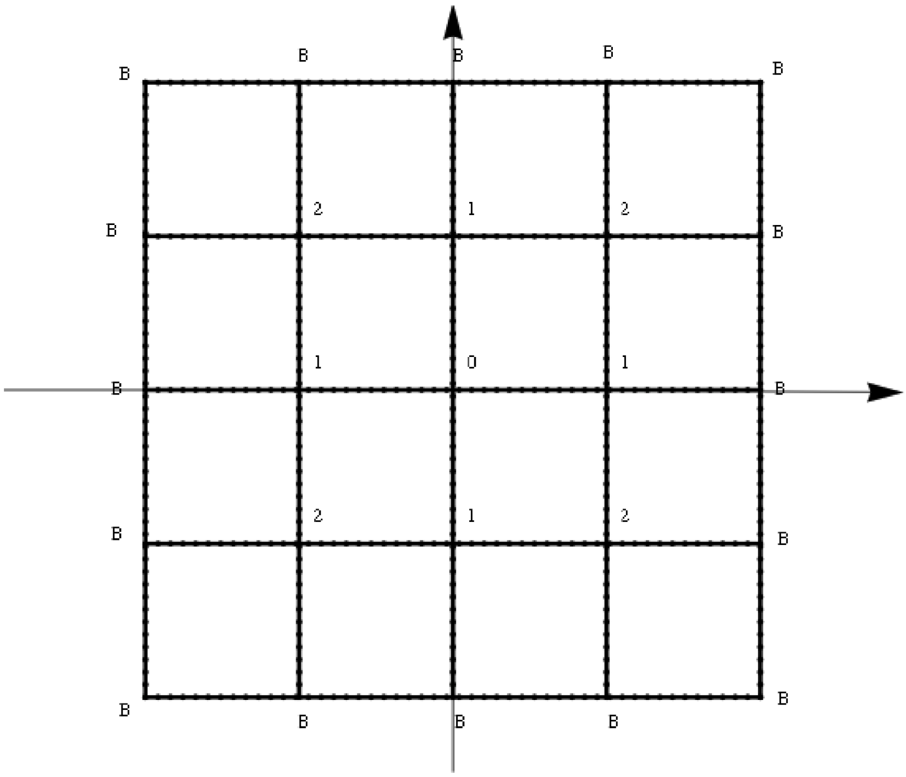
d) En déduire que l'égalité (1) obtenue ci-dessus donne l'unique décomposition d'un vecteur $x \in E$ sur la somme directe des sous-espaces propres de f_n.
En déduire, si $k \in [\![0, n]\!]$ est valeur propre de f_n, que $L_k(f_n)$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$ dans la direction de la somme des autres sous-espaces propres de f_n.■

E.P.I.T.A. 2020

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie I

On considère la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2,\ 2]\times[-2,\ 2]$ avec :
- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.
- les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.
Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées $(i,\ j)$ avec $i,\ j \in \{0,\ \pm 1,\ \pm 2\}$.
On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C, et B les points du bord du carré $C = [-2,\ 2]\times[-2,\ 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points $(i,\ j)$ où $i,\ j \in \{0,\ \pm 1,\ \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.
Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).

2) à tout instant n, si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M, de façon à se trouver à l'instant $n+1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M.

3) à tout instant n, si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2,\ 2]\times[-2,\ 2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point $(i,\ j)$ avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

1°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n. Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

a) Expliquer brièvement pourquoi on a : $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}$.

b) Expliciter de même les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$.

c) Exprimer chacun des 4 réels $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = B)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

d) Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

a) Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0.

On demande de déterminer les quatre vecteurs propres suivants de M :

- le vecteur U_1 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 1$ dont la dernière composante est égale à 1.
- le vecteur U_2 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_3 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_4 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 0$ dont la dernière composante est égale à 1.

b) On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1, U_2, U_3, U_4.

On note D la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D, M, P, P^{-1}.

3°) *Lois des variables aléatoires* X_n

Pour tout entier naturel n, on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

a) Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n, qu'on a : $V_n = P\,D^n\,P^{-1}\,V_0$.

b) Soit X un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont on note les composantes x_1, x_2, x_3, x_4.

Déterminer X tel que $P\,X = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$).

c) En déduire $P^{-1}\,V_0$, puis $D^n\,P^{-1}\,V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geq 1$.

d) Vérifier pour $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$, et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

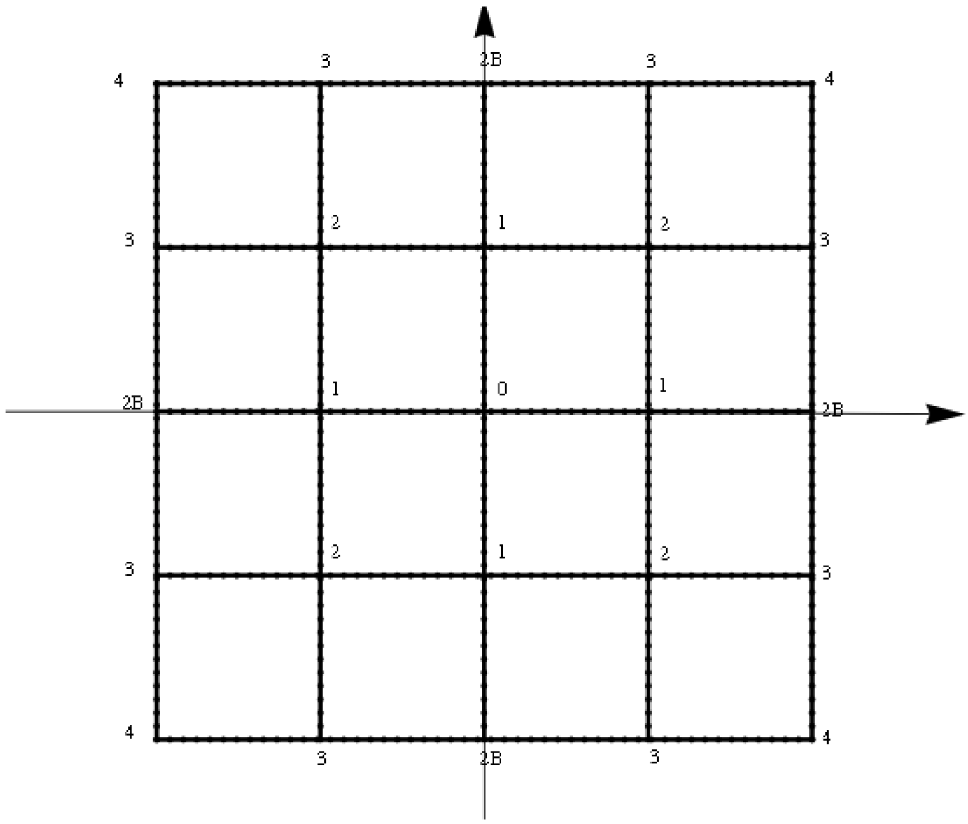
4°) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*

On désigne par T la fonction indiquant l'instant $n \in \mathbb{N}$ où, *pour la première fois*, l'individu atteint le bord du carré C, c'est-à-dire où l'événement $X_n = B$ est réalisé *pour la première fois.*

a) Montrer, pour tout entier naturel n, que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$, puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
Ainsi, on peut considérer la fonction T comme une variable aléatoire discrète.
b) Pour $n \geq 1$, exprimer l'événement $(T = 2\,n)$ à l'aide des événements $(X_{2\,n} = B)$ et $(X_{2\,n-1} = 1)$.
En déduire $\mathbb{P}(T = 2\,n)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.
d) A l'aide d'un raisonnement analogue, déterminer $\mathbb{P}(T = 2\,n + 1)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.
d) Déterminer alors l'espérance de la variable aléatoire T.

■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie II

On note maintenant les 25 points de la grille comme suit : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C, $2\,B$ les points à 2 arêtes de 0 et appartenant au bord de C, 3 les points à 3 arêtes de 0, et 4 les points à 4 arêtes de 0.



Dans cette partie II, on ne suppose plus que l'individu arrête sa marche lorsqu'il atteint le bord de C et ses déplacements sur les 25 points de la grille se font désormais suivant les 2 règles suivantes :
1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).
2) à tout instant n, si l'individu est en un point M de la grille, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M, de façon à être à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des points M' de la grille distants d'une arête du point M.
On prendra garde au fait que selon les points M choisis parmi les 25 points de la grille, le nombre des points M' situés à une arête de M sur cette grille peut être égal à 2, 3 ou 4.

5°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (Y_n)
Pour tout entier naturel n, on note Y_n la variable aléatoire indiquant la position de l'individu à l'instant n. Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 2\,\text{B}, 3, 4\}$.
a) Expliciter $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2\,\text{B})$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 4)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2\,\text{B})$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.

b) Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{n+1}=0) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1}=1) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1}=2) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1}=2\,\mathrm{B}) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1}=3) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1}=4) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_n=0) \\ \mathbb{P}(Y_n=1) \\ \mathbb{P}(Y_n=2) \\ \mathbb{P}(Y_n=2\,\mathrm{B}) \\ \mathbb{P}(Y_n=3) \\ \mathbb{P}(Y_n=4) \end{pmatrix}.$$

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^6$ dont les composantes sont, de haut en bas, les réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2\,\mathrm{B})$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.
Préciser V_0, V_1, V_2, V_3, puis $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \le n \le 3$, et vérifier enfin que $\mathbb{P}(Y_4 = 0) = \frac{7}{48}$.

6°) *Calcul des probabilités* $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ *de passage à l'origine*

a) Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres de M sont $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.
Etudier si la matrice M est diagonalisable.

b) Dans la suite, on désigne par P une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.
Expliciter la matrice $D = P^{-1}\,M\,P$, et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir que $V_n = P\,D^n\,P^{-1}\,V_0$.
Déduire de cette formule l'existence de 4 nombres réels α, β, γ, δ tels que :

$$\forall\, n \ge 1, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n + \delta\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n.$$

c) En exploitant les valeurs de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \le n \le 4$ obtenues en 5°), calculer α, β, γ, δ.
En déduire, pour tout entier $n \ge 1$, que $\mathbb{P}(Y_{2n-1} = 0) = 0$ et que $\mathbb{P}(Y_{2n} = 0) = \frac{1}{10} + \frac{27}{55}\left(\frac{11}{36}\right)^n$.

7°) *Nombre moyen de passages en 0 entre les instants 1 et 2n*

Pour tout entier $k \ge 0$, on note O_{2k} la variable aléatoire valant 1 si l'individu est en 0 à l'instant $2k$ et 0 sinon, et pour tout entier $n \ge 1$, on pose : $S_{2n} = O_2 + O_4 + \ \dots\ + O_{2n} = \sum_{k=1}^{n} O_{2k}$.

a) Qu'indique concrètement la valeur prise par la variable aléatoire S_{2n}?

b) Calculer l'espérance de S_{2n}, et préciser deux réels a, b tels que $\mathbb{E}(S_{2n}) = a\,n + b + o(1)$.

8°) *Probabilités-limites des positions occupées par l'individu lorsque n tend vers* $+\infty$

a) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = 1$ dont la 1ère composante est 1.

b) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = -1$ dont la 1ère composante est 1.
Dans la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M, on choisit pour 1ère et 2ème colonnes les vecteurs propres ainsi obtenus en 8.a) et 8.b).
(On ne précisera pas les 4 colonnes suivantes de P associées aux 4 autres valeurs propres de M).

c) On admettra qu'en résolvant le système d'équations $P\,X = V_0$, les deux premières composantes du vecteur solution $X = P^{-1}\,V_0$ sont égales à $\frac{1}{20}$.
Déduire des résultats précédents les limites des vecteurs V_{2n} et V_{2n+1} lorsque n tend vers $+\infty$.
Expliciter les limites des probabilités des positions occupées par l'individu à l'instant $2n$ lorsque n tend vers $+\infty$, et à l'instant $2\,n+1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Samedi 13 Avril 2019

EPREUVE : MATHEMATIQUES

MP/ PC/ PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours 2019

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \dots .$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2. Puis on introduit dans la partie III des intégrales auxiliaires afin d'obtenir de façon plus générale des équivalents de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

■ PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction* S_1

a) Etudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions* S_α ($\alpha > 0$)

a) Examiner pour $x \leq 0$ la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2\, e^{-x\,n^\alpha}$.
En déduire la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3°) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]\,0, +\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leq y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

c) A l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que $\lim_{x \to +\infty} S_\alpha(x) = 1$.

d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^\alpha}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.
Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0?

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall\, x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4\,x} + e^{-9\,x} + e^{-16\,x} + \ldots .$$

4°) *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0*

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x\,(n+1)^2} \le \int_n^{n+1} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \le e^{-x\,n^2}.$$

b) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :

$$S_2(x) - 1 \le \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \le S_2(x).$$

c) Retrouver alors $\lim_{x\to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

5°) *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$*

a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \le \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$ en $+\infty$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

6°) *Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$ pour $x > 0$*

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \le \int_N^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} \le \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x\,N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \le \frac{e^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.

d) Préciser une valeur approchée de $S_2(1)$ à 10^{-7} près.

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) *Comparaison de deux intégrales*

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

a) Pour quelles valeurs de α les intégrales $\int_0^1 e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ convergent-elles?
En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = x\,t^{\alpha}$.

Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$?

8°) *Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$)*

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \;\leq\; S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} \;\leq\; 1.$$

b) Retrouver $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x)$, puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

9°) *Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$)*

a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{\alpha\,x^{1/\alpha}}\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u.$$

b) Etablir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \;=\; e^{-x}\,x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u.$$

Justifier ensuite l'inégalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u \;\leq\; \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u$$

En déduire enfin l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \;\underset{x \to +\infty}{\sim}\; e^{-x}\,x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

c) En conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

10°) *Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$)*

a) Etablir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^{\alpha}} \;\leq\; \int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

EPITA IPSA ESME

CONCOURS

CPGE

EPITA / IPSA / ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS

POUR VOUS PRÉPARER À UNE MULTITUDE DE MÉTIERS

Samedi 7 Avril 2018

<u>EPREUVE : MATHEMATIQUE</u>

MP / PC / PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

E.P.I.T.A. 2018

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Dans ce problème, on désigne par f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on étudie en fonction de diverses hypothèses l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, si elle existe :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la partie III, on revient par d'autres méthodes sur le calcul de certaines de ces intégrales.

■ PARTIE I : Etude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

Dans toute cette partie, on suppose que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1°) *Etude d'un cas particulier*

Dans cette question, on donne deux réels p et q et on suppose que la fonction f est définie par :

$$\forall\, t \geq 0, \quad f(t) = \frac{p\,t^2 + q}{t^2 + 1}.$$

a) Etablir, pour $x > 0$, qu'il existe des réels a_x et b_x, qu'on exprimera en fonction de x, tels que :

$$\forall\, t > 0, \quad \frac{f(x\,t) - f(t)}{t} = (p - q)\left(\frac{a_x\,t}{x^2\,t^2 + 1} - \frac{b_x\,t}{t^2 + 1}\right).$$

b) En posant $u = t^2$, calculer pour tout réel $A \geq 0$ l'intégrale $\int_0^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $F(x)$.

c) Exprimer $L = \lim_{t \to +\infty} f(t)$ et $f(0)$ à l'aide de p et q, puis $F(x)$ en fonction de $f(0)$, L et $x > 0$.

2°) *Etude de F(x) pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$*

On rappelle que, dans cette partie, la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

a) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^{\varepsilon\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b) En effectuant un changement de variables dans ces deux dernières intégrales, en déduire que :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(A\,t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

c) Etablir qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ ayant une limite finie L en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

d) A l'aide du théorème de convergence dominée, dont on vérifiera soigneusement les hypothèses, déterminer la limite de $\int_1^x \frac{f(A\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque A tend vers $+\infty$ et de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque ε tend vers 0.

e) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.
Comparer le résultat ainsi obtenu au résultat particulier obtenu à la question 1°.

3°) *Application aux cas où $f(t) = \mathrm{Arctan}(t)$ et $f(t) = e^{-t}$*

a) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \mathrm{Arctan}(t)$.
Que vaut l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(a\,t) - \mathrm{Arctan}(b\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ où a et b sont strictement positifs?

b) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$.

■ PARTIE II : Etude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

Dans toute cette partie, on suppose que l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

4°) *Etude du cas particulier où l'intégrale impropre* $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge*

On suppose plus spécifiquement dans cette question que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) A l'aide d'un changement de variables, déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.

5°) *Application au cas où* $f(t) = \sin(t)$

a) Démontrer la relation suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) Déterminer la limite de $\frac{1-\cos(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0, puis vers $+\infty$.

c) Déterminer la limite de $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ lorsque t tend vers 0, puis justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, et enfin la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \sin(t)$.

6°) *Etude de F(x) pour x* > 0 *lorsque l'intégrale impropre* $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge*

On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) En raisonnant comme à la question 2°, démontrer l'égalité suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Déterminer la limite de $\int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ lorsque A tend vers $+\infty$.

c) Déterminer comme à la question 2° la limite de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque ε tend vers 0.

d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.

7°) *Application aux cas où* $f(t) = e^{i\,t}$ *et* $f(t) = \cos(t)$

a) Démontrer la relation suivante pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{i\,t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i\,t}}{i\,t}\right]_1^A - i\int_1^A \frac{e^{i\,t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire, en la justifiant soigneusement, la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\,t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{i\,t}$, puis lorsque $f(t) = \cos(t)$.

■ PARTIE III : Une autre méthode de calcul lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$

Dans cette partie, on considère les deux intégrales suivantes pour $x > 0$:

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \quad ; \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

On a démontré leur existence et déterminé leurs valeurs par une première méthode dans I et II.
On se propose de retrouver ces résultats *par une autre méthode, indépendante des précédentes*.
A cet effet, on introduit pour tout réel $x > 0$ et tout réel $R \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$U(x, R) = \int_0^{R} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \quad ; \quad V(x, R) = \int_0^{R} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

8°) *Etude des fonctions U et V*

a) Déterminer les limites des fonctions $t \longrightarrow \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}$ et $t \longrightarrow \frac{e^{itx}-e^{it}}{t}$ quand t tend vers 0.
On prolonge alors ces fonctions en 0 par ces limites, de sorte qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire, pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, l'existence des intégrales $U(x, R)$ et $V(x, R)$, puis préciser les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial R}(x, R)$ et $\frac{\partial V}{\partial R}(x, R)$.

9°) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$*

a) Justifier la convergence de l'intégrale $u(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que la fonction u est de classe C^1 sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Donner l'expression (sans intégrale) de $u'(x)$ pour tout $x > 0$.

c) En remarquant la valeur de $u(1)$, en déduire la valeur de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.

10°) *Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$*

Pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, on introduit l'intégrale suivante :

$$\varphi(x, R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xRe^{-it}}\, \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la fonction $R \longrightarrow \varphi(x, R)$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
Donner l'expression de sa dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R)$ sous forme intégrale pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$,
puis calculer cette dernière intégrale en primitivant la fonction sous le signe intégral.

b) Vérifier l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x, R) - \frac{\partial V}{\partial R}(x, R) = i\,\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) - i\,\frac{\partial \varphi}{\partial R}(1, R).$$

En déduire l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$U(x, R) - V(x, R) = i\,\varphi(x, R) - i\,\varphi(1, R).$$

c) Pour tout $x > 0$, déterminer la limite de $\varphi(x, R)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

d) En déduire pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale $v(x)$ et l'égalité $u(x) = v(x)$.
Retrouver ainsi les résultats obtenus dans les parties I et II lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$.

CONCOURS D'ENTRÉE
CYCLE INGENIEUR

<u>EPREUVE : MATHEMATIQUES</u>

MP / PC / PSI

Samedi 15 Avril 2017

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

EPREUVE : MATHEMATIQUES Concours EPITA / IPSA 2017

MP / PC / PSI

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f. Puis on étudie dans les parties II et III le comportement de f au voisinage de 0 et 2. Enfin, dans la partie IV (qui est indépendante des précédentes), on calcule l'intégrale $f(1)$.

■ PARTIE I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

1°) *Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

a) Donner un équivalent de la fonction $t \longrightarrow \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.

b) En déduire pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2°) *Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

b) Vérifier que la fonction $t \longrightarrow |\sin(t)|$ est π-périodique, et en déduire, pour tout entier k, la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

En déduire pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$ que :

$$\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

d) Préciser pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3°) *Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Etudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geq \pi$:

$$\int_\pi^{x} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \int_\pi^{x} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}}$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4°) *Domaine de définition de la fonction f*

Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.
Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

■ PARTIE II : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose dans cette partie d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

5°) *Limite de l'intégrale* $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) Justifier l'inégalité $0 \leq \sin(t) \leq t$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée (dont on précisera l'énoncé et dont on vérifiera les hypothèses) la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\,.$$

6°) *Limite de l'intégrale* $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) A l'aide d'une double intégration par parties, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t.$$

b) Calculer l'expression $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}}$, puis déterminer sa limite quand α tend vers 0.

En déduire la limite de $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, quand α tend vers 0.

c) Déduire de cette question et de la précédente la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
Peut-on obtenir cette limite par application directe du théorème de convergence dominée à l'intégrale $f(\alpha)$?

■ Partie III : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7°) *Une autre expression de la fonction f*

a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'une intégration par parties justifiée, établir que :

$$f(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0, 2[$.

8°) *Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2*

On considère la fonction auxiliaire φ définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$.

a) Quelle est la limite L de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0?
On posera désormais $\varphi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction φ reste strictement positive sur $[0, \pi]$, et justifier qu'elle admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).

c) Etablir les inégalités suivantes :

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t \;\geq\; \alpha\, \mu\, \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

■ Partie IV : Calcul de l'intégrale $f(1)$

9°) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t.$$

b) Préciser la valeur de I_0, et prouver qu'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.
Quelle est la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0?
On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que ψ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t)\, \mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\, \mathrm{d}u.$$

10°) *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe C^1*

On considère une fonction g de classe C^1 du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

A tout entier naturel n, on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t)\, \mathrm{d}t.$$

a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t)\, \mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

c) En admettant, ce que l'on ne demande pas de vérifier ici, que la fonction continue ψ introduite à la question 9.c) est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.