e3a

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, ..., e_{2n})$ la base canonique de E.
Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5. Montrer que :
i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda\, L(P)\, X.$$

6.1. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.

6.2. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.

6.3. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions **4.** et **5.**

6.4. Déterminer les valeurs propres de T_λ.

6.5. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

6.6. Justifier que T_λ est un automorphisme de E.

6.7. Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

6.8. Déterminer T_λ^{-1}.

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.

1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.
On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $T = XZ$.

3.1. Préciser $T(\Omega)$.

3.2. Soit k un entier naturel.
En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

3.3. Déterminer la loi de T.

3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?
On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2.

*****

Soit $\alpha \in]0, 1[$.
On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geqslant 1$.

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

2.1. Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2.2. Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ'.

2.3. Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[, \ |\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1 + \alpha\, t^\alpha}{t^2}$.

2.4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall t \in [n, n+1],\ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t-n|.$$

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que l'on a : $\forall\, n \geqslant 1,\ |u_n - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4. Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

4.1. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. En déduire que la série de terme général u_n converge.

7. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

9. *On suppose* que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ est convergente.

9.1. Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On procédera comme à la question **4.2**.

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(2\,n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} P(n)\, Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n)\, Q(n)$.

2.1. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha\, 2^{-n}$.

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

4.2. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

5. Déjà, $\mathrm{Im}(L) \subset \mathbb{R}$. De plus, L est linéaire par linéarité de l'intégrale. Donc L est bien une forme linéaire sur E.

6. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned} L(e_k) &= \int_{-1}^{1} t^k \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k+1}(1-(-1)^{k+1}) \end{aligned}$$

donc $L(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$

7. Comme $L(e_0) \neq 0$, L est une forme linéaire non nulle. Donc $\mathrm{Ker}(L)$ est un hyperplan de E qui est de dimension $2n+1$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2n$.

8. D'une part, le vecteur e_1 est bien dans $\mathrm{Ker}(L)$ car 1 est impair. De plus, e_1 est un vecteur non nul, donc forme une famille libre de $\mathrm{Ker}(L)$ qui est de dimension finie. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille (e_1) en une base $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Ker}(L)$.

9. i) Soit $P \in \mathrm{Ker}(L)$:

$$(e_0|P) = \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = L(P) = 0$$

donc $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont orthogonaux.

ii) Comme ces deux sous-espaces sont orthogonaux, ils sont en somme directe. Or, $\dim(\mathrm{Vect}(e_0)) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1 + 2n = \dim(E)$, donc $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

10. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda\, L(P)\, X$$

10.1. Soient $P, Q \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$T_\lambda(\mu P + Q) = (\mu P + Q) + \lambda\, L(\mu P + Q)\, X = \mu(P + \lambda\, L(P)\, X) + Q + \lambda\, L(Q)\, X$$

par linéarité de L. Donc T_λ est linéaire.
Puis, pour tout $P \in E$, $\deg(T_\lambda(P)) \leqslant \max(\deg(P), 1) \leqslant 2n$, car $n \neq 0$. Donc T_λ est bien un endomorphisme de E.

10.2. Soit $P \in E$.

$$(L \circ T_\lambda)(P) = L(P + \lambda\, L(P)\, X) = L(P)(1 + \lambda\, L(X)) = L(P).$$

car $X \in \mathrm{Ker}(L)$.

10.3. Notons M la matrice de taille $2n+1$ demandée :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.4. La matrice M étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Donc la seule valeur propre de T_λ est 1.

10.5. Si T_λ était diagonalisable, M serait semblable à l'identité. Or, la seule matrice semblable à l'identité est elle-même. Donc T_λ est diagonalisable si et seulement si $\lambda = 0$.

10.6. La matrice M est de déterminant 1 donc inversible, donc T_λ est un automorphisme de E.

10.7. Soit α et β deux réels, et $P \in E$.

$$T_\alpha \circ T_\beta(P) = T_\beta(P) + \alpha\, L(T_\beta(P))\, X = P + (\beta + \alpha)\, L(P)\, X$$

10.8. Avec la question précédente, on remarque que $T_{-\lambda} \circ T_\lambda = \mathrm{Id}_E$. Donc $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$.

EXERCICE 2

1. **1.1.** On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. On sait que $E(X) = V(X) = \lambda$

1.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

1.3. Deux variables aléatoires sont dites indépendantes pour tout $(x, y) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ on a $\mathbb{P}((X_1 = x) \cap (X_2 = y)) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = y)$. On peut aussi dire $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \mathcal{P}(X_2(\Omega)), \mathbb{P}((X_1 \in A) \cap (X_2 \in B)) = \mathbb{P}(X_2 \in A)\mathbb{P}(X_2 \in B)$

2. **2.1.** On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et on a : $[Y = 0] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k]$ et $[Y = 1] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X = 2k + 1]$.

2.2. De la question précédente, on déduit :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)\,!} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda).$$

De même, $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda)$. On reconnaît une loi de Bernoulli, on a donc $E(Y) = e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda)$.

3. Étude de la variable aléatoire T.

3.1. On a $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

3.2. On sait que les évènements $[Z = 1], [Z = 2]$ forment un système complet d'évènements. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}([Z = 1] \cap [T = k]) + \mathbb{P}([Z = 2] \cap [T = k]) \\ &= \mathbb{P}([Z = 1] \cap [X = k]) + \mathbb{P}([Z = 2] \cap [2X = k]) = \frac{1}{2}\,(\mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(2X = k))\end{aligned}$$

par indépendance.

3.3. De la question précédente, on déduit :

- Si $k = 2p$, alors $\mathbb{P}(T = 2p) = \dfrac{1}{2}\,(\mathbb{P}(X = 2p) + \mathbb{P}(X = p)) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\dfrac{\lambda^{2p}}{(2p)\,!} + \dfrac{\lambda^p}{(p)\,!}\right]$
- Si $k = 2p + 1$, alors $\mathbb{P}(T = 2p + 1) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(X = 2p + 1) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(2X = 2p + 1) =$
$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\dfrac{\lambda^{2p+1}}{(2p + 1)\,!}\right]$

3.4. L'évènement $A = [\text{"}T \text{ prend des valeurs paires"}]$ s'écrit : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[T = 2k]$.

On a donc (réunion d'évènements incompatibles) :

$\displaystyle\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[T = 2k]\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T = 2k) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)\,!} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}}{(k)\,!} =$

$\displaystyle\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2\lambda} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{ch}(\lambda) + e^{\lambda}\right)$.

EXERCICE 3

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme générique $a_n = \dfrac{\sin n^{\alpha}}{n}$, $n \geqslant 1$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{cases} x^2 \leq x \text{ si } x \in [0, 1] \\ x \leq x^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin t^{\alpha}}{t}$.

2.1. La fonction $t \mapsto \sin(t^{\alpha})$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sa dérivée sur $[1, +\infty[$ est $t \mapsto \alpha t^{\alpha-1}\cos(t^{\alpha})$.

2.2. φ est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $t \geqslant 1$, on a $\varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\,\sin(t^{\alpha}) + \alpha\,\dfrac{\cos(t^{\alpha})}{t^{2-\alpha}}$.

2.3. Par inégalité triangulaire, pour tout $t \geqslant 1$, $|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{\alpha}{t^{2-\alpha}}$.

2.4. Soit $n \geqslant 1$ et soit $t \in [n, n+1]$. On applique le théorème des accroissement finis entre t et n : Il existe $t_0 \in [n, n+1]$ tel que $|\varphi(t) - \varphi(n)| = |\varphi'(t_0)| \times |t - n|$. Or, d'après la question précédente, on a $|\varphi'(t_0)| \leq \dfrac{1 + \alpha t_0^{\alpha}}{t_0^2} = \dfrac{1}{t_0^2} + \dfrac{\alpha}{t_0^{2-\alpha}} \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ car $2 - \alpha > 0$.

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

On a pour tout n : $u_n - a_n = \displaystyle\int_n^{n+1}\left[\varphi(t) - \varphi(n)\right]\,\mathrm{d}t$

et donc, par inégalité triangulaire et d'après la question précédente :

$$|u_n - a_n| \leqslant \int_n^{n+1}(t - n)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

4. **4.1.** La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

4.2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $X \in [1, +\infty[$. Le crochet $\left[-\dfrac{\cos(t)}{t}\right]_1^X$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, d'après la question précédente, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est bien intégrable.

On peut aussi écrire : Soit $X \in [1, +\infty[$.

Par une intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^{X} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Le crochet possède une limite finie lorsque X tend vers l'infini. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. En effectuant le changement de variable $u = t^\alpha$ (qui est C^1 et strictement croissant car $\alpha > 0$) les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge puisque sa somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_1^{n+1} \varphi(t)\mathrm{d}t$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge.

7. D'après la question **3.**, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_n - a_n)$ converge absolument car $2 - \alpha > 1$.

8. Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum (u_n - a_n)$ convergent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge en tant que différence de deux séries convergentes.

9. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ est convergente.

9.1. Puisque l'on a : $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leqslant \dfrac{|\sin(n^\alpha)|}{n}$ et d'après ce que l'on a supposé, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente par le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

9.2. Soit $X \in [1, +\infty[$, par une intégration par parties, on a

$$\int_1^{X} \frac{\cos(2x)}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2x}\right]_1^X + \int_1^{X} \frac{\sin(2x)}{2x^2}\mathrm{d}x$$

Comme le crochet admet une limite finie, on en déduit que les deux intégrales sont de même nature. Or $\dfrac{\sin(2x)}{2x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est convergente. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

9.3. En utilisant alors la formule : $\dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos(2\,n^\alpha)}{2n}$ on obtient que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ n'est pas absolument convergente

.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

On a $|P(n)Q(n)2^{-n}| \sim |a_p b_q| n^{p+q} 2^{-n}$ et $|a_p b_q| n^{p+q} 2^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série est donc absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$.

2.1. L'implication $\Leftarrow$ est claire. Soit S tel que $(S|S) = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} S(n)^2 2^{-n} = 0$. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} S(n)^2 2^{-n}$ est croissante, positive et de limite nulle, elle est donc nulle. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n)^2 2^{-n} = 0$ ce qui implique $S(n) = 0$. Le polynôme S admet une infinité de racines, il est donc nul.

2.2. L'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est symétrique, linéaire par rapport à la première coordonnée donc bilinéaire.
Pour tout $S \in E$, $\sum_{n\geq 0} S(n)^2 2^{-n}$ est une série convergente à termes positifs, sa somme est donc positive. On a montré à la question précédente, que la forme était, de plus, définie positive. On définit donc bien un produit scalaire sur E.

3. **3.1.** La fonction f est définie sur $]-1, 1[$ et sa somme vaut $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, la série est donc convergente lorsque e^{-x} appartient à $]-1, 1[$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^\star$.

3.3. Soit g la fonction définie par $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, on a alors $g(x) = f(e^{-x})$. La fonction f est C^∞ à l'intérieur de son intervalle ouvert de convergence et pour tout $x > 0$, on a $e^{-x} \in]-1, 1[$, g est donc C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition.

3.4. Soit $x > 0$. On a $g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$ donc $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ et $g''(x) = \frac{e^{-x}+e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3}$.

On peut aussi écrire $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, on a alors $g'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$ puis $g''(x) = \frac{e^{2x}+e^x}{(e^x-1)^3}$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

On remarque que $S_0 = g(\ln 2)$, $S_1 = -g'(\ln 2)$ et $S_2 = g''(\ln 2)$. En utilisant les expressions trouvées à la question précédente, on obtient $S_0 = 2, S_1 = 2$ et $S_2 = 6$.

On peut aussi utiliser f. On a $S_0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $S_1 = \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $S_2 = \frac{1}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 6$.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. On a

$$\begin{aligned}
(X^2 - aX - b|1) = 0 = (X^2 - aX - b, X) &\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - an - b}{2^n} = 0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - an^2 - bn}{2^n} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$X^2 - 5X + 2$ est donc orthogonal à 1 et à X.

4.2. L'ensemble $\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c, d) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\|X^2 - P\|^2,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\right\}$ possède un minimum car $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie et ce minimum est le carré de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$. Il est réalisé en le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Or, on a vu à la question précédente que le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $5X - 2$, on a donc

$$\min\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c, d) \in \mathbb{R}^2\right\} = \|X^2 - 5X + 2\|^2$$

4.3. D'après Pythagore, on a

$$\|X^2 - 5X + 2\|^2 + \|5X - 2\|^2 = \|X^2\|^2$$

On a donc

$$\|X^2 - 5X + 2\|^2 = \|X^2\|^2 - \|5X - 2\|^2 = S_4 - (25S_2 - 20S_1 + 4S_0) = 150 - 150 + 40 - 8 = 32$$

La distance recherchée est $4\sqrt{2}$.

* * * * *

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :
- Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, trop lourdement raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**. Les résultats doivent être clairement mis en évidence.
Nous nous interrogeons d'ailleurs sur l'opportunité de mettre des points de présentation.
Il semble que les recherches au brouillon ne sont pas dans la panoplie des méthodes à utiliser pour la réalisation de la composition.
- Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.
- De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent le « le théorème spectrale », « la loi de poisson » etc.
- Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
Dans plusieurs copies les questions ne sont pas traitées dans l'ordre : il n'est pas rare de voir en fin de copie ou en fin de feuille double, des réponses à des questions ébauchées plus haut ou qui avaient été passées.
Parfois, on obtient des réponses à des questions d'un exercice au cours de la résolution d'un autre exercice !
La double numérotation est assez souvent omise : au lieu de la question **2.4.**, on lit question **4.**, puis vient la question **3.**.
- Notons que nous avons de nouveau rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
- Signalons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , encore faut-il les vérifier !
- Cette année, nous avons avons particulièrement remarqué :
* un mauvais usage des parenthèses :
-> dans les calculs d'intégrales : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \lambda P(t) + Q(t)\,\mathrm{d}t$,
-> dans les sommes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + a_n$,

-> dans les factorielles : $2n!$ au lieu de $(2n)!$ etc.
* la fréquente absence des éléments différentiels dans les intégrales,
* l'utilisation de symboles mathématiques comme des abréviations (par exemple : $\mathrm{Ker}(L) \Longrightarrow L(P) = 0_E$)
- La distinction entre « fonction » et « image d'un réel par une fonction » n'est pas souvent faite : très souvent on rencontre des expressions du type « $\sin(t^\alpha)$ est dérivable et sa dérivée vaut ... »
- Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...
- Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PC.
- Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.
- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
En exemple, le Théorème du rang appliqué à une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ prend parfois des formes étranges : $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(A) + \dim(\mathrm{Im}(A))$ ou encore, $\dim(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A) + \dim(\mathrm{Im}(A))$!
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :
* Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
* On trouve encore trop d'équivalents à 0...
- Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.
- Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $t^{p(n+1)} \underset{+\infty}{\sim}$ ... ne veut pas dire grand chose.
- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abordent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

<u>**Conclusion**</u> : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

Nous avons compilé un certain nombres d'erreurs constatées sur les copies qu'il nous semble important de signaler dans ce rapport afin d'espérer ne plus les rencontrer l'an prochain.

• Exercice 1.

Thème de l'exercice : Étude d'une forme linéaire L sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis d'un endomorphisme utilisant L sur cet espace.

- **Q1.** : La justification de « forme » est quasiment toujours omise.
- **Q2.** : Le calcul de $L(e_k)$, n'est pas toujours abouti : les cas k pair et k impair ne sont pas traités.
- **Q3.** : Beaucoup d'étudiants oublient qu'ils manipulent une forme linéaire ce qui les amène à effectuer des calculs longs et fastidieux qui n'aboutissent pas. On voit souvent, pour ceux qui utilisent le théorème du rang, que $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) = 2n$.
  Le fait que la forme linéaire est non nulle est quasiment toujours oublié.
- **Q4.** : Le théorème de la base incomplète est rarement cité.
  Il semble qu'il n'y ait dans $\mathrm{Ker}(L)$ que des vecteurs de la base canonique !
- **Q5.** : Il y a souvent une confusion entre « complémentaire » et « supplémentaire », ce qui amène un candidat à penser qu'il y a une erreur dans l'énoncé puisque le vecteur e_2 n'est ni dans $\mathrm{Vect}(e_0)$, ni dans $\mathrm{Ker}(L)$ et donc, on ne peut avoir $\mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L) = E$.
  Pour montrer que $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont orthogonaux, certains étudiants tentent d'effectuer le produit scalaire $(\mathrm{Vect}(e_0)|\mathrm{Ker}(L)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{Vect}(e_0)\,\mathrm{Ker}(L)\,\mathrm{d}t = 0$ puisque $\mathrm{Vect}(e_0) = 0$!
  Enfin pour montrer que les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont en somme directe, un nombre non négligeable de candidats tente d'établir que $\mathrm{Vect}(e_0) \cap \mathrm{Ker}(L) = \varnothing$
- **Q6.1.** : La partie « stabilité » est souvent escamotée ou simplement énoncée sans justification.
  Il semble y avoir dans l'esprit de certains une confusion entre dimension et degré : $\deg(T_\lambda(P) \leqslant 2n + 1 = \dim(E)$.
- **Q6.2.** : Il reste souvent un terme résiduel $L^2(P)$ dont l'étudiant ne sait que faire.
- **Q6.3.** : La matrice, lorsqu'elle est proposée sans calculs justificatifs est souvent incorrecte : rappelons que tout résultat énoncé dans la copie se doit d'être justifié.
  On trouve aussi parfois des vecteurs e_j dans la matrice.
- **Q6.4.** : Bien traitée pour ceux qui ont la bonne matrice.
- **Q6.5.** : Traitée par très peu de candidats. L'argument : « la matrice de T_λ n'est pas l'identité » est très rarement évoqué.
- **Q7.** et **Q8.** : très rarement abordées.

• **Exercice 2**.

Thème de l'exercice : Exercice de probabilité à partir d'une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson.

- **Q1.1.** : $X(\Omega)$ est régulièrement oublié et dans $\mathbb{P}(X = k)$ on constate souvent l'oubli d'un ou plusieurs facteurs.
- **Q1.2.** : Parmi les fautes les plus courantes : présence d'un $(-1)^k$, oubli des factorielles, interversion entre **sh** et **ch**, domaine égal à $]-1, 1[$,...
- **Q1.3.** : L'indépendance de deux variables aléatoires discrètes semble très mystérieuse pour beaucoup : « lorsqu'elles ne dépendent pas l'une de l'autre ».
  Cette question de cours que nous pensions facile n'a pas permis aux étudiants de rapporter des points.
- **Q2.1.** : Les réunions sont quasiment toujours absentes. Par exemple, (X pair) se traduit par $X = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, sans même un quelconque quantificateur.
- **Q2.2.** : Parmi les étudiants qui effectuent correctement les calculs, $Y(\Omega)$ est rarement rappelé.
- **Q3.1.** : Le produit des supports est parfois écrit, sans simplification.
- **Q3.2.** : Souvent l'évènement $(T = k)$ est exprimé à l'aide d'évènements $(X = j)$ et $(2X = j)$ sans expliciter de lien entre k et j.
- **Q3.3.** : Les cas pairs et impairs ne sont pas toujours distingués.
- **Q3.4.** : Confusion entre $\mathbb{P}(T$ prend des valeurs paires) et $\mathbb{P}(T = 2k)$.

• **Exercice 3**.

Thème de l'exercice : Étude de la convergence simple et absolue d'une série dépendant d'un paramètre.

- **Q1.** : Résultats décevants pour cette question : les cas $x \in [0, 1]$ et $x \geqslant 1$ ne sont pas toujours distingués.
  Une figure permettait de voir efficacement ce qui se passait.
- **Q2.1.** et **Q2.2.** : La continuité voire la continuité par morceaux sert parfois à justifier la dérivabilité.
- **Q2.3.** : La majoration $|\cos(t)| \leqslant 1$ est rare : lui est en général préférée la double inégalité $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, ce qui entraîne de nombreuses erreurs.
  On a souvent rencontré : $|a - b| \leqslant |a| - |b|$!
- **Q2.4.** : L'appel au théorème des accroissements finis n'est pas souvent fait : il est remplacé par la fausse égalité $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(n)}{t - n} = \varphi'(n)$ qui permet d'obtenir l'inégalité demandée.
- **Q3.** : Assez bien réussie dans l'ensemble.
- **Q4.1.** : La valeur absolue est souvent oubliée.
  On lit aussi :
  * les fonctions cos et $\dfrac{1}{t^2}$ sont intégrables sur $[1 + \infty[$ et donc, $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$,
  * $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2} = 0$ et donc, $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$.

- **Q4.2.** : L'intégration par parties généralisée est souvent faite directement sans justification de convergence.
- **Q5.** : Le changement de variable $t = t^\alpha$ ne peut pas fonctionner !
- **Q6.** : La comparaison série/intégrale est souvent évoquée mais, l'écriture $\sum_{n=1}^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ fait alors office de justification de la convergence de la série $\sum u_n$.
- **Q7.** : Attention aux majorations : $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$!
- **Q9.1.** et **9.2.** : Les candidats qui ont abordé cette question pensent bien à utiliser la première question.
  Par contre, souvent, ils ne voient pas de problème de convergence malgré l'apparition de la série harmonique.

• **Exercice 4**.

Thème de l'exercice : Produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$ et projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

- **Q1.** : Question assez mal réussie.
  Malgré l'énoncé qui parlait de convergence absolue, certains candidats oublient les valeurs absolues.
  D'autres pensent qu'il s'agit d'un produit de Cauchy !
  On a noté que beaucoup de candidats ont des difficultés à calculer la valeur prise par un polynôme en un point : si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, le calcul de $P(n)$ pose beaucoup de problèmes.
- **Q2.1.** : Rappelons que ré-écrire l'énoncé ne rapporte pas de point.
  L'argument du polynôme qui possède une infinité de racines est rarement évoqué.
- **Q2.2.** : Le caractère positif est très souvent omis par des candidats qui pensent que cela a été démontré dans la question précédente.
  D'autre tentent en vain de prouver que : $(P|P) \geqslant 0 \Longrightarrow P \geqslant 0$.
- **Q3.1.** : Si la somme de la série géométrique est en général sue il n'en est pas de même de l'ensemble de définition de $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.
- **Q3.2.** : On a remarqué dans cette question des confusions entre les variables : $\mathrm{e}^{-nx} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et comme la série $\sum \dfrac{1}{x^2}$ converge il en est de même de la série $\sum \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x > 0$!
- **Q3.4.** : On retrouve les erreurs classiques sur les puissance : $\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{x}$ et donc $g(x) = \mathrm{e}^{-n} \times f(x)$!
- **Q3.4.** -> **Q4.3.** : Ces questions sont très rarement abordées.
  Signalons cependant que les étudiants qui s'y sont frottés ont en général bien réussi même s'ils ne reconnaissent pas toujours l'utilisation de la projection orthogonale pour calculer la distance demandée.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0 \qquad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3. On pose alors $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\,\mathrm{id}_E$.

3.1. Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

3.2. Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

3.3. Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

3.4. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.1. Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. *On fera apparaître les calculs sur la copie.*

5.2. Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question **3.**

5.3. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.

5.4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul.
Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$.
En déduire un équivalent de $1 - (1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A)\ \ \mathrm{e}^{b\ln(a)} \qquad (B)\ \ \mathrm{e}^{a\ln(b)} \qquad (C)\ \ \mathrm{e}^{\ln(a)\ln(b)}.$$

*****

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

3.1. Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

3.2. Montrer que la série de terme général a_k est convergente.
On notera S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Démontrer que $\forall\, k \geqslant 1$, $u_k > 0$.

4.2. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda\, u_k$, où λ est un réel. Déterminer λ.

4.3. Montrer que X_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(X_n) = S_n$.

5. Pour tout t réel, on pose $f_0(t) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^p$.

5.1. Pour tout entier naturel p, montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5.2. Calculer $I_{p+1} - I_p$ pour tout entier naturel p.

5.3. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.

6. Un encadrement

6.1. Prouver que, pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

6.2. En déduire que : $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall\, t \geqslant 0$, $g_n(t) = 1 - (1 - 2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right)^{n-1}$.

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

8. Soit β un réel strictement positif, montrer que l'on a :

$$\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\beta \ln(2)} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u.$$

9. Démontrer que : $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.

10. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x \mid y >$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E, \;\; \varphi_u(x) = 2\,\frac{< x \mid u >}{< u \mid u >}\, u - x.$$

1. Étude de l'application φ_u

1.1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

1.2. En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

1.3. Soit x appartenant à E, calculer $\langle\, \varphi_u(x) \mid \varphi_u(x)\, \rangle$.

1.4. En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \langle\, \varphi_u(x) \mid \varphi_u(y)\, \rangle = < x \mid y > .$$

1.5. On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u.
En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

1.6. Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.

2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

2.3. Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.
Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Étude d'une réciproque

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall\, x \in \Delta, \;\; \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \Delta^{\perp}, \;\; \psi(x) = -x.$$

3.1. Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Étudier la parité des fonctions I_n .

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout entier naturel n, de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. Calcul de $I_n(0)$

5.1. Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

5.2. En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!}$.

Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.

Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction I_n ?

FIN

Éléments de correction

EXERCICE 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0 \quad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u admet $X^2 - 3X + 2$ pour polynôme annulateur. Il admet pour racines 1 et 2, il est scindé à racines simples, u est donc diagonalisable.

2. Si λ est une valeur propre de u alors, λ est racine de $X^2 - 3X + 2$. Les valeurs propres possibles de l'endomorphisme u sont $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

3. On pose alors $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\,\mathrm{id}_E$.

3.1. On remarque que pour tout $x \in E$, $(v - w)(x) = x$, donc $v - w = \mathrm{id}_E$.
On veut montrer que $E \subset \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$. Soit donc $x \in E$, on a

$$x = \underbrace{v(x)}_{\in \mathrm{Im}(v)} + \underbrace{w(-x)}_{\in \mathrm{Im}(w)},$$

ce qui montre l'inclusion $E \subset \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$. On a donc bien l'égalité souhaitée étant donné que l'autre inclusion est toujours vraie.

3.2. On a :

$$v \circ w = (u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\mathrm{id}_E) = u^2 - 3u + 2\mathrm{id}_E = 0$$

et $w \circ v = v \circ w = 0$.

3.3. Soit $x \in \mathrm{Im}(w)$, il existe $a \in E$ tel que $x = w(a)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(v)$. On a

$$v(x) = v(w(a)) = v \circ w(a) = 0_E$$

d'après la question précédente. On a donc bien $x \in \mathrm{Ker}(v)$ d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
Soit maintenant $x \in \mathrm{Im}(v)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = v(a)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(w)$. On écrit, comme ci-dessus :

$$w(x) = w(v(a)) = w \circ v(a) = 0_E,$$

toujours d'après la question précédente. On a donc bien $x \in \mathrm{Ker}(w)$ d'où $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

3.4. D'après la question précédente, on a l'inclusion

$$\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(w) + \mathrm{Ker}(v).$$

Or, on a montré à la question **3.1.**, que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$, on a donc l'égalité :

$$E = \mathrm{Ker}(w) + \mathrm{Ker}(v).$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w)$. Alors

$$v(x) = 0_E = w(x)$$

donc $v(x) - w(x) = 0_E$. Or $v(x) - w(x) = x$, on a donc $x = 0_E$, ce qui montre que la somme est directe.

4. En choisissant une base de E adaptée à la somme directe $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{v}) \oplus \mathrm{Ker}(w)$, on aura une matrice diagonale car $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Ker}(w)$ sont des sous-espaces propres de u.

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.1. On a

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } 3U - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On a donc $U^2 = 3U - 2I_3$ et u satisfait bien à la relation ($\star$).

5.2. Par linéarité de la matrice associée à un endomorphisme, on sait que $V = U - I_3$ et $W = U - 2I_3$. On a donc

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

5.3. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a

$$V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} .$$

Une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ est donc $\mathcal{B}_1 = (e_1 + e_3)$

On a également :

$$W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y.$$

Une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(w)$ est donc $\mathcal{B}_2 = (e_3, e_1 + e_2)$.

5.4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Par la formule du changement de base, $P^{-1}UP$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ c'est-à-dire la matrice diagonale D. On a donc bien $U = PDP^{-1}$.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul. On a $(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$. On en déduit que

$$1-(1-x)^\alpha \underset{0}{\sim} \alpha x$$

2. C'est la réponse (A) : $a^b = \mathrm{e}^{b\ \ln(a)}$:

* * * * * *

Soit n un entier supérieur ou égal à 2

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

3.1. La série $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite $(a_k)_{k\in N}$ admet une limite finie car c'est une série télescopique. Or

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

donc la série est bien convergente et sa somme vaut $a_0 - \lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 1$.

3.2. D'après la question **1.**, on a $a_k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n-1}{2^k}$.
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général a_k est de même nature qu'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc convergente.

4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{1}{2^{k+1}} < \dfrac{1}{2^k} \leq 1$ puis $0 \leq 1 - \dfrac{1}{2^k} < 1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
On a donc $\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1} < \left(1-\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)^{n-1}$ et enfin $1-\left(1-\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)^{n-1} < 1-\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$.
La suite (a_k) est donc strictement décroissante, on a donc bien $\forall k \geq 1, u_k > 0$.

4.2. On a vu que $\forall k \in \mathbb{N}^\star, u_k > 0$. Le réel λ doit être tel que la somme de la série de terme général λu_k soit égale à 1. On a vu à la question **3.1.** que la série $\sum u_k$ a pour somme 1. Il faut donc $\lambda = 1$.

4.3. On doit montrer que la série de terme général ku_k est convergente et déterminer sa somme. On fixe $N \geq 1$ et on écrit

$$\sum_{k=1}^{N} ku_k = \sum_{k=1}^{N}(ka_{k-1} - ka_k).$$

On veut faire apparaître une somme télescopique, on écrit donc

$$\sum_{k=1}^{N}(ka_{k-1} - ka_k) = \sum_{k=1}^{N}((k-1)a_{k-1} - ka_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{k-1}.$$

La première somme est télescopique et on fait un changement d'indice dans la seconde, on obtient
$$\sum_{k=1}^{N} ku_k = -Na_N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i.$$
On a $Na_N \sim \dfrac{(n-1)N}{2^N}$ d'après la question **1.**. On a donc $\lim\limits_{N\to+\infty} Na_N = 0$ et on a déja montré que la série $\sum a_i$ converge. Le membre de gauche admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ donc X_n admet une espérance. On la calcule en faisant tendre N vers $+\infty$:
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k = S_n.$$

5. **5.1.** Pour $p = 0$, la convergence est immédiate. Prenons donc $p \in \mathbb{N}^*$.
La fonction f_p est continue sur $\mathbb{R}^+$. En $+\infty$, on a $f_p(t) \sim pe^{-t}$ en utilisant l'équivalent de la question **1.**. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et positive, on en déduit que f_p est intégrable sur $[1, +\infty[$ est convergente. Ainsi, l'intégrale I_p est bien convergente.

5.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors, les deux intégrales étant convergentes, on a
$$I_{p+1} - I_p = \int_0^{+\infty} \left(1 - (1-\mathrm{e}^{-t})^{p+1} - (1 - (1-\mathrm{e}^{-t})^p)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,(1-e^{-t})^p \,\mathrm{d}t$$
Une primitive de $t \mapsto e^{-t}\,(1-e^{-t})^p$ est $t \mapsto \dfrac{1}{p+1}(1-e^{-t})^{p+1}$. On a donc :
$$I_{p+1} - I_p = \frac{1}{p+1}.$$

5.3. On a montré à la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+1} - I_p = \dfrac{1}{p+1}$. On somme ces égalités pour p variant de 0 à $n-2$:
$$\sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-2} \left(I_{p+1} - I_p\right).$$
La somme de droite est télescopique, on obtient donc :
$$\sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = I_{n-1} - I_0.$$
On remarque que $I_0 = 0$ puisque l'on a posé $\forall t \in \mathbb{R}, f_0(t) = 0$. Par ailleurs, après changement d'indice, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. On a donc bien l'égalité souhaitée :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$$

6. **Un encadrement**

6.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

6.2. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

On somme ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient, en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

donc $[\ln(t)]_1^n \leq I_{n-1}$ puis

$$\ln(n) \leq I_{n-1}.$$

Montrons l'autre inégalité. On sait que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. On somme ces inégalités pour k variant de 1 à $n-2$, on obtient, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n-1),$$

en calculant l'intégrale. Or, par changement d'indice dans la somme,

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} = I_{n-1} - 1.$$

On a donc $I_{n-1} - 1 \leq \ln(n-1)$ puis

$$I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1).$$

On a donc bien l'encadrement souhaité.

7. On commence par remarquer que la fonction g_n est décroissante. En effet, $t \mapsto 2^{-t}$ est décroissante donc $t \mapsto 1 - 2^{-t}$ est croissante.
La fonction $t \mapsto (1-2^{-t})^{n-1}$ est également croissante donc $t \mapsto -(1-2^{-t})^{n-1}$ est décroissante et enfin g_n est décroissante.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la fonction g_n, on a, pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$a_{k+1} \leq g_n(t) \leq a_k,$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq a_k$$

On somme ces inégalités pour k variant de 0 à $m-1$, on obtient, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} \leq \int_0^m g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

On remarque que, par changement d'indice dans la première somme, on a

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

On a donc bien l'encadrement souhaité.

8. Soit β un réel strictement positif. On fait le changement de variable $u = \ln(2)v$ dans l'intégrale $\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v$. On sait que v varie de 0 à β donc u varie de 0 à $\ln(2)\beta$. On a $\mathrm{d}u = \ln(2)\mathrm{d}v$ donc $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\ln(2)}$ et $u = \ln(2)v$ donc $e^u = 2^v$. On a donc

$$\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{\beta\ln(2)} \left(1-(1-e^{-u})^{n-1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{\beta\ln(2)} f_{n-1}(u)du.$$

On a bien l'égalité souhaitée.

9. On sait que $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ d'après la question **4.3.**. On fait tendre m vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question **7.** :

$$-1 + \sum_{k=0}^{m} a_k \leq \int_0^m g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k,$$

ce qui est possible car les séries convergent.
On obtient

$$\mathbb{E}(X_n) - 1 \leq \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \mathbb{E}(X_n).$$

Or, en faisant tendre β vers $+\infty$ dans la question précédente, l'intégrale de f_n sur $[0,+\infty[$ étant convergente, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t = \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}.$$

On a donc bien

$$\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n)$$

10. On a vu que

$$\ln(n) \leq I_{n-1} \leq \ln(n-1) + 1,$$

donc

$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)},$$

et $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc $\frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} \to 1$. Par encadrement, on en déduit que $I_{n-1} \sim \ln(n)$.
En particulier. $I_n \to +\infty$.
On reprend maintenant l'encadrement trouvé à la question précédente, on le réécrit sous la forme

$$\frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq \mathbb{E}(X_n) \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} + 1.$$

On a donc $\mathbb{E}(X_n) \sim \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}$ donc $\mathbb{E}(X_n) \sim \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$.
Enfin, comme $\mathbb{E}(X_n) = S_n$, on a trouvé un équivalent simple de S_n en $+\infty$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E sera noté $< x|y >$ et $||x||$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x$$

1. Étude de l'application φ_u

1.1. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_u(\lambda x + y) &= 2\,\frac{< \lambda x + y\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - (\lambda x + y) \\
&= 2\,\frac{\lambda < x\,|\,u > + < y\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - \lambda x - y \\
&= 2\,\frac{\lambda < x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u + 2\,\frac{< y\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - \lambda x - y \\
&= \lambda\varphi_u(x) + \varphi_u(y).
\end{aligned}$$

Donc φ_u est bien un endomorphisme de E.

1.2. On remarque déjà que $\varphi_u(u) = u$. Puis, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\varphi_u \circ \varphi_u(x) &= \varphi_u\left(2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x\right)\\
&= 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\varphi_u(u) - \varphi_u(x)\\
&= 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}u - 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u + x\\
&= x
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{id}_E$. Donc φ_u est un automorphisme de E et $\varphi_u^{-1} = \varphi_u$.

1.3.

$$\begin{aligned}
\langle\, \varphi_u(x)\,|\,\varphi_u(x)\,\rangle &= \left\langle 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x \;\middle|\; 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x \right\rangle\\
&= 4\,\frac{< x\,|\,u >^2}{< u\,|\,u >^2} < u\,|\,u > -4\,\frac{< x\,|\,u >^2}{< u\,|\,u >} + < x\,|\,x >\\
&= < x\,|\,x > = \|x\|^2
\end{aligned}$$

1.4. D'après la question précédente, φ_u est une isométrie. Elle conserve donc le produit scalaire.

1.5. Comme $D_u = \mathrm{Vect}(u)$, on a $\varphi_u(D_u) = \mathrm{Vect}(\varphi_u(u)) = \mathrm{Vect}(u) = D_u$.
Comme D_u est stable par φ_u et que φ_u est une isométrie, $H_u = D_u^{\perp}$ est stable par φ_u.

1.6. Comme $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{id}_E$ et φ_u est linéaire, φ_u est une symétrie. Comme c'est une isométrie, φ_u est une symétrie orthogonale. De plus, pour tout $x \in E$,

$$\varphi_u(x) = -x \iff < x\,|\,u >= 0$$

donc φ_u est la symétrie orthogonale par rapport à D_u.

2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$.
Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

2.1. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $H = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, < X\,|\,u >= 0\right\} = D_u^{\perp}$. Autrement dit, $H^{\perp} = D_u$ est de dimension 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}u$ en est une base orthonormale.

2.2. Soit p' la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ et notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $p'(x) = \left\langle x \;\middle|\; \dfrac{u}{\sqrt{3}} \right\rangle \dfrac{u}{\sqrt{3}}$.

En particulier, $p'(e_1) = \frac{1}{3}u = p'(e_2) = p'(e_3)$. Ainsi, la matrice de p' dans la base canonique est :

$$M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, la matrice M de la projection orthogonale p sur H dans la base canonique est :

$$M = I_3 - M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3. Prenons $v = \frac{1}{\sqrt{3}}u$. Comme φ_v est la symétrie orthogonale par rapport à $D_v = H^\perp$, on a $\varphi_v = \mathrm{id}_E - 2p$. La matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$-I_3 + 2M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Étude d'une réciproque

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall\, x \in \Delta,\ \ \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \Delta^\perp,\ \ \psi(x) = -x$$

3.1. Soit $x \in E$. Alors il existe $a \in \Delta$ et $b \in \Delta^\perp$ tels que $x = a+b$. Donc $\psi(x) = \psi(a)+\psi(b) = a-b$, puis, $\psi \circ \psi(x) = \psi(a-b) = a+b = x$. Donc $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$.
Puis, $< \psi(x)\,|\,\psi(x) >=< a-b\,|\,a-b >=< a\,|\,a > + < b\,|\,b >$ car a et b sont orthogonaux. De plus, $< x\,|\,x >=< a+b\,|\,a+b >=< a\,|\,a > + < b\,|\,b >=< \psi(x)\,|\,\psi(x) >$.
Ainsi, ψ est une isométrie, donc conserve le produit scalaire.

3.2. D'après la question précédente, ψ est la symétrie orthogonale par rapport à Δ. Prenons donc $u \in \Delta$ non nul, de sorte que $\Delta = D_u$. D'après la question **1.6.**, φ_u est la symétrie orthogonale par rapport à $D_u = \Delta$, donc $\varphi_u = \psi$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Comme le cosinus est pair,

$$I_n(-x) = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(-xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(xt)\,\mathrm{d}t = I_n(x)$$

Donc I_n est paire.

2. Soit $f : (x,t) \mapsto \left(1-t^2\right)^n \cos(tx)$:
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$;
- pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\left(1-t^2\right)^n \sin(xt)$ est continue sur $[0,1]$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$, et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, la fonction I_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $I_n'(x) = -\displaystyle\int_0^1 t\left(1-t^2\right)^n \sin(xt)\,\mathrm{d}t$. On effectue une intégration par parties en primitivant $t \mapsto -t\left(1-t^2\right)^n$ et en dérivant $t \mapsto \sin(xt)$:

$$\begin{aligned} I_n'(x) &= \left[\frac{1}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1}\sin(xt)\right]_0^1 - \frac{x}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1}\cos(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

4. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}$: on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à la question **2.**. Puis, soit $k \geq 1$ et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Prenons $n \in \mathbb{N}$. Alors I_{n+1} est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et d'après la question précédente, I_n' l'est aussi. Donc I_n est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.
On conclut alors par récurrence, et la fonction I_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Calcul de $I_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$

5.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties : on dérive $t \mapsto (1-t^2)^{p+1}$ et on primitive $t \mapsto 1$,

$$\begin{aligned} I_{p+1}(0) &= \left[t\left(1-t^2\right)^{p+1}\right]_0^1 + 2(p+1)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^p\,\mathrm{d}t \\ &= -2(p+1)I_{p+1}(0) + 2(p+1)I_p(0) \end{aligned}$$

Donc $I_{p+1}(0) = \dfrac{2p+2}{2p+3} I_p(0)$.

5.2. Par récurrence, on obtient $I_n(0) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k+1)} I_0(0)$. Or $I_0(0) = 1$, donc

$$I_n(0) = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k) \prod_{k=1}^n 2k}{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k+1) \prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

6. En utilisant la formule du binôme, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{2k} \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\, k\,!\,(n-k)\,!} \end{aligned}$$

Ainsi, la somme cherchée vaut : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!} = \frac{I_n(0)}{n!} = \frac{2^{2n}\, n\,!}{(2n+1)\,!}$.

7. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cos(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(1-t^2\right)^n (xt)^{2k}}{(2k)\,!} \, \mathrm{d}t$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k : t \mapsto (-1)^k \dfrac{\left(1-t^2\right)^n (xt)^{2k}}{(2k)\,!}$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $|g_k(t)| \leq \dfrac{x^{2k}}{(2k)\,!}$ qui est le terme général d'une série convergente vers $\mathrm{ch}(x)$.
Donc $\sum g_k$ converge normalement sur $[0,1]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k \left(1-t^2\right)^n (xt)^{2k}}{(2k)\,!} \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n t^{2k} \, \mathrm{d}t \right) \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)\,!}$$

Comme la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction I_n est développable en série entière sur tout $\mathbb{R}$.

9. Comme la fonction I_n est développable en série entière sur tout $\mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Rapport du jury

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Malheureusement, il me faut reprendre presque intégralement les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées.
La rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur : des questions ne sont pas toujours traitées dans l'ordre au sein d'un même exercice, des candidats changent la numérotation des questions d'un exercice, des questions d'exercices différents traitées à la suite sans indication pour le correcteur...Cela ressemble à un mépris du correcteur difficilement acceptable.
les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.
Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.
- Une nouveauté : des erreurs similaires sur des copies qui se suivent...

Le sujet comportait quatre exercices indépendants. Le premier exercice d'algèbre linéaire proposait la diagonalisation explicite d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie avec une application en dimension 3.
Le deuxième de probabilité et d'analyse s'intéressait à une suite de variables aléatoires et la détermination d'un équivalent de leur espérance.
Dans le troisième exercice, d'algèbre bilinéaire, on proposait une étude de symétries orthogonales axiales.
Enfin, le quatrième exercice, d'analyse, portait sur quelques propriétés d'une intégrale à paramètres.
Ainsi, les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PC.
Les questions détaillées devaient permettre à un étudiant bien préparé de montrer toutes ses compétences.
Le bilan est mitigé avec très peu de bonnes copies. Nombre de candidats se contentent d'affirmer des résultats sans les justifications ou les calculs indispensables.
On a trouvé un nombre non négligeable de copies très faibles où les questions sont ébauchées sans être traitées.
- Signalons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.

Il nous a semblé en effet que beaucoup de candidats lisent de plus en plus approximativement l'énoncé, ce qui induit nombre d'erreurs facilement évitables : « donner sans démonstration » donne lieu à une démonstration, « démontrer par récurrence » ne donne pas lieu à une récurrence, etc...

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.

Il est parfois difficile de simplifier des expressions du type $a - (b - c)$!
Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
On trouve encore trop d'équivalents à 0...
Il manque souvent les restes des développements limités, restes que l'on découvre parfois dans les développements en série entière...
De plus, trop de candidats ne manipulent pas correctement les quantificateurs, les implications, les équivalences, ce qui entraîne de grosses difficultés dans les démonstrations, voire des contradictions.

- Dans le même type d'erreurs, on constate une grande confusion dans beaucoup de copies entre variable et paramètre : cela occasionne de grosses erreurs en particulier dans les intégrales à paramètre. Il est par ailleurs curieux de voir des candidats chercher un équivalent de la fonction à intégrer au voisinage de $+\infty$ alors que l'on intègre entre 0 et 1 !

Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $f(tx) \underset{0}{\sim}$ ne veut pas dire grand chose...

- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

• Exercice 1

- Question **1.** En général, la réponse est oui, mais avec des arguments parfois surprenant : puisque u possède un polynôme annulateur, il est diagonalisable, polynôme souvent qualifié de caractéristique .
- Question **2.** Les valeurs possibles des valeurs propres sont données sans trop de justifications.

- Question **3.** et **4.** Certains candidats ont du mal à justifier correctement les résultats. Sans compter les copies où tout est confondu : vecteurs, sous-espaces vectoriels et endomorphismes.
La notion de somme de sous-espace vectoriels est parfois confuse.
On a souvent vu :
• E = Im(v) +Im(w) $\Longrightarrow$ Im(v) = E - Im(w) !
• la somme des deux sous-espaces F et G est directe si, et seulement si $F \cap G = \{0\}$...
L'utilisation de la distributivité de la composition par rapport à l'addition dans $\mathscr{L}(E)$ pose beaucoup de problème.
- La question **5.** est en général bien traitée. Les calculs étaient simples et la consigne de faire apparaître ces dits calculs n'est pas toujours respectée : on insiste de nouveau sur le fait que les candidats doivent lire attentivement l'énoncé. L'utilisation des endomorphismes v et w n'est pas toujours comprises, ce qui amène les candidats à effectuer la diagonalisation de la matrice U directement.

• Exercice 2
Le développement limité demandé à la question **1.** n'est pas toujours juste. On obtient souvent un équivalent comportant deux termes !
Globalement, dans tout l'exercice, le calcul algébrique pose encore beaucoup de problème à nombre de candidats : il est difficile d'obtenir que $1-(1-t)=t$ et non $-t$, ce qui fausse tous les calculs...
Même des questions faciles (questions de cours, **3.**, **6.2. 6.1.** etc...) souffrent souvent d'imprécision et dénotent de beaucoup de confusion.
L'erreur classique u_n tend vers 0 et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge est malheureusement souvent rencontrée.
Dans la question **3.**, on constate une accumulation d'imprécisions, d'erreurs de calculs.
On manipule les sommes des séries sans se soucier de convergence...
La question **4.3.** (espérance de X_n) est rarement bien traitée.
Pour les convergences de séries et d'intégrales, les hypothèses de continuité et de positivité sont trop souvent oubliées alors qu'il s'agit d'hypothèses cruciales.
L'étude de la convergence de l'intégrale I_p est souvent remplacée par l'étude de la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Le calcul correct de $I_{p+1} - I_p$ est assez rare, souvent remplacé par des calculs faux de primitives ou des manipulations d'intégrales divergentes.

• Exercice 3
D'une façon générale, cet exercice n'est pas réussi, beaucoup d'étudiants ne dépassant pas l'étude de la linéarité de φ. Il semble que les notations aient découragé nombre de candidats.
Les calculs sur le produit scalaire manquent souvent de simplicité et les étudiants ont souvent du mal à les mener jusqu'au bout.
Quelques erreurs fréquentes :
- le calcul de $\varphi_u \circ \varphi_u$ fait apparaître des produits ou des carrés de vecteurs,
- on rencontre des expressions de l'image de D_u faisant apparaître des produits du vecteur u par la droite D_u,
- la nature géométrique de φ_u est souvent donnée au hasard, sans aucune justification,
- la linéarité de φ_u est parfois établie et étudiant $\varphi_{\lambda u+v}$
- la conservation du produit scalaire (bien qu'elle soit explicitement écrite dans l'énoncé) se résuma souvent à $\varphi_u(< x|y >) =< x|y >$.

La question **2.** permettait de sécuriser les étudiants. Cependant, reconnaître pour H l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$ et en trouver un vecteur normal est souvent insurmontable.

• **Exercice 4**

- Question **1.** : Quelques rares candidats pensent que la fonction cos est impaire...

On constate une certaine confusion entre x et t dans l'intégrale.

- Question **2.** : Question bien traitée par ceux qui pensent à bien utiliser le Théorème de classe C^1 des intégrales à paramètres, ce qui n'est pas le cas de tous.
- Question **3.** : Question elle aussi souvent bien traitée.
- Question **4.** : On retrouve dans cette question toutes les difficultés de rédaction d'un raisonnement par récurrence.
- Question **5.** : Un calcul que l'on pouvait penser courant mais qui n'est pas toujours réussi avec beaucoup d'erreurs sur les dérivées ou les primitives à utiliser.

Souvent, l'intégrale d'un produit est le produit des intégrales !

L'expression finale avec des factorielles est rarissime.

- Question **6.** : Question rarement réussie.
- Question **7.** : Une bonne partie des étudiants ne connaît ni le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \cos(u)$, ni son domaine de validité.
- Les questions **8.** et **9.** sont rarement abordées.

Luc VALETTE

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ... , n, ...
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ... , n.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X=1])$.
5. Justifier que $[X=2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X=2])$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X=n]$ en fonction d'évènements du type S_k.
7. Déterminer la loi de X.
8. Vérifier **par le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 2

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**
   - **1.1.** Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
   - **1.2.** Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.
   - **1.3.** Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. **Calcul de la somme de cette série**
   - **2.1.** Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   - **2.2.** En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$.
   - **2.3. Intégration terme à terme ?**
     - **2.3.1.** Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

2.3.2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2.3.3. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall\, j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j\right) \quad \text{et} \quad \left(g = f - \mathrm{id}_{E_n}\right).$$

1. Donner, dans la base $\mathscr{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.

2. Justifier que f et g sont diagonalisables.

3. Diagonalisation de f et de g dans une même base

3.1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.2. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. Méthode 1

(i) Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par g.

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\mathrm{Im}(g)$ induit par g.

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2.

3.4.2. Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathscr{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

3.5. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}\,G\,P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, .., 0)$. *On ne demande pas de déterminer* P^{-1}.

3.6. Justifier que la matrice $P^{-1}\,F\,P$ est diagonale.

4. Résoudre, pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = F\,X(t) + t\,U$ où U est la première colonne de la matrice P.

EXERCICE 4

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-x\,t}\,\mathrm{d}t$.

1. Continuité de f

1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

1.3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. Montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

2.1.2. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-x t} \leqslant t\,\mathrm{e}^{-a t}$.

2.1.3. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-x t} \leqslant \mathrm{e}^{-a t}$.

2.2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

3.1. Montrer que : $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \forall\, x > 0,\ \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t}\right| = \mathrm{e}^{-x t}$.

3.2. En déduire que : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \left| e^{(i\,\theta - x)\,t} \right| = 0$.

3.3. Démontrer alors que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(x^2+4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \dfrac{e^{i\,t} - e^{-i\,t}}{2\,i}$.

4. Une autre expression de f

4.1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4.2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

4.3. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(t) = t \ln\left(t^2 + 4\right) - 2t + 4 \arctan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

4.4. Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$.

FIN

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Malheureusement, et même si nous avons constaté globalement un progrès dans les copies, il me faut reprendre les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Les liens entre les différentes relations équations ou inéquations sont rarement indiqués ou alors très improprement. Le symbole $\iff$ n'est pas souvent utilisé à bon escient.
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PC.
Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.
Un nombre inquiétant d'étudiants a du mal à développer $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$.
Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

Conclusion : Nous demandons dans la rédaction des exercices constituant du sujet de la rigueur et une justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

Nous rappelons qu'il vaut mieux admettre le résultat d'une question clairement et continuer à traiter le reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vive-

ment les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires exercice par exercice

Dans cette partie du rapport, nous avons voulu insister sur les points les plus négatifs rencontrés lors de la correction des copies, ceci afin d'aider les étudiants à ne pas faire ce genre d'erreurs, parfois grossières et souvent faciles à éviter.

Exercice 1

- Les étudiants confondent probabilités composées , définition de la probabilité conditionnelle et probabilités totales.
- Il y a parfois confusion entre évènement et probabilité de cet évènement : $\mathbb{P}(X = 1) = p_1 \times \overline{p_2}$ ou intersection de probabilités, ...
- Rappelons que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X se note $X(\Omega)$ et non $\Omega(X)$.
- Le fait qu'un évènement soit un ensemble semble inconnu par un grand nombre de candidats.
- Nombres de candidats ne sont pas choqués de trouver $\mathbb{P}(X = 1) = 1$ et se livrent à d'invraisemblables pirouettes pour ne pas remettre en question ce résultat : par exemple, « $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = 1^n$ » !
- L'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$ n'apparaît que très rarement.
- Il est étonnant de constater que certains étudiants sont incapables d'écrire le développement en série entière autour de 0 de la fonction exponentielle ou de donner un domaine de convergence juste. On a parfois trouvé des développements limités où $e^x = \lim\limits_{x\to 0} \sum \frac{1}{x}$.

Exercice 2

Notons quelques erreurs parmi les plus courantes :

1.

- Une suite décroissante et minorée par 0 ne converge pas forcément vers 0.
- Pour pouvoir appliquer le Critère spécial des séries alternées, encore faut-il avoir démontré qu'il s'agit d'une série alternée.

Il n'y a pas d'hypothèse de convergence absolue dans ce critère.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- La décroissance de la fonction cos (où ?) ne justifie pas la décroissante de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Le fait que $|u_0| \geqslant |u_1|$ ne permet pas non plus de conclure à la décroissance de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Rappelons que la formule : $\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1}(x)$ est fausse.
- Enfin pour ceux qui ont tenté d'utiliser la règle de d'Alembert, le quotient d'intégrales n'est pas égal à l'intégrale du quotient.

2.

- Formules d'Euler mal connues : $\cos(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ etc...

- Plusieurs candidats concluent à la question **2.2.** à une erreur d'énoncé puisque l'on n'a pas défini I.
- On rencontre encore dans un raisonnement par récurrence comme hypothèse de récurrence : « supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».
- Beaucoup trop de candidats déclarent que les séries $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geqslant 1} 1^n$ sont convergentes. On a même vu que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1$!

Exercice 3

Globalement, l'exercice n'est pas bien traité et cela nous interroge sur les connaissances des étudiants en algèbre linéaire.
Quelques erreurs, les plus courantes.
- Apparition de vecteurs dans les matrices F et G.
- La notion de « stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme » se confond avec celle de « stabilité d'un sous-espace vectoriel par combinaisons linéaires ».
- Des étudiants tentent de prouver que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux en effectuant le produit scalaire de ces sous-espaces.
- Certains candidats pensent que la matrice I_n est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.
- Le lien entre la trace et les valeurs propres distinctes d'une matrice diagonalisable ne fait pas intervenir l'ordre de multiplicité des valeurs propres sur beaucoup de copies.
- Pour montrer que le rang de la matrice G vaut 2, l'argument $C_2 = C_3 = ... = C_n$ et $C_1 \neq C_2$ ne suffit pas.
- Un nombre inquiétant de candidats ne sait pas effectuer correctement un produit matriciel.

Exercice 4

Ici encore, notons les erreurs les plus fréquemment rencontrées :
- Beaucoup d'étudiants tentent de dériver la fonction $t \mapsto |\sin(t)| - t$.
- La dérivation d'une fonction composée n'est pas maîtrisée chez trop de candidats.
- Les étudiants manipulent les équivalents comme des développements limités.
- On a rencontré une grande confusion entre les termes « intégrable » et « possède une primitive ».
- Noter que l'existence des Théorèmes d'interversion est globalement connue. Leur restitution est souvent maladroite, ceci dû à de gros problèmes de rédaction.
- Rappelons que l'assertion : « f intégrable »n'a aucun sens si l'on ne précise pas sur quel intervalle cette propriété est vraie.
- Trop d'étudiants ont trouvé que la dérivée de la fonction f était $\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}$ en se contentant de supprimer le symbole $\int$ de la définition de la fonction f.
- Enfin, prolonger une fonction en un point ne rend pas forcément cette fonction continue en ce point.

FIN

SESSION 2021 PC8M

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)$, déterminer la valeur de la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty,-1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k\,\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

6. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.

7.

7.1. Calculer $L(e_0)$.

7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\,L(e_k)$.

7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

8. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

9. Recherche des sous-espaces propres de L
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.

9.2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ $(*)$.

9.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

10. Comparer L^{-1} et $D+$ Id.

11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.

Exercice 3

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

(1) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $\dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer une unique matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V_{n+1} = M\,V_n$.
4. Justifier que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
5. Montrer que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad M^n = a_n\,I_2 + b_n\,M$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k\,!}$.
   Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M.
7. Démontrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, ..., P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E.
Soit $(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $(P|Q) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Soit P un polynôme de E, calculer $(P|P_0)$.
3. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.
   - **3.1.** Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
   - **3.2.** Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(\ |\ )$.
   - **3.3.** En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.
   - **3.4.** Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.
   - **3.5.** Déterminer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} L_j$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.
   - **4.1.** Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
   - **4.2.** Déterminer $H^{\perp}$ et en déduire la dimension de H.
5. Soit Q un polynôme de E.
   - **5.1.** Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^{\perp}$.
   - **5.2.** Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1165 – D'après documents fournis

CORRECTION

Exercice 1.

1. On reconnaît une série alternée.

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

Alors, d'après le critère spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge}}$

2.

2.1. Nous allons appliquer, comme l'indique l'énoncé, le Théorème d'intégration terme à terme.

On remarque tout d'abord que pour tout $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Alors, d'après le cours, comme :

- pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}(1-x) = (1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$ qui est une série géométrique de raison $x^2 \in [0,1[$ et ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}(1-x)$ de fonctions continues sur $[0,1[$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $x \mapsto (1-x)\cdot\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1+x}$;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge car $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}}$$

2.2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) \\
&= \sum_{k=1,k \text{ impair}}^{2N+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1,k \text{ pair}}^{2N+2} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}
\end{aligned}$$

On fait alors tendre N vers l'infini, ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \text{ d'après la question précédente.}$$

Il reste à calculer cette intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$ pour obtenir :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$$

3. Il s'agit dans cette question de déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série proposée converge.

Cela revient à trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Par exemple :

• Si $|x| > 1$, alors la suite $\left((-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Ainsi, la fonction φ n'est pas définie pour $|x| > 1$.

• Si $|x| < 1$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{|x|^n}{n} \leqslant |x|^n$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |x|^n$ est une série géométrique convergente. Ainsi, dans ce cas, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente et φ est au moins définie sur $]-1, 1[$.

• Si $x = 1$, d'après la question **1.**, $\varphi(1)$ est bien définie et $\boxed{\varphi(1) = \ln(2)}$

• Si $x = -1$, le terme générique de la série proposée s'écrit $(-1)^{n+1} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\dfrac{1}{n}$ qui est le terme générique d'une série qui diverge.

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est définie sur }]-1, 1]}$

4.

4.1. Le dénominateur de la fraction rationnelle à intégrer étant $1 + x^2$, dans le cours, on sait intégrer soit $\dfrac{1}{1+x^2}$, soit $\dfrac{2x}{1+x^2}$. Il faut donc faire apparaître ces deux fractions rationnelles :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= [\arctan(x)]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)
\end{aligned}$$

4.2. - Une première façon de calculer la somme proposée est de faire comme dans la question **2.1.** en appliquant le théorème d'intégration terme à terme :

- $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ est absolument convergente.

- On remarque ensuite que pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x) = (1-x)\cdot\frac{1}{1+x^2}$,

et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}\,(1-x)\,\mathrm{d}x\right) &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

- Mais on peut aussi commencer par calculer l'intégrale dans la somme :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
En conclusion, on a donc :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 2.

Question de cours

Soit a un nombre réel. On note $I =]-\infty, a[$ et f une fonction continue et intégrable sur I.

1. Comme la fonction f est continue sur I et d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F_1 est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, $F_1'(x) = f(x)$.

$\hookrightarrow$ Pour bien voir ce dernier résultat : si H est une primitive de la fonction f sur I (qui existe puisque f est continue sur I), alors $F_1(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = H(x) - H(a)$.

Comme $H(a)$ est une constante, il vient naturellement : $\boxed{\forall\, x \in I,\ F_1'(x) = H'(x) = f(x)}$

2. Comme f est continue et intégrable sur I, la fonction F est bien définie sur I.

L'idée est de se ramener à la question précédente.

On va couper cette intégrale en deux morceaux en introduisant un $b \in I$.

Alors, pour tout $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x f(x)\,\mathrm{d}t$.

Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une constante et donc, d'après la question précédente, la fonction F est de classe C^1 sur I et pour tout $\boxed{x \in I,\ F'(x) = f(x)}$

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.
On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soient $k \in \mathbb{N}$.

La fonction f_k est continue sur $]-\infty, -1]$.

On a facilement $|f_k(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

On en déduit (Théorème de comparaison) que : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\ f_k \text{ est intégrable sur }]-\infty, -1]}$

$\hookrightarrow$ Noter que cela entraîne que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont intégrables sur tout intervalle $]-\infty, c]$ où c est un réel quelconque : il suffit d'écrire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f_k(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{c} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.

4. • On commence par vérifier que l'application L est bien définie :

Pour toute fonction f de E_n, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ est une combinaison linéaire des $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

En utilisant alors la question précédente, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty, x]$ pour tout réel x, ce qui prouve que **l'application L est bien définie**.

• Prouvons la linéarité de L :

Soient f et h deux éléments de E_n et λ un réel. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L(\lambda f + g)(x) &= \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} (\lambda f + g)(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= \lambda L(f)(x) + L(g)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, L **est une application linéaire**.

$\hookrightarrow$ On aurait aussi pu dire que la linéarité de L découlait directement de la linéarité de l'intégrale.

Conclusion : $\boxed{L \text{ est une application linéaire sur } E_n}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ étant continue et intégrable sur $]-\infty, x]$, en utilisant la question de cours, on obtient que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et par suite, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus, toujours d'après la question de cours, pour tout réel x, $g'(x) = -g(x) + e^{-x} f(x) e^x = -g(x) + f(x)$.

Cela revient à dire que : $\boxed{g \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle : } y' + y = f(x)}$

6. Une fonction f est dans $\mathrm{Ker}(L)$ si et seulement si $g = L(f) = 0$.

Or d'après la question précédente, $g = L(f) \iff g' + g = f$.

Ainsi, $f \in \mathrm{Ker}(L) \iff f = 0_{E_n}$ où 0_{E_n} est la fonction nulle de E_n puisque g est nulle.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}}$

7.

7.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L(e_0)(x) = e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^t dt = e^{-x} e^x = 1$. Ainsi, $\boxed{L(e_0) = e_0}$

7.2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On va faire une intégration par parties, qui est licite car :

- les fonctions $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,
- la limite $\lim\limits_{t \to -\infty} t^{k+1} e^t$ existe et vaut 0 par croissances comparées,
- les fonctions sont intégrables sur $]-\infty, c]$ pour tout c réel.

Ainsi, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
L(e_{k+1})(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{k+1} e^t dt \\
&= e^{-x} \left(\left[t^{k+1} e^t \right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} (k+1) t^k e^t dt \right) \\
&= e^{-x} \left(x^{k+1} e^x - (k+1) \int_{-\infty}^{x} t^k e^t dt \right) \\
&= e_{k+1}(x) - (k+1) L(e_k)(x).
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que : $\boxed{\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\, L(e_k)}$

7.3. Pour montrer que L est un endomorphisme de E_n, il reste à montrer que $\forall\, f \in E_n$, $L(f) \in E_n$.

Or, comme on sait que L est linéaire et que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ est une base de E_n, il suffit de montrer que $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $L(f_k) \in E_n$.

Pour ce faire, nous allons raisonner par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$.

- Initialisation : d'après la question **7.7.1.**, $L(e_0) = e_0 \in E_n$, donc la propriété est vraie pour $k = 0$.

- Hypothèse de récurrence : Supposons que pour un $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_k) \in E_n$.

  Montrons maintenant que $L(e_{k+1}) \in E_n$.

  D'après la question précédente, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\, L(e_k)$.

  Alors, en utilisant hypothèse de récurrence et le fait que E_n est un espace vectoriel, on obtient que $L(e_{k+1})$ est un élément de E_n.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ L(e_k) \in E_n}$

Ainsi, d'après la remarque faite au début de la question, $\boxed{L \text{ est un endomorphisme de } E_n}$

8. D'après la question **6.**, L est injective.

On vient de démontrer que L est un endomorphisme de E_n qui est de dimension finie, et donc,

$$\boxed{L \text{ est un automorphisme de } E_n}$$

9. Recherche des sous-espaces propres de L.
Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. D'après la question **6.**, L est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de L.

9.2. Puisque f est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, la fonction f vérifie $L(f) = \lambda f$.

En utilisant la question **5.**, λf est solution de l'équation différentielle $y' + y = f$.

Autrement dit, f vérifie $\lambda f' + \lambda f = f$, ce qui revient à $\lambda f' + (\lambda - 1) f = 0$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (*)}$

9.3. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle se réécrit $y' + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) y = 0$

Donc :

• Si $\lambda = 1$, alors l'équation différentielle se réécrit : $y' = 0$, dont les solutions sont les fonctions constantes.

• Si $\lambda \neq 1$, alors les solutions sont les fonctions $x \mapsto K\mathrm{e}^{(-1+\frac{1}{\lambda})x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

9.4. • Si $\lambda = 1$, alors les solutions sont constantes et sont donc polynomiales.

• Si $\lambda \neq 1$, les fonctions $x \mapsto K\mathrm{e}^{(-1+\frac{1}{\lambda})x}$ ne sont polynomiales que si $K = 0$ car $-1 + \dfrac{1}{\lambda}$ ne s'annule pas.

Ainsi, $\boxed{\text{les seules solutions polynomiales de l'équation } (*) \text{ sont les fonctions constantes}}$

9.5. Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

Alors f est polynomiale (dans E_n) et est solution de $(*)$.

Ainsi, d'après la question précédente, la seule possibilité est $\lambda = 1$ et $f \in \mathrm{Vect}(e_0)$.

Conclusion : **L'endomorphisme L n'a qu'une seule valeur propre, et le sous espace propre associé est de dimension** 1.

Comme E_n est de dimension $n+1 > 1$ (car $n \geqslant 2$), on en déduit que $\boxed{L \text{ n'est pas diagonalisable}}$

10. Soit $f \in E_n$ et $g = L(f)$.

On a vu à la question 5. que : $g = L(f) \iff g' + g = f \iff (D + \mathrm{Id})(g) = f$

Mais aussi, $g = L(f) \iff f = L^{-1}(g)$ puisque l'on sait que L est un automorphisme de ED_n.

On en déduit alors que $L^{-1} = D + \mathrm{Id}$.

11. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $L^{-1}(e_k) = (D{+}\mathrm{Id})(e_k) = ke_{k-1} + e_k$, et $L^{-1}(e_0) = e_0$.

Donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. La matrice M est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Donc $\boxed{\mathbf{Sp}(L^{-1}) = \{1\}}$

Ensuite :

λ est valeur propre de L si et seulement s'il existe $f \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$ telle que $L(f) = \lambda f$, soit encore $\dfrac{1}{\lambda} f = L^{-1}(f)$.

Autrement dit λ est valeur propre de L ssi $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de L.

Conclusion : $\boxed{\mathbf{Sp}(L) = \{1\}}$

Exercice 3.

1. D'après les relations coefficients racines, les racines, on a, en notant r_1 et r_2 les racines de l'équation :

$$\begin{cases} r_1\, r_2 = -1 \ (1) \\ \text{ et} \\ r_1 + r_2 = 1 \ (2) \end{cases}$$

Comme le discriminant $\Delta = 5 > 0$, les deux racines sont réelles et de signe contraire d'après (1).

En utilisant les notations de l'énoncé, les deux racines s'écrivent donc, d'après (1) : γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$.

De plus, $\gamma = 1 - \dfrac{-1}{\gamma} = 1 + \dfrac{1}{\gamma} > 1$

2. Soit (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

2.1. Soit n un entier strictement positif. Alors $a_n = b_{n-1}$, donc $b_{n+1} = a_n + b_n = b_{n-1} + b_n$.

2.2. • Pour la première, en prenant $n = 0$, on trouve $b_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right) \neq 0$, donc cette expression ne convient pas.

• Comme les racines de l'équation caractéristique associée à la suite (b_n) sont γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$, l'expression doit être une combinaison linéaire de γ^n et $\dfrac{(-1)^n}{\gamma^n}$. La seconde expression est une combinaison linéaire de $(-\gamma)^n$ et $\dfrac{1}{\gamma^n}$, ce qui ne convient pas.

Ainsi, $\boxed{\text{la troisième expression est l'expression correcte}}$

2.3. Par définition des suites (a_n) et (b_n), pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = b_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

De plus, $a_0 = b_1 - b_0 = 1$, et

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^{-1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^{-1}\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\, a_n = \dfrac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}}$

2.4. On peut soit procéder par récurrence, ou bien utiliser les expressions trouvées précédemment :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n + b_n\gamma &= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}} \\ &= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \\ &= \gamma^n \end{aligned}$$

en répétant le calcul de la question précédente.

3. En posant $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie alors directement que $V_{n+1} = M\, V_n$.

4. Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Or, ce polynôme a deux racines γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$ qui sont distinctes (une est strictement positive, l'autre strictement négative). Il est donc scindé à racines simples. La matrice M est diagonalisable.
On aurait aussi pu dire que comme M est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Les valeurs propres de M sont γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$.
De plus,

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = \gamma x \\ x + y = \gamma y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \gamma x \\ 0 = \gamma^2 x - \gamma x - x \end{cases} \iff y = \gamma x.$$

Donc $E_\gamma = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix}\right)$.

De même on trouve $E_{-\frac{1}{\gamma}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

5. Pour prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation $M^n = a_n\, I_2 + b_n\, M$, on effectue un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel n.

- Initialisation : comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on a bien $M^0 = a_0\, I_2 + b_0\, M$.
- Hypothèse de récurrence : supposons que pour $n \geqslant 0$, on a : $M^n = a_n\, I_2 + b_n\, M$.
  Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \cdot M^n \\ &= M\,(a_n\, I_2 + b_n\, M) \\ &= a_n\, M + b_n\, M^2 \\ &= a_n\, M + b_n\,(I_2 + M) \\ &= b_n\, I_2 + (a_n + b_n)\, M \\ &= a_{n+1}\, I_2 + b_{n+1}\, M \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ M^n = a_n\, I_2 + b_n\, M}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On commence par donner une autre expression de C_n en utilisant la question précédente :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k\, I_2 + b_k\, M}{k\,!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k\,!}\right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k\,!}\right) M$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\gamma^{k-1}}{k\,!} - \frac{(-\gamma^{-1})^{k-1}}{k\,!}\right) I_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\gamma^{k}}{k\,!} - \frac{(-\gamma^{-1})^{k}}{k\,!}\right) M$$

Or, la série de terme général $\dfrac{\gamma^k}{k\,!}$ converge vers e^{γ} et la série de terme général $\dfrac{(-\gamma^{-1})^k}{k\,!}$ converge vers $\mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Il en résulte que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$C = \left(\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\gamma\sqrt{5}} + \frac{\gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{5}}\right) I_2 + \frac{\mathrm{e}^{\gamma} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{5}}\, M$$

7. Comme M est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $M = P\,D\,P^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$.

Or, on montre par une récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Cela nous permet d'écrire que pour tout entier naturel n :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k\,!} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k\,!}\right) P^{-1}$$
$$= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k\,!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\gamma^{-1})^k}{k\,!}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) P^{-1}$$

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini et en utilisant la continuité de la fonction $M \mapsto P\,M\,P^{-1}$, on trouve

$$C = P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}} \end{pmatrix} P^{-1} = P\,\Delta\,P^{-1}$$

et C **est bien semblable à la matrice** Δ.

Exercice 4.

1. D'après le cours, pour démontrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire, il faut prouver qu'il s'agit d'une application bilinéaire symétrique, positive et définie.

- Symétrie : soient $(P, Q) \in E^2$.

  On a $(P|Q) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j) = \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P(a_j) = (Q|P)$ et $(\,|\,)$ est symétrique.

- Bilinéarité : soient $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q|R) &= \sum_{j=0}^{n}(\lambda P + Q)(a_j)R(a_j)\\ &= \lambda \sum_{j=0}^{n} P(a_j)R(a_j) + \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)R(a_j)\\ &= \lambda(P|R) + (Q|R)\end{aligned}$$

  ce qui prouve la linéarité à gauche.

  Par symétrie, on a la bilinéarité.

- Positivité : soit $P \in E$, $(P|P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 \geqslant 0$.

- Définition : soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$.

  Alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 = 0$ donc pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $P(a_j) = 0$.

  Il en résulte que P admet $n + 1$ racines distinctes.

  Comme P est de degré au maximum n, il ne peut avoir au maximum que n racines et donc, c'est le polynôme nul.

Conclusion : $\boxed{(\,|\,) \text{ est un produit scalaire sur } E}$

2. Soit $P \in E$.

$$(P|P_0) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)P_0(a_j) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)$$

3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors $L_j(a_i) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0$ car $i \neq j$.

En fait, pour tout $i \neq j$, $X - a_i$ est en facteur dans L_j.

Ensuite, pour $i = j$, $L_j(a_j) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$.

3.2. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. D'après la question précédente,

$$(L_i|L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = L_i(a_i)L_j(a_i) + L_i(a_j)L_j(a_j) = 0.$$

Donc la famille $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale.

3.3. Comme $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, elle est libre. Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n+1 = \dim(E)$, c'est une base de E.

De plus, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$(L_i|L_i) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)^2 = L_i(a_i)^2 = 1.$$

et, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormale de } E}$

3.4. Soit $P \in E$.

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E, les composantes de P sont données par :

$$(P|L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_i(a_k) = P(a_i)$$

Ainsi, $\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i}$

3.5. On remarque que $P_0 = \sum_{j=0}^{n} L_j$ car pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P_0(a_i) = 1$.

4.

4.1. L'application $\varphi : P \in E \mapsto (P_0|P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)$ est linéaire car le produit scalaire est bilinéaire.

Donc $\boxed{H = \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

4.2. D'après le cours, on a $H = \mathrm{Vect}(P_0)^{\perp}$, donc $\boxed{H^{\perp} = \mathrm{Vect}(P_0)}$

Comme $\dim(H^{\perp}) = 1$, on a $\boxed{\dim(H) = \dim(E) - 1 = n}$

5.

5.1. D'après le cours, on sait bien projeter orthogonalement sur un sous-espace lorsque l'on a une base orthonormale de ce sous-espace.

Comme $||P_0|| = \sqrt{n+1}$, le vecteur $R = \dfrac{P_0}{||P_0||} = \dfrac{P_0}{\sqrt{n+1}}$ est une base orthonormée de $H^\perp$.

Ainsi, le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$ est donné par

$$(Q|R)R = \frac{1}{n+1}(Q|P_0)P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)$$

soit

$$\boxed{p_{H^\perp}(Q) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)}$$

5.2. Enfin, la distance de Q au sous-espace vectoriel H est égale à la norme du projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$:

$$\mathrm{d}(Q,H) = \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P_0 \right\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left| \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) \right|$$

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

- Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur), **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que "il est trivial que ", " par une récurrence immédiate ", etc... rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.

Nous avons été déçus par le trop grand nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, d'analyse et qui espèrent venir à bout du sujet grâce à des recettes toutes faites.

Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont très rapidement abandonnés.

- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments bidons ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

- Dans certaines copies on trouve beaucoup trop d'abréviations CVU, CVS, CSTP (comparaison de séries à termes positifs) voire des symboles mathématiques en guise d'abréviation...

- La rédaction est souvent inadmissible : les flèches (voir rien du tout) remplacent les phrases, les résultats ne sont pas encadrés, les théorèmes ont des noms aléatoires (lorsqu'ils en ont).

- Certains candidats recopient simplement le résultat demandé en guise de réponse en espérant que cela passe.

- Les convergences d'intégrales et de séries ne sont justifiées que si cela est explicitement demandé.

• Commentaires exercice par exercice

Exercice 1

1. Question en général traitée : attention à ne pas oublier les hypothèses précises d'application du critère spécial des séries alternées.

2. Cela ne doit pas être à l'examinateur de faire le choix des hypothèses énoncées en vrac pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Beaucoup de candidats tentent de prouver la convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$ alors que la non continuité de la fonction somme aurait dû les en dissuader.

Enfin, calculer la somme d'une série géométrique relève trop souvent de l'exploit...

3. Trop peu d'étudiants reconnaissent une série entière et répondent à la question.

On a trop souvent trouvé $D =]-1, 1[$, sans que le candidat soit géné lorsqu'on lui demande de calculer $\varphi(1)$!

4. Rappelons que l'intégration par parties n'est pas la panacée du calcul intégral.

On retrouve ensuite les mêmes problèmes que pour la question 2.

Exercice 2

1. et **2.** Questions faciles si l'on utilise la notion de primitive, notion qui semble mal comprise voire méconnue.

Trop de candidats pensent qu'il s'agit d'une intégrale à paramètre...

3. Soit la continuité de la fonction à intégrer est oubliée, soit c'est elle qui justifie l'intégrabilité sur $]-\infty, -1]$.

Ne pas oublier que toute domination se fait sur des fonctions positives.

4. Question en général bien traitée.

5. et **6.** Questions souvent mal comprise : trop de candidats tentent de résoudre l'équation différentielle $y' + y = f(x)$ et veulent se servir des résultats obtenus pour traiter la question **6.**.

7.1. Question traitée correctement.

7.2. Ne pas oublier qu'il faut justifier l'utilisation d'une intégration par parties.

7.3. On a souvent rencontré une mauvaise justification de l'utilisation de la base canonique pour conclure.

8. Le fait que E_n est de dimension finie n'est que trop peu souvent évoqué.

9. Question en général peu abordée. Le fait de rechercher des solutions polynomiales d'une équation différentielle semble avoir désarçonné beaucoup d'étudiants.

Exercice 3

1. Trop rares sont les candidats qui ont utilisé les relations coefficients racines. Beaucoup de lourdeur dans la résolution de cette question.

2.1. Question en général bien traitée.

2.2. L'objectif de cette question était de donner l'expression juste de y_n sans que le candidat soit obligé d'effectuer tous les calculs. Était-ce efficace ?

3., **4.** et **5.** Questions en général bien traitées. La seule difficulté rencontrée s'est située au niveau du calcul des vecteurs propres de la matrice M.

6. et **7.** Même si certains candidats reconnaissent l'exponentielle de matrice, on demandait ici pour répondre correctement à la question de montrer la convergence et de calculer explicitement la limite obtenue en utilisant les questions précédentes.

Exercice 4

1. Question en général bien traitée sauf quelques imprécisions pour démontrer le caractère défini du produit scalaire.

2. Pas de problème sur cette question.

3. Questions classiques engénéral bien traitées.

Cela se gâte à partir de la question **3.4.** et surtout **3.5.**

4.1. Trop d'étudiants ont du mal à montrer que H est un sous-espace vectoriel de E !

4.2. L'orthogonal de H est rarement explicité clairement.

5.1. Les propriétés de la projection orthogonale sont en général bien citées mais on a remarqué de grosses difficultés pour les mettre en oeuvre ici.

5.2. Les relations entre projection orthogonales sur H et projection orthogonale sur $H^{\perp}$ ne sont pas toujours bien maîtrisées.

FIN

SESSION 2020

PC8M

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{e^{-t}}{1 + xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

3. Limite de f en l'infini

3.1. Démontrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

3.2. Déterminer la valeur de ℓ.

3.3. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 3.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

2. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in\,]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

3.

3.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

3.2. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

3.3. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n\, x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n\, x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

3.4. En déduire que l'on a pour tout $x \in\,]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [\,0, 1\,[$, $\ln(f(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [\,0, 1\,[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4.

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \dfrac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1. On note $F = \text{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

Déterminer la dimension de F et en donner une base.

1.2. Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

1.3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \dfrac{1}{2}I_n$.

Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de F.

Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathscr{B}$.

1.4. Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant : $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ 2\,\mathbb{P}(X = n+2) = 3\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.

En déduire la loi de la variable aléatoire X.

2.2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 5.

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$< P|Q >= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

4.1. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

4.2. Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

* * * * * *

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1161 – D'après documents fournis

Compte rendu correction épreuve PC

Le sujet est constitué de 5 exercices dans lesquels nous avons tenté de couvrir une bonne partie du programme de façon à ce que les étudiants puissent appliquer les notions essentielles des programmes des deux années préparation au concours.

Plusieurs questions étaient des questions de cours, même si pas toujours affichées en tant que telles, ce qui aurait dû sécuriser les candidats.

Exercice 1.

Dans cet exercice de trigonalisation d'une matrice de taille 3, nous constatons que moins d'un tiers des copies discute correctement sur la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, même si le polynôme caratéristique est juste. Il s'agit cependant d'un résultat important du programme de mathématiques en PC.

Exercice 2.

Quand le candidat comprend dans la première question qu'il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale, la comparaison à une intégrale de Riemann est en général bien menée, bien que beaucoup oublient d'invoquer la continuité de la fonction à intégrer sur $\mathbb{R}_+$.

La deuxième question était facile en suivant les iondications de l'énoncé : trop d'étudiants tentent d'appliquer le Théorème de dérivation sous l'intégrale, ce qui les pénalise, vu le nombre d'hypothèses à vérifier. C'est dommage.

Dans la dernière question, bien que le Théorème de convergence monotone soit en général bien appliqué, certains candidats confondent convergence de la suite et convergence de l'intégrale.

Exercice 3.

La récurrence demandée dans la première question s'effondre souvent en raison de l'hypothèse qui ne porte que sur a_n dans la plupart des copies.

La question 2, qui est une question de cours, n'est malheureusement pas toujours bien traitée. Il arrive que le rayon de convergence dépende de l'entier n!

Le produit de Cauchy de deux séries entière ne semble pas toujours bien maîtrisé (rayon de convergence, expression des coefficients).

Rappelons que lorsque l'on effectue une intégration, apparaît nécessairement une constante que beaucoup semblent oublier.

Les dernières questions étaient des questions de cours déguisées : n'ont pas été pénalisés ceux qui le connaissait.

Exercice 4.

Question 1 : Un grand nombre de copies donne la bonne dimension de l'espace F malgré des difficultés à prouver l'indépendance de la famille (I_n, M).
Le reste de la question (hormis le 1.4.) est relativement bien traité. (Algèbre linéaire en dimension 2).

Question 2 : Pour beaucoup, l'équation caratéristique de la suite est bien traitée. Mais il ne faut pas confondre suites et équations différentielles, ce qui amène parfois à des combinaisons linéaires de e^n et $\mathrm{e}^{1/n}$...

Exercice 5.

Souvent, le lien entre $P^{(k)}(1) = 0$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$ et la multiplicité de la racine 1 est mal géré.

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est assez bien connu surtout en dimension 2 mais tout se complique lors du calcul du troisième vecteur.

La question 3 bien que très classique est en général très mal traitée, malgré l'introduction du projeté orthogonal.

Cette dernière question n'est quasiment jamais terminée.

Conclusion

Il nous semblait que le sujet permettait aux candidats d'utiliser les résultats du cours et quelques questions, plus fines, devaient permettre aux meilleurs de s'exprimer pleinement.

Or, il s'évère que des résultats élémentaires (rayon de convergence d'une série entière par exemple) sont méconnus de trop de candidats, et les théorèmes classiques du programme sont souvent approximatifs, mal compris. Cela est très décevant.

Dans l'ensemble, nous constatons un grand manque de rigueur dans la rédaction : il ne suffit pas de dire que clairement, on a ... pour effectuer une démonstration correcte. Rappelons qu'il est indispensable de vérifier toutes les hypothèses d'application d'un théorème pour l'utiliser.

D'une façon générale, nous avons trouvé que les copies étaient souvent mal présentées, sales, mal rédigées : des rayures dans tous les sens, des questions faites dans le désordre, des phrases sans queue ni tête, etc... Cela s'explique sans doute par le manque de professeur en présentiel depuis le mois de mars.

* * * * * *

Sujet

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soit x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction de l'épreuve

Exercice 1.
Trigonalisation d'une matrice dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'objet de l'exercice est de diagonaliser ou trigonaliser M_a suivant les valeurs du paramètre a.

1. On commence par chercher les valeurs du réel a pour lesquelles la matrice M_a est diagonalisable. Pour se faire on calcule le polynôme caractéristique de M_a :

$$\begin{aligned} \chi_{M_a}(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2(X+1) \end{aligned}$$

χ_{M_a} est scindé et admet deux racines : 1, d'ordre 2 et -1, simple.

D'après le cours, on sait alors que M_a est diagonalisable si et seulement si E_1 est de dimension 2. Soit $X = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ax & = 0 \\ y & = z \end{array} \right.$$

• Si $a = 0$, $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, E_1 est de dimension 2.

• Si $a \neq 0$, $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Donc E_1 est de dimension 1.

$$\boxed{\text{En conclusion : } M_a \text{ est diagonalisable si et seulement si } a = 0}$$

2. On utilise le résultat précédent : $\forall\, a \in \mathbb{R}$, 0 n'appartient pas au spectre de M_a, donc

$$\boxed{M_a \text{ est inversible pour tous les réels } a.}$$

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit donc $a \in \mathbb{R}$, a non nul.
Notons φ_a l'endomorphisme canoniquement associé à M_a et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On cherche une base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que $\mathcal{M}at_{\mathscr{B}'}(\varphi_a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc telle que :

$$\varphi_a(u_1) = -u_1, \ \varphi_a(u_2) = u_2 \text{ et } \varphi_a(u_3) = u_2 + u_3.$$

-> On résout $M_a X = -X$ pour obtenir $u_1 = \left(\frac{a}{2}, -1, 1\right)$.

-> Il suffit de choisir pour u_2 un vecteur propre associé à la valeur propre 1, par exemple : $u_2 = (1,0,0)$.

-> Enfin :

$$\begin{aligned}\varphi(u_3) = u_2 + u_3 &\iff M_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{cccc} x+ & ay & & = & 1+x \\ & & z & = & y \\ & y & & = & z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ll} ay & =1 \\ y & =z \end{array}\right. \\ &\iff y = z = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

On prend par exemple $u_3 = \left(0, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

-> Il faut à présent vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, or

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3) = \frac{2}{a} \neq 0$$

Les matrices de φ_a dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont semblables, donc

$$\boxed{M_a \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}}$$

Exercice 2.

Etude d'une suite de fonctions. Théorème de convergence dominée.

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}$.

On s'intéresse aux propriétés de cette intégrale à paramètre sans étudier sa dérivée.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $x \geqslant 0$.
Comme la fonction f est définie comme intégrale à paramètre, connaître l'ensemble de définition de f revient à connaître l'ensemble des valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale converge.

• La fonction à intégrer φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ car son dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

• Pour tout $t \geqslant 0$, $|\varphi_x(t)| = \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$.
Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et par comparaison, φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,.
En conclusion $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ existe pour tout $x \geqslant 0$, et $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+}$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $x \leqslant y$.
Suivons l'énoncé qui nous incite à comparer $f(x)$ et $f(y)$:

Pour tout $t \geqslant 0$, $0 < 1 + tx \leqslant 1 + ty$, donc $\dfrac{1}{1+tx} \geqslant \dfrac{1}{1+ty}$, et par suite :

$$\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{1+xt} \geqslant \frac{e^{-t}}{1+yt} = \varphi_y(t).$$

Enfin, par positivité de l'intégrale généralisée :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{+\infty} \varphi_y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$

3. <u>Limite de f en l'infini</u>

3.1. On utilise le théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$:

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nt = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = 0$.
La suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t > 0$, $1 + nt \geqslant 1$, donc

$$|\varphi_n(t)| = \frac{e^{-t}}{1+nt} \leqslant e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par convergence dominée, comme la fonction nulle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

3.2. D'après la question précédente, $\ell = 0$.

3.3. f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc d'après le théorème de la limite monotone, admet une limite en $+\infty$ (éventuellement $-\infty$).

On a démontré que la suite $(f(n))$ converge vers $\ell = 0$. Par unicité de la limite, il vient donc que $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$

De façon plus précise, soit ε un réel strictement positif.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$, il existe un entier N tel que : $n \geqslant N \Longrightarrow |f(n)| < \varepsilon$.
Alors, pour tout $x \geqslant N$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant f(N) < \varepsilon$ puisque f est décroissante.

Concluons :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que : $x \geqslant N \Longrightarrow |f(x| < \varepsilon$: $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$

Exercice 3.
Série entière à partir d'une suite récurrente

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on démontre en utilisant une récurrence dite « forte » la propriété : $0 < a_n \leqslant 1$.

— Initialisation : $0 < a_0 \leqslant 1$ car $a_0 = 1$

— Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!],\ 0 < a_k \leqslant 1$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0, n]\!],\ -n &\leqslant -k \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow 2 \leqslant n-k+2 \leqslant n+2\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \leqslant \frac{1}{n-k+2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0, +\infty[\\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{a_k}{2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{car } 0 < a_k \leqslant 1
\end{aligned}$$

En ajoutant ces inégalités pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2}\\
&\Leftrightarrow 0 < a_{n+1} \leqslant 1
\end{aligned}$$

— Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0, 1]}$

2. D'après le résultat obtenu à la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est donc supérieur ou égal à celui de la série entière géométrique $\sum x^n$ dont le rayon de convergence vaut 1 (c'est du cours).

$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. : on est certain que f existe au moins dans cet intervalle.

33.1. Posons $c_n = \dfrac{1}{n+2} \sim \dfrac{1}{n}$.

Donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n\, x^n$ a le même rayon de convergence que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n} x^n$ et donc que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ qui est 1.

3.2. D'après la question précédente, on sait déjà que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$ est définie sur $]-1, 1[$.

De façon plus précise :

— pour $|x|<1$, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ converge,

— pour $|x|>1$, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ diverge.

Il reste à étudier ce qui se passe aux bords de l'intervalle :

— Pour $x=1$, $\sum \frac{1}{n+2}$ diverge car $\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \geqslant 0$ et la série harmonique diverge.

— Pour $x=-1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées puisque $\left(\frac{1}{n+2}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

Par conséquent, la fonction $\boxed{x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ est définie sur } [-1,1[.}$

3.3. Le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des deux rayons de convergence (c'est du cours).

Comme ce minimum vaut 1, il vient : $\boxed{\sum w_n x^n \text{ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1}}$

Facilement, en utilisant le cours :

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n+2-k} = (n+1)a_{n+1}.$ donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)a_{n+1}.}$

3.4. Rappelons que l'on sait que f est de classe C^∞ à l'intérieur de son disque ouvert de convergence.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[\ f(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)\end{aligned}$$

Et finalement : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) f(x)}$

4. On va démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ en intégrant l'équation différentielle vérifiée par la fonction f obtenue à la question précédente :

f est strictement positive sur $[0,1[$ car : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0, a_0 > 1$, puis $\forall x \in [0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n > 0$.

Alors sur $[0,1[$, on a : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

En intégrant alors terme à terme la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence on obtient : $\int_0^x \frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+2}\right)\,\mathrm{d}u$

Donc : $[\ln(|f(u)|)]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ et comme $f(0) = 1$ et $\ln(f(0)) = 0$,

on obtient finalement : $\boxed{\forall x \in [0, 1[, \ \ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}$

5. Sur $]0, 1[$, on obtient en utilisant la décomposition en éléments simples proposée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\
&= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) \mathrm{d}u - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x u^{n+1} \, \mathrm{d}u^{\,1} \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-u} \, du - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{u}{1-u} \, du \\
&= [-\ln|1-u|]_0^x - \frac{1}{x}[-u - \ln(|1-u|]_0^x \\
&= -\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} \\
\ln(f(x)) &= \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall x \in]0, 1[, \ f(x) = e \times (1-x)^{\frac{1}{x}-1} \text{ et } f(0) = e^0 = 1.}$

6. $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, donc $\sum a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$.

Exercice 4.
Suite récurrente de matrices et probabilités

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1. On a $2M^2 = 3M - I_n$, donc : $F = \text{Vect}(I_n, M, M^2) = \text{Vect}(I_n, M, -3M + I_n) = \text{Vect}(I_n, M)$.
On montre alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Initialisation : $M^0 = I_n \in \text{Vect}(I_n, M) = F$.
La propriété est donc vraie pour $k = 0$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $M^k \in F$.
Comme $M^k \in \text{Vect}(I_n, M)$, il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^k = a_k I_n + b_k M$,
Alors : $M^{k+1} = M^k M = a_k M + b_k M^2 = a_k M + b_k \frac{3M - I_n}{2} = \frac{2a_k + 3b_k}{2} M - \frac{b_k}{2} I_n$, donc $M^{k+1} \in \text{Vect}(I_n, M) = F$. D'où l'hérédité.
Conclusion : Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ M^k \in F}$
Recherche d'une base de F :

- Par construction de F, la famille (I_n, M) est génératrice de F.
- Démontrons que cette famille est libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aI_n + bM = 0$.

-> Si $b = 0$ alors $aI_n = 0$, donc $a = 0$.

-> Si $b \neq 0$, on a $M = \frac{a}{b} I_n$.
Comme $M = \frac{a}{b} I_n$, on a $M^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 I_n$, donc $0_n = 2M^2 - 3M + I_n = (2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1)I_n$, et par suite $2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$, ce qui donne $\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}$, ou $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$ ce qui est impossible puisque $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2} I_n$: ce cas est donc impossible et $a = b = 0$.
Conclusion : la famille (I_n, M) est libre, et donc une base de F qui est ainsi de dimension 2.

1.2. Soit $(A, B) \in F^2$: d'après la question précédente,
$\exists(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2\ A = \alpha_1 I_n + \alpha_2 M$ et $\exists(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2\ B = \beta_1 I_n + \beta_2 M$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 I_n + \alpha_2 M)(\beta_1 I_n + \beta_2 M) \\ &= a_1 b_1 I_n + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)M + \alpha_2\beta_2 M^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2) = F \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F \text{ est stable pour la mutliplication des matrices.}}$

1.3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2} I_n$.
On remarque que A et B sont deux vecteurs de F.
On démontre que cette famille est libre.

$$\begin{aligned} \lambda A + \mu B = 0_F &\Leftrightarrow \lambda(M - I_n) + \mu(M - \frac{1}{2} I_n) = 0_F \\ &\Leftrightarrow (\lambda + \mu)M - \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) I_n = 0_F \end{aligned}$$

Or (I_n, M) étant libre, on a donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \frac{\mu}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu = 0 \\ \mu = -\frac{\mu}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$. Enfin, comme F est de dimension 2, $\boxed{(A, B) \text{ est une base de } F}$

On peut aussi calculer le déterminant de ces deux vecteurs dans la base $\mathscr{B} = (I_n, M)$:
$\det_{\mathscr{B}}(A, B) = \begin{vmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$: $\boxed{\text{la famille } (A, B) \text{ est une base de } F}$

On précise que A et B commutent (car M et I commutent). Alors :

$$\begin{aligned} BA = AB &= (M - I_n)\left(M - \frac{3}{2} I_n\right) \\ &= M^2 - \frac{3}{2} M + \frac{1}{2} I_n \\ &= 0_F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= (M - I_n)^2 \\ &= AB - \frac{1}{2} A \\ &= \frac{-1}{2} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(M - \frac{1}{2} I_n\right)^2 \\ &= BA + \frac{1}{2} B \\ &= \frac{1}{2} B \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dans la base } (A, B) : AB = BA = (0, 0),\ A^2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right),\ B^2 = \left(0, \frac{1}{2}\right).}$$

1.4. Utilisons la base (A, B) de F définie dans la question précédente.
Soit $T \in F$: $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ T = \alpha A + \beta B$.

Alors : $T^2 = (\alpha A+\beta B)^2 = \alpha^2 A^2 + \alpha\beta AB + \beta\alpha BA + \beta^2 B^2 = \dfrac{1}{2}(-\alpha A + \beta B)$ d'après la question précédente.
Comme $M = -A + 2B$, par unicité des coefficients dans la base, on résout :

$$\begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{2} = -1 \\ \dfrac{\beta^2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 2 \\ \beta^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{2} \\ \beta = \pm 2 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{T^2 = M \text{ si, et seulement si, } T \in \left\{\sqrt{2}A + 2B, \sqrt{2}A - 2B, -\sqrt{2}A + 2B, -\sqrt{2}A - 2B\right\}}$

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ 2\,\mathbb{P}(X = n+2) = 3\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
(p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$.
L'équation caractéristique associée $2x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux racines distinctes : 1 et $\dfrac{1}{2}$, donc :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta 1^n.$$

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements et l'on a :

$$1 = P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha \frac{1}{2^n} + \beta\right).$$

Nécessairement, $\beta = 0$ (p_n est le terme général d'une série convergente, donc $\lim(p_n) = 0$).
Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{2}} = 2\alpha$, on en déduit : $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}}$

2.2. La série entière géométrique $\sum x^n$ ayant un rayon de convergence égal à 1, il en est de même pour les séries entières $\sum nx^n$ et $\sum n(n-1)x^n$ qui sont les séries entières dérivées termes à termes.
En les évaluant en $x = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que les séries $\sum n\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $\sum n(n-1)\dfrac{1}{2^{n-2}}$ convergent, donc, $\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance}}$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 1$$

et

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X = n) = \frac{1}{2^3}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{(1 - \frac{1}{2})^3} = 2$$

ce qui permet d'obtenir :

$$V(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 + 1 - 1 = 2.$$

$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 \text{ et } V(X) = 2.}$

Exercice 5.

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2[X]$ et projection orthogonale.

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$< P|Q >= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. — P et Q sont des polynômes à coefficients réels, les polynômes dérivés le sont aussi et $< P, Q >$ est donc un réel.
$(P, Q) \mapsto < P, Q >$ est donc à valeurs dans $\mathbb{R}$.
— La multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative donc $< \, , \, >$ est symétrique.
— De même ; la multiplication dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à l'addition et la dérivée est linéaire, donc $< \, , \, >$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Par symétrie et $< \, , \, >$ est bilinéaire.
— Soit $P \in E$. $< P, P >= P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 \geq 0$.
$< \, , \, >$ est donc positive.
— Si $< P, P >= 0$, alors $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ car une somme de carrés est nulle si, et seulement si, chacun des carrés est nul.
Donc 1 est une racine d'ordre au moins 3 de P, qui est de degré inférieur ou égal à 2 : P est donc le polynôme nul.
$< \, , \, >$ est donc définie.

En conclusion, $\boxed{< \, , \, > \text{ est bien un produit scalaire.}}$

2. On utilise le procédé d'orthonornalisation de *Graam-Schmidt* à partir de la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.
— Soit $R_0 = 1$.
$< R_0, R_0 >= 1 + 0 + 0$, on choisit $\boxed{P_0 = 1}$.
— Soit $R_1 = X + \alpha P_0$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a $< P_0, R_1 >=< P_0, X > +\alpha < P_0, P_0 >=< P_0, X > +\alpha$
donc : $< P_0, R_1 >= 0 \Leftrightarrow \alpha = - < P_0, X >$.
Or : $< P_0, X >= 1.1 + 0.1 + 0.0 = 1$, on choisit donc $R_1 = X - 1$
$< R_1, R_1 >= 0^2 + 1^2 + 0^2$, doù, $\boxed{P_1 = X - 1}$.
— On pose $R_2 = X^2 + \alpha P_0 + \beta P_1$.
Comme $< P_0, R_2 >=< P_0, X^2 > +\alpha < P_0, P_0 > +\beta < P_0, P_1 >=< P_0, X^2 > +\alpha.1 + \beta.0$
et $< P_1, R_2 >=< P_1, X^2 > +\alpha < P_1, P_0 > +\beta < P_1, P_1 >=< P_0, X^2 > +\alpha.0 + \beta.1$
On résout

$$\begin{cases} < P_0, R_2 >= 0 \\ < P_1, R_2 >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha =< P_0, X^2 > \\ \beta =< P_1, X^2 > \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

On choisit $R_2 = X^2 - 2(X - 1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Comme $< R_2, R_2 >= 4$, on pose pour normer P_2 : $\boxed{P_2 = \frac{1}{2}(X - 1)^2}$.

Finalement : $\boxed{\left(1, X - 1, \frac{(X - 1)^2}{2}\right) \text{ est une base orthonormale de } E \text{ pour le produit scalaire considéré.}}$

3. Notons p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$. On a :
$d(X^2-4, \mathbb{R}_1[X]) = ||X^2-4-p(X^2-4)||$ et $p(X^2-4) =< X^2-4, P_0 > P_0+ < X^2-4, P_1 > P_1$.
Or $< X^2-4, P_0 >= -3$ et $< X^2-4, P_1 >= 2$, d'où :

$$p(X^2-4) = -3P_0 + 2P_1 = 2X - 5.$$

Donc, $d(X^2-4, \mathbb{R}_1[X]) = ||X^2-2X+1|| = 2$. $\boxed{d(X^2-4, \mathbb{R}_1[X]) = 2}$

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

4.1. H est un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire non nulle : $\varphi : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1) \end{cases}$.

$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.}}$

4.2. Soit ψ la projection orthogonale sur H.
(P_1, P_2) est une famille de polynômes de H qui forme une famille libre (car de degrés échelonnés), de cardinal 2, c'est donc une base de H.
De plus, $1 \in H^\perp$ car $1 \perp P_1$ et $1 \perp P_2$.
On a $\psi(1) = 0$, $\psi(P_1) = P_1$ et $\psi(P_2) = P_2$.
donc $\psi(X) = \psi(P_1+1) = P_1 = X-1$ et $\psi(X^2) = \psi(2P_2+2P_1+1) = 2P_2+2P_1 = X^2-1$,
d'où :

$$\boxed{\mathrm{mat}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Avant 2020, les concours CCINP (anciennement CCP) et e3a étaient séparés. Il y avait 2 épreuves de mathématiques au concours e3a, l'ancienne « Épreuve de Mathématiques 1 » ressemble à l'épreuve e3a actuelle.

Voici ce qu'en dit la notice depuis 2020 :

Notice e3a 2020

L'épreuve de « Mathématiques » spécifique à la banque e3a-Polytech prend en compte les compétences des candidats en termes de capacités rédactionnelles et de communication à l'écrit et pour présenter un argumentaire sous forme de démonstration.
L'épreuve a une durée de 4 heures. Elle est réalisée sans calculatrice.
Elle peut inclure des questions de cours ou des applications directes du cours afin d'évaluer le niveau et les connaissances des candidats.
L'épreuve comporte trois à cinq exercices indépendants portant sur des parties diverses du programme de mathématiques de PCSI/PC et permet de tester les compétences « utiliser et appliquer les théorèmes du cours » et « calculer et utiliser un langage symbolique ». Cette épreuve évalue plus particulièrement la capacité des candidats à « s'engager dans une recherche », « mettre en œuvre des stratégies » et traduire en langage mathématique des problèmes pouvant relever de toutes les disciplines du concours. Ainsi certains exercices peuvent s'intéresser à une démarche de résolution mathématique d'une situation issue d'une autre discipline.

Remarque : Les épreuve 2, antérieures à 2020, problèmes de 3h, peuvent quand même être intéressantes pour s'entraîner au format « problème », qui tombe aux autres concours.

Les rapports des épreuves de mathématiques 2019 n'a jamais été publié sur le site du concours.

e3a

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Question préliminaire

Soit a un réel non nul.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à tout x réel associe le nombre complexe $\dfrac{1}{x+\mathrm{i}\,a}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.

Dans tout le problème, λ est un réel strictement positif

Pour tout réel α et tout réel $\lambda>0$, on définit l'application $f_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t\mapsto t^\alpha\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$.

1.

1.1 Déterminer l'ensemble A des couples $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\displaystyle\lim_{t\to 0,t>0} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe.

1.2 Déterminer l'ensemble B des couples $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer que pour tout x réel, les fonctions $t\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\,\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ et $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\,\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ sont intégrables sur $]\,0,+\infty[$.

On définit alors les deux fonctions U et V sur $\mathbb{R}$ par : $U(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\cos(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $V(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

3. Etudier les parités des fonctions U et V.

4. A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Pour tout réel x, on pose $W(x)=U(x)+\mathrm{i}\,V(x)$ où i vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.

5.1 Montrer que la fonction W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5.2 Démontrer que la fonction W est solution d'une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre que l'on explicitera et que l'on ne cherchera pas à résoudre ici. (On pourra utiliser une intégration par parties)

5.3 En déduire que U et V sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5.4 Prouver que l'on a pour tout réel x : $\begin{cases} U'(x)=-\dfrac{V(x)+x\,U(x)}{2(1+x^2)}\\[2mm] V'(x)=\dfrac{U(x)-x\,V(x)}{2(1+x^2)}\end{cases}$

6. Pour tout réel t, on note $g(t)=f_{-1/2,\lambda}(t)\,\sin(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,\sin(t)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. On définit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-1)^n\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$.

7.1 Prouver que pour tout entier naturel n, $a_n=\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$

7.2 Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.3 Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

8. **8.1** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\,a_k$ converge. On note S sa somme.

8.2 Montrer que $S > 0$.

8.3 En utilisant la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k$, montrer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$

9. A l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$.

10. Pour tout réel $x > 0$, on note $R(x) = [U^2(x) + V^2(x)]^{1/2}$ et $T(x) = \arctan\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)$

10.1 Prouver que les fonctions R et T sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

10.2 Montrer que les fonctions R et T sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

10.3 Démontrer alors que R et T sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.

10.4 Résoudre ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$.

10.5 En déduire une expression sur $\mathbb{R}_+$ de R et de T à l'aide de fonctions usuelles.

11. Donner des expressions de $U(x)$ et de $V(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

12. Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en résolvant l'équation différentielle (E) obtenue à la question **5.2**.

13. Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $U_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt)\,\mathrm{d}t$ et $V_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^n(xt)\,\mathrm{d}t$.

13.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $U_2(x)$ et $V_2(x)$ à l'aide de $U(x)$ et $V(x)$.

13.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n(x)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1.

1. <u>Question de cours</u> : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p}$

Vérifier que la suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

2.2. Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p} > 1.$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \frac{a_n}{n}$.

On a donc : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{a_n} > 1.$

3. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

4. Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n-1} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n-2} > 1$$

5. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2, 3]$.

6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$.

7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1.$

8. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.

Soint $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, ..., X^{2n})$ et a un réel.

On considère l'application Φ_a définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \quad \Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + a\, X\, P$$

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.

Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphisme de E.

2. Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.

Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda\, P$.

3. Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.

On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.

4. Déterminer une matrice B dont le spectre est $[\![0, 2n]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5. Expliquer comment construire à l'aide de Φ_a, un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 9, ..., 4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 3.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n$.

1. Soit Φ l'application qui à tout élément u de $\mathcal{E}$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2) de $\mathbb{R}^3$.

1.1. Prouver que Φ est une bijection de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$.

1.2. En déduire la dimension de l'espace $\mathcal{E}$.

2. On note alors pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\varepsilon_i = \Phi^{-1}(e_i)$ où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.1. Justifier que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

2.2. Déterminer explicitement les suites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

3. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathcal{E}^2$, on pose : $(u|v) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} u_i\, v_i$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. On notera $\|\ \|$ sa norme associée.

4. Vérifier que la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de $\mathcal{E}$.

5. On définit l'application d sur $\mathcal{E}$ par :

$$\forall\, u \in \mathcal{E},\quad d(u) = w \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{n+1}$$

5.1. Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5.2. Ecrire la matrice de l'endomorphisme d dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathcal{E}$.

5.3. L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

5.4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par d.

5.5. Prouver que d est une isométrie de $\mathcal{E}$. Déterminer d^3.

5.6. Soit H l'orthogonal de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par d.

5.7. Reconnaître la nature géométrique de la restriction de d à H et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 4.

1. **Question de cours 1** : Rappeler sans démonstration le développement en série entière de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et donner son rayon de convergence.

2. **Question de cours 2** : Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver que si deux matrices carrées M et N de taille d sont semblables, alors les matrices M^p et N^p sont semblables.

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible, $\varphi(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!} A^{2n+1} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!} A^{2n+1}$.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \dfrac{1}{2\,i}\left[\exp(iz) - \exp(-iz)\right]$ et $c(z) = \dfrac{1}{2}\left[\exp(iz) + \exp(-iz)\right]$ où i vérifie $i^2 = -1$.

3.1. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!} z^{2n+1}$.

3.2. Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

4. Si $A = \gamma\, I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.

5. On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.

5.1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\, A\, P$.

5.2. Déterminer $\varphi(B)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice P.

6. On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta = \alpha$.

6.1. Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe y tels que : $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}\, A\, Q$.

6.2. Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.3. En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice Q.

7. Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

8. Existe-t-il une matrice X de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1115 – D'après documents fournis

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

L'objet de ce problème est d'étudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax \qquad (E_a)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Etude de l'équation (E_a)

1. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.
   (a) Montrer que si $a \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0, 1]$.
   (b) Montrer que si $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.
   (c) Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.
   (d) Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.
2. Illuster sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0]$, $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $a = \frac{1}{e}$ et $a > \frac{1}{e}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$).

Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad \text{(R)}$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).
2. Soit φ une solution de (R). Montrer que :
$$\varphi(0) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0.$$
3. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.
   (a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) > 0$.
   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n.$$

(c) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m.$$

(d) Déduire des questions précédentes que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).

(f) Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x.$$

Partie III. Etude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X (X+n)^{n-1}.$$

1.(a) Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

(b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).$$

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).

Partie IV. Retour sur l'équation (E_a)

Dans cette partie on note α_a **la plus petite** solution, si elle existe, de l'équation (E_a).

1.(a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad (x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}.$

(b) Rappeler la formule de Stirling puis montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés, la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geq 0} P_n(x) a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leq \dfrac{1}{e}$.

2. Dans cette question on se fixe un réel a de $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ et on note F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) a^n.$$

(a) Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Rappeler le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries.

(c) En utilisant les résultats de la partie III., montrer que F_a est solution de (R) et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x .$$

(d) Montrer que F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a'(x) = a F_a(x+1).$$

(e) En calculant $F_a'(0)$ de deux façons différentes, montrer que $F_a(1)$ est solution de (E_a).

3. On note G la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ par $G(a) = F_a(1)$.

(a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ et monotone sur $[0, \frac{1}{e}]$.

(b) Expliciter $G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right)$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ par la fonction G.

(c) Conclure que

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

4. Soit C un réel tel que $1 \leq C \leq e^{\frac{1}{e}}$. Montrer que l'équation $y^y = C$, d'inconnue $y > 0$, admet une unique solution y_0 et que

$$y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\ln(C))^n.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1142 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques B PC 2018

Présentation de l'épreuve (durée 3h)

Le sujet porte sur l'étude des éventuelles solutions de l'équation $\ln(x) = ax$, a étant un paramètre réel ; pour un certaine plage du paramètre a on établit une formule qui exprime la plus petite solution de l'équation en tant que série entière du paramètre a. Cette formule a une longue histoire, inspiré par des travaux de Lambert de 1758, elle est découverte par Euler en 1779, puis redécouverte/redémontrée successivement par Eisenstein en 1844 et Jensen en 1902.
Le problème est divisé en quatre parties, la première partie étudie l'existence de solutions de l'équation $\ln(x) = ax$, la deuxième porte sur la résolution de l'équation fonctionnelle très classique $f(x + y) = f(x)f(y)$, la troisième partie étudie une suite de polynômes (polynômes d'Abel) et la dernière partie, plus longue, établit la formule mentionnée précédemment.

Commentaire général de l'épreuve

Le sujet n'étant pas trop long, toutes les parties ont été abordées. Le sujet fait appel à des connaissances diverses du programme d'analyse avec plus précisement des connaissances du programme de première année pour les trois premières parties et de deuxième année pour la dernière partie. Les candidats ayant des bases solides d'analyse s'en sont bien sortis ce qui a donné de bonnes, voire très bonnes copies. Le bilan est cependant, en moyenne, plus mitigé et parfois décevant avec des faiblesses surprenantes sur des notions basiques d'analyse notamment sur celles du programme de première année qui devraient être maitrisées en fin de deuxième année.
Le jury a constaté dans un nombre important de copies un "papillonage" alors que de très nombreuses questions nécessitent une imprégnation totale de l'énoncé. Dans la mesure où le sujet est relativement court, mieux vaut se limiter à traiter une moitié/deux tiers du sujet quitte à réserver un peu de temps en fin d'épreuve pour grapiller des points.
Les correcteurs ont déploré très peu de copies mal soignées et soulignent les efforts de présentation et de rédaction.

Analyse par parties

Partie 1

Une partie assez simple à condition de faire avec précision l'étude des fonctions auxiliaires ce qui a été fait par une moitié des candidats, trop peu comprennent qu'il fallait utiliser un théorème fondamental et précis (peu importe le nom qu'on lui donne si la référence est bien claire). La continuité sur un intervalle et la stricte monotonie étant des arguments essentiels et souvent très diffus.

La dernière question concernant les représentations graphiques de la fonction ln et des droites d'équation $y = ax$ a été globalement bien faite mais a quand même posé des difficultés à une proportion non négligeable de candidats qui n'ont pas su représenter correctement les fonctions ou ont simplement passé la question.

Partie 2
Une deuxième partie très détaillée où les résultats attendus sont clairement énoncés. De la précision était attendue, tant pour effectuer les récurrences nécessaires que pour la bonne gestion des cas particuliers.
La stricte positivité de la fonction φ a été rarement bien traitée (question 3.a). A la question 3.b. beaucoup de candidats font une récurrence sur $\mathbb{Z}$. La fin n'est que rarement correcte, la continuité de la fonction et la convergence de la suite utilisée rarement bien dégagées.

Partie 3
Une troisième partie simple au début a été correctement traitée par les candidats, la dernière question plus difficile a été très rarement réussie.

Partie 4
Une quatrième partie qui utilisait plus nettement les notions de deuxième année, et qui révèle les capacités des candidats. L'équivalent demandé a la question 1.a. a été assez bien traité. Pour la question 1.b., la formule de Stirling est connue mais la convergence absolue de la série n'a pas été bien traitée, on se perd souvent sur l'usage des paramètres : série entière en a (avec un rayon de convergence) ou série de fonction en x ou simplement série numérique ? Le cas $a = \frac{1}{e}$ est en particulier rarement bien traité. De même, la question suivante où l'on doit étudier la continuité d'une série de fonctions est très rarement réussie.
Le produit de Cauchy est rarement bien cité et à la question 2.c. les candidats se précipitent vers le résultat demandé en omettant les arguments nécessaires. Le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction F_a est là encore rarement correctement traité ; la suite a été assez peu abordée.
Dans l'ensemble les questions 1.b., 2.a. et 2.d. ont été décevantes, ce sont des questions tout à fait standard (convergence de série, continuité d'une série de fonction et caractère $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions) auxquelles les étudiants sont préparés en deuxième année de cursus.

Conseils aux futurs candidats

- ne pas négliger certains chapitres du programme notamment ceux de première année qui peuvent ne pas avoir été revus en deuxième année.
- ne pas "papillonner" et prendre le temps de s'imprégner du sujet surtout si celui-ci est de longueur raisonnable.
- les correcteurs encouragent fortement la bonne présentation ainsi que la qualité de la rédaction des copies, un nombre de points non négligeable leur est consacré. Sont sanctionnées, par exemple, les copies dont les résultats ne sont pas soulignés, les copies comportant des fautes d'orthographes ou bien celles dont la rédaction est trop elliptique.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercices

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n, n) par I_n.

Soit $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire canonique :
Pour tous $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note $\vec{u} = (1, 1, ..., 1)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 et F le sous-espace vectoriel formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

1. Démontrer que F est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n, n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

3. Enoncer précisément le théorème spectral. Que peut-on en conclure pour la matrice A_n ?

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ est dans F. Calculer $A_n X$ en fonction de X.

5. Déterminer les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.

6. Calculer le déterminant de la matrice A_n.

On considère B_n la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par blocs par :

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

7. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n. Démontrer que α est une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.

9. En déduire que les valeurs propres de B_n sont dans l'ensemble $\{-2, 0, n-2, n\}$.

10. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B_n.

Soit M une matrice de taille (n,n). On lui associe U_M, la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}.$$

12. On suppose M diagonalisable. On note $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M. Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, ..., \alpha_r$.

13. La matrice U_M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geq 1} h_n\, x^n, \quad S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\, x^n \ \text{ et } \ T(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n}\, x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier $h_{2n} - h_n \geq \dfrac{1}{2}$.

2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.

5. Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.

6. Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Etablir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0)=0$.

7. Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \rightarrow \ln(1-x))$.

8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

9. En déduire une relation entre $T-S$ et L.

10. Soit y dans $]0,1[$

    (a) Justifier que $\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\, du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :
    $$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\, \mathrm{d}u + S(y) = 0$$
    On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

    (b) Justifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :
    $$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}$$

    (c) Justifier que
    $$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)$$

11. Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 3

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Pour tous k, n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On pourra utiliser le fait que : $S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que la suite $(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance et $\mathbf{V}(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) \;=\; \sum_{i=1}^{N} P(X \geq i).$$

On dispose d'une boîte dans laquelle sont placés des jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à N. Soit k un entier naturel ≥ 2. On tire k fois de suite un jeton dans cette boîte. On note son numéro et on le remet dans la boîte. Les tirages sont indépendants les uns des autres. On note X_i la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro du jeton du i-ème tirage, pour i dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X_i est uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note U_k et V_k les variables aléatoires :

$$U_k = \min(X_1, ..., X_k) \text{ et } V_k = \max(X_1, ..., X_k).$$

3. Exprimer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(X_1^2)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ en fonction de N.

4. On se propose de simuler en Python les variables V_k pour $N = 10$.

   (a) Ecrire une fonction `simulX` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $X_1, ..., X_{100}$. On pourra utiliser la fonction : random.randint L'instruction random.randint(1,10) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 10]\!]$ uniformément.

   (b) En déduire une fonction `REALIV` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $V_1, ..., V_{100}$.

5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.

   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Justifier que :

   $$P(U_k \geq i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k.$$

   (b) On appelle plusieurs fois la fonction `REALIV` de la question 4b. On constate qu'à chaque fois, le résultat obtenu est une liste qui se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement ce résultat.

   (c) Exprimer $\mathbf{E}(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6. (a) On introduit les variables $Y_i = N + 1 - X_i$, pour i dans $[\![1, N]\!]$. Justifier que les variables $(Y_1, ..., Y_n)$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

   (b) En déduire $\mathbf{E}(V_k)$ et $\mathbf{V}(V_k)$ en fonction de $\mathbf{E}(U_k)$ et $\mathbf{V}(U_k)$.

7. On considère le couple de variables aléatoires (U_2, V_2).

   (a) Exprimer $U_2 + V_2$ et U_2V_2 en fonction de X_1 et X_2.

   (b) En déduire $\mathbf{V}(U_2 + V_2)$ et $\mathbf{E}(U_2V_2)$ en fonction de N.

   On peut déduire par un calcul la covariance de U_2 et V_2, notée $\mathbf{Cov}(U_2, V_2)$. On admet sa valeur :

   $$\mathbf{Cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2-1)^2}{36N^2}.$$

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_2)$ et $\mathbf{V}(V_2)$ en fonction de N.

   (d) On note $\rho_2(N)$ le coefficient de corrélation de U_2 et V_2. Exprimer $\rho_2(N)$ en fonction de N.

   (e) Que peut on dire de la suite $(\rho_2(N))_{N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}}$ lorsque N tend vers $+\infty$?

8. (a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, démontrer que $\mathbf{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(X \geq i)$.

   (b) Exprimer $\mathbf{E}(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_k)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (d) Donner un équivalent de $\mathbf{V}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Rapport sur l'’epreuve de Mathématiques 1 PC

Présentation du sujet

L'épreuve consiste en trois exercices indépendants sur des thèmatiques différentes du programme (algèbre, analyse, probabilités). Le premier exercice est un exercice de réduction, il étudie le spectre de certaines matrices construites par blocs en partant de cas particuliers. Le deuxième exercice étudie les relations entre différentes séries entières dont les coefficients sont en relation avec la suite harmonique (en particulier la fonction dilogarithme). Le troisième est un exercice qui étudie les moments et la corrélation entre le maximum et le minimum de tirages uniformes indépendants dans un ensemble fini.

Commentaire général de l'épreuve et Analyse générale

Les sujets de chacun des exercices sont conçus pour être progressifs, avec des questions élémentaires, et de vérification des connaissances (concepts et théorèmes du programme), puis des questions plus difficiles. Il n'est pas attendu des candidats qu'ils traitent l'intégralité de chaque exercice et aucun ne l'a fait. Ce sont les calculs élementaires bien menés, les questions de cours classiques , la logique de l'argumentation qui trient les copies, plus que les questions techniques abordées seulement dans quelques très bonnes copies. Des notes très correctes peuvent être obtenues en traitant correctement et précisément les questions élémentaires. Les correcteurs ont apprécié le soin apporté à l'écriture et à la présentation dans la plupart des copies, mais il reste néanmoins quelques copies particulièrement difficiles à déchiffrer.

Analyse des résultats par exercices

- Le premier exercice a été correctement abordé dans la majorité des copies. L'énoncé du théorème spectral a posé de nombreuses difficultés, l'énoncé étant souvent incomplet (oubli de la base orthonormée par exemple). Les questions 4,5 et 6 sont souvent plutôt bien traitées, mais les candidats ne voient pas le lien entre la question 4 et la question 5, et font le calcul du polynôme caractéristique. Les calculs de déterminant par bloc montrent des confusions entre objets de natures très différentes. La fin de l'exercice 1 est rarement traitée de façon significative.
- Dans le second exercice, peu de candidats ont fait le lien entre la question 1 et la question 2. Ceux qui ont démontré la divergence de la suite $(h_n)_n$ ont souvent utilisé une comparaison avec une intégrale. Les questions sur les rayons de convergence de séries entières et

développements en séries entières sont bien réussies dans une majorité de copies. En revanche, la convergence des intégrales proposées a posé plus de problèmes. Les questions 10b et 10c sont rarement traitées avec la précision nécessaire (passages à la limite non justifiés le plus souvent.)

- L'exercice 3 est peu réussi. Seules les questions 3,4,5 et 7a, 7b ont été abordées par une part significative de candidats. L'espérance et surtout la variance de la loi uniforme ne sont pas bien connues. L'indépendance de variables aléatoires est un argument qui peine à être cité. On lit des confusions entre les variables et leurs lois de probabilités. Les questions d'informatique sont plutôt très bien traitées, à part des erreurs dans les indexations de listes.

Conseil aux futurs candidats

- Nous conseillons aux futurs candidats de bien connaître leurs cours, de le citer précisément lorsqu'on l'utilise et d'en vérifier soigneusement les hypothèses.
- Des petits calculs, des études de cas particuliers sont proposés pour s'approprier l'exercice. Ils méritent attention et doivent être traités avec soin.
- Soignez globalement votre travail : présentation, argumentation, code.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

L'épreuve est constituée d'un problème dont les trois parties sont relativement indépendantes.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Partie I

I. 1) a) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-ts}\,ds$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

I. 2) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt.$

I. 3) a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$

b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Justifier l'égalité :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt.$$

c) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que :

$$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma.$$

I. 4) a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit : $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,dt.$

Pour tout $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,dt$

et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n}.$

b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

c) En admettant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right).$$

I. 5) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt.$

I. 6) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $R(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,dx = 1.$$

Partie II

II. 1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$.

b) Justifier que $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire la valeur de I_n.

II. 2) On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant 2$.

À tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\,dt.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

b) Étudier si M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

II. 3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant n$. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associant à tout polynôme P son polynôme dérivé P'.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer des réels $b_0(x), \ldots, b_n(x)$ tels que $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$. *Indication: On pourra citer et utiliser une formule de Taylor.*

b) À tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\,dt.$$

Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait : $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k D^k(P)$.

c) Déterminer les éléments propres de T (valeurs propres et vecteurs propres).

II. 4) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. Déterminer $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\quad y' - y + g = 0$.

Justifier que la solution générale est de la forme : $y : x \mapsto ke^x + e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\,dt,\ k \in \mathbb{R}$.

II. 5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée et soit $N_\infty(g) = \sup\{|g(t)|, t \in \mathbb{R}\}$.

a) On définit $T_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t+x)\,dt$.

Justifier qu'alors $T_g(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u} g(u)\,du$, et que T_g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en précisant $(T_g)'$ en fonction de T_g et g.

b) En supposant g non nulle, déterminer s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_g = \lambda g$.

c) Montrer qu'en général T_g est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $N_\infty(T_g)$ au moyen de $N_\infty(g)$.

d) Montrer que si g tend vers 0 en $+\infty$, alors T_g aussi.

Indication : on vérifiera que si $|g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$, alors $|T_g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$.

II. 6) a) Pour tout réel A, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t}\,dt$.

b) Soit $c : t \mapsto \cos(t)$, $s : t \mapsto \sin(t)$ et F le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par (c, s).

Montrer que $g \mapsto T_g$ (où T_g défini ci-dessus) définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice N dans la base (c, s). N est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Partie III

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $xy''+y'-(x+1)y = 1$.

III. 1) On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite (a_n), montrer qu'il existe $K > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}.$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.

III. 2) On souhaite résoudre ici cette équation difffentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$\mathcal{S} = \{y \in C^2(I, \mathbb{R}) / \quad \forall x > 0, \quad xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \quad \}.$$

a) Pour tout $y \in C^2(I, \mathbb{R})$, on pose $z(x) = e^{-x}y(x)$ pour tout $x > 0$.
Montrer que $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x > 0, \quad xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x} \qquad (\star).$$

b) Déterminer les $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0.$$

c) Déterminer les $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = e^{-x}.$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in C^2(I, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation $(\star)$ de **III.2.a)**, en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$: *On utilisera* $R(x)$ *et* $R(2x)$.

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in \mathcal{S}$.

III. 3) a) Sachant que $R(x) = -\ln(x) + \gamma + o(1)$ quand $x \to 0$ avec $x > 0$, déterminer les solutions $y \in \mathcal{S}$ ayant une limite finie en 0.

Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie **I** et reliée à R par : $S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma$ pour $x > 0$ (vu en **I. 3) c)**).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question **III. 1)**: on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comment pourrait-on alors obtenir une expression des suites (a_n) de **III.1)** ?

•• FIN ••

Épreuve de mathématiques II. (PC- e3a 2017)

1. Présentation

2150 candidats dont 1965 ont composé, avec une moyenne de $9,23$ et un écart-type de $4,41$.

L'épreuve concernait essentiellement à étudier des intégrales et un opérateur intégral avec quelques questions d'algèbre linéaire ou sur les équations différentielles. Le problème comportait nombre de questions avec des difficultés variées.

2. Commentaires

Le niveau d'ensemble constaté est plutôt moyen voir faible, avec très peu de très bonnes copies, la plupart des candidats cherchant à répondre aux questions tant bien que mal et pas toujours avec les méthodes attendues. On s'inquiète aussi d'un nombre important de candidats à qui semblent manquer des bases nécessaires et en empilent leurs réponses sans toujours donner le sentiment d'une compréhension des choses écrites.

Un nombre donc trop important de copies plutôt faibles et relativement courtes, ce qui conduit à un certain étonnement compte-tenu des questions très classiques et du large spectre du programme balayé par le sujet. Sur la forme, présentation et la rédaction sont globalement convenables et la plupart des candidats connaissent la marche à suivre, mais il reste trop de copies mal présentées, mal numérotées, avec une présentation confuse et en particulier sans référence au numéros des questions. Insistons sur le fait qu'une copie est un texte destiné à convaincre,. Que pour cela il faut introduire la question, la démarche mise en oeuvre et les arguments et des raisonnements précis avec la concentration nécessaire pour faire des calculs corrects.

Beaucoup de fautes en analyse : ainsi sur la convergence des intégrales ("la fonction tend vers 0 en $+\infty$ donc l'intégrale existe"), la confusion entre intégrale dépendant d'un paramètre et dépendant de ses bornes avec la notion fondamentale de primitive mal appréhendée ; la notion de fonction développable en série entière ("la fonction est bijective donc développable", "elle est continue donc développable"), la manipulation d'intégrales divergentes et les intégrations par parties vraiment malhonnêtes (combien ont écrit $\ln(0)$!), la notion de convergence uniforme Des erreurs sur la suite (I_n), censée être géométrique et l'intégrale $R(x)$, "majorée par son premier terme négligé" pour justifier que $R(x) \leq \dfrac{e^{-x}}{x}$.

L'algèbre linéaire a été moins maltraitée : beaucoup d'efforts ont été déployés pour prouver le caractère "endomorphisme" dans II et la bonne matrice a souvent été trouvée. Les équations différentielles aussi ont eu plus de succès : la formule donnant les solutions d'une équation homogène, la méthode de variation de la constante semblent en général assimilées.

3) Analyse des résultats

Partie I

1. (a) Quelques erreurs sur la détermination d'une primitive de $s \mapsto e^{-st}$ pour $t \neq 0$.

   (b) La continuité en 0 est effectuée, mais pas de phrase pour l'évoquer ailleurs. Il est curieux qu'après avoir explicité f, trop de candidats 'utilisent le théorème de continuité sous le signe intégrale avec la majoration fausse :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall s \in [0,1], \quad e^{-st} \leqslant e^{-s}.$$
   Peu voient d'ailleurs que sur un segment, majorer par une constante suffit. La bijection est rarement bien justifiée, certains étudient le noyau ou donnent des explications fantaisistes. La monotonie est rarement expliquée avec l'intégrale directement, ou quitte à dériver sous le signe intégral...

   (c) Question généralement réussie car le développement en série entière de exp est connu, mais ensuite cela peut se gâter. Des erreurs de « mélange » entre variables (la fonction obtenue dépend parfois de t) et peu de justification pour intégrer la série entière.

   (d) Question généralement réussie lorsque la précédente l'est (quelques tentatives de bluff néanmoins pour compenser des décalages d'indices aux questions précédentes).

2. (a) Parfois très long, pour un résultat qui dépend de t et x...

3. (a) Souvent correct.

   (b) Parfois très bien faite mais les copies moyennes utilisent des termes du type $\displaystyle\int_0^1 dt/t$. Le caractère C^1 de f est souvent justifié avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètres qui donne, dans quelques copies, une dérivée nulle. La présence du signe moins devant la dérivée a été régulièrement absent et ce signe réapparaît au cours du calcul pour compenser la fin de la question. Beaucoup d'intégrales divergentes apparaissent, avec notamment des "ln(0)". La continuité de la fonction sous le signe intégrale est peu évoquée et beaucoup de copies faibles justifient l'existence en mentionnant que $t \mapsto e^{-t}/t$ tend vers 0 en $+\infty$. La classe C^1 et la conclusion correcte est assez rare.

4. (a) La question a été peu abordée et la majoration très rarement. Énormément de tours de passe passe pour l'inégalité de droite.

(b) On prouve en général la convergence simple, d'autres fois on rappelle de la definition de la convergence, mais on donne une majoration dépendant de x..., et l'idée de majorer par $1/n$ finalement très rare.

(c) Question peu abordée.

5. (a) De façon analogue à la question 3)b), l'intégrale a souvent faussement été séparée en deux par linéarité et le lien avec S a été peu remarqué.

6. (a) La limite a été généralement démontrée mais l'inégalité très peu. Majoration directe par e^{-x}/x en utilisant la décroissance de e^{-t}/t

(b) Question peu abordée. La plupart cherche à calculer $R(x)$. Peu ont eu l'idée d'intégrer par parties.

Partie II

1. (a) Question très abordée et plutôt réussie même si, à nouveau, un nombre non négligeable de copies justifie l'existence en mentionnant juste la continuité de la fonction intégrée ou le fait qu'elle tende vers 0 en $+\infty$.

(b) Question plutôt réussie mais beaucoup de candidats oublient de montrer que $I_n = n!$.

2. (a) Le fait que T soit un endomorphisme est plutôt correctement écrit mais la matrice pas toujours correcte trouvée (présence notamment de variables dans la matrice voire de fonctions), ou parfois transposée. L'argument pour la non- diagonalisabilité est en général vu. Certains candidats indiquent que M est diagonalisable car elle possède une valeur propre triple ou parce qu'elle est triangulaire supérieure.

3. (a) Arriver à justifier que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ est plutot rare.

(b) La formule de Taylor est rarement écrite correctement (beaucoup de formules de Taylor-Young notamment).

4. (a) La méthode est connue mais la détermination de la solution particulière a souvent été mal faite (avec du bluff sur le signe moins). Pour l'équation complète, on intègre souvent de x à l''infini sans justifier.

Le reste de cette partie a été peu abordé.

Partie III

1. (a) Question très abordée mais où les calculs n'ont abouti que dans la moitié des copies. Beaucoup de relations dépendent de x à la fin des calculs. N'aboutit pas souvent, mais souvent tenté.

(b) Cette question est peu abordée.

2. (a) Cette question est généralement bien écrite même si l'équivalence n'est pas toujours clairement mentionnée.

(b) Souvent tenté, parfois réussi.

L'enchainement b à e. rarement mené au bout.. Par exemple $exp(-2x - \ln(x)) = (exp(-2x))/x$ est rare.
La fin du problème est peu abordée.

4. Conseils aux futurs candidats. Conclusion.

La variété des questions a permis un bon étalement des notes. Dans une telle épreuve comportant beaucoup de questions il y a souvent moyen de donner des réponses brèves et il convient de réfléchir aux méthodes à utiliser avant de partir dans des calculs compliqués, ce qui fait partie des compétences évaluées.

Nous ne pouvons que conseiller aux candidats de s'efforcer de bien faire, en rédigeant avec précision ce qui est abordé. Une bonne connaissance du cours est indispensable ainsi que la pratique d'exercices d'entraînement pour acquérir un bon savoir-faire. Une lecture attentive et minutieuse du sujet permet d'ìviter de nombreuses erreurs et incohérences. Les correcteurs attendent des réponses argumentées, précises. Les réferences aux résultats du cours doivent être bien rédigées et sans abréviations. Les correcteurs apprécient les copies propres et bien écrites. On aimerait que les candidats fassent preuve de davantage de rigueur dans les preuves demandées.

Nous constatons des différences sensibles entre les candidats, que les calculs posent problème ainsi et que la précision des explications n'est pas un impératif de tous. Quelques bonnes copies, bien présentées et de bon niveau, mais trop rares.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1;+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

(1). Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.

(2). Soit $a \in]1;+\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue l'intervalle $[a;+\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?

(3). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a). Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1;+\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$

(b). Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;+\infty[$ sous forme d'une série.

(4). Préciser le sens de variation de ζ.

(5). On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.

(a). Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.

(b). Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \geq 2, \quad 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$

(c). En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$

(6). On considère à présent $h \in]0,+\infty[$.
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.

(7). Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.

(8). On pose : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

(a). Justifier que F est bien définie.

(b). Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c). Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[, \quad \zeta(x) + \mathrm{F}(x) = 2^{1-x}\zeta(x).$

(d). Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

EXERCICE 2

On rappelle que $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$.

(1). Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\, {}^t V_0$.

(a). Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?

(b). Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

(c). **(i).** Calculer $A_0 U_0$.

(ii). Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(iii). Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

(2). Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a). On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.

Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ldots & \ell_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.

(b). Vérifier que $LC = \operatorname{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$ où $\operatorname{tr}(A)$ désigne la trace de A.

(c). Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.

Montrer que $\left(\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda\right)X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0, \operatorname{tr}(A)\}$.

(d). Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?

(e). Vérifier que $\operatorname{tr}(A)$ est valeur propre de A.

(f). Montrer que : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\operatorname{tr}(A) \neq 0$

(3). Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.

On désigne par u un vecteur de E tel que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u)$.

(a). Montrer que $f(u) \neq 0$.

(b). En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.

(c). Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est à dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad P(X = j) = \dfrac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$

(1). (a). Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

(b). En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

(2). Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geq i) \leq \dfrac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}$.

Que peut-on en déduire pour la série de terme général $P(X \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

(3). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

(a). Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_{n,k} = \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

(b). Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{k^i}$

(4). (a). Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $P(X \geq k) \leq \dfrac{k}{k-\lambda} P(X = k)$.

Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $P(X > k) \leq P(X = k)$.

(b). Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sum_{i=2}^{+\infty} P(X \geq i) \leq 1$.

(c). Dans le cas général, que vaut $\sum_{i=0}^{+\infty} P(X \geq i)$? Le justifier.

(5). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

(a). Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 - t \leq e^{-t}$.

(b). Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \dbinom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k!} e^{-\alpha(n,k)} \quad$ où $\quad \alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.

(c). Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(Y = k) \leq \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} e^{\beta(n,k,\lambda)} \quad$ où $\quad \beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda + 1 - k)}{2n}$.

(d). Quelle majoration de $P(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$?

(e). En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$: $\sum_{j=k+1}^{n} P(Y = j) \leq \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

EXERCICE 4

On dit qu'un entier naturel n est premier si, et seulement si, il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

0 et 1 ne sont donc pas des nombres premiers. Par contre, 3 est un nombre premier puisque l'ensemble de ses diviseurs est exactement $\{1,3\}$.

Toutes les fonctions demandées ci-après seront à réaliser dans le langage `Python`

On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

(1). Écrire une fonction `divise(p,q)` d'argument deux entiers naturels non nuls `p` et `q` , renvoyant True si p divise q et False sinon.

(2). Écrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.

(3). Écrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.

(4). Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Pour la suite de cet exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers : $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\varphi(n)\ln(n)}{n} - 1\right|$.

(a). Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).

(b). Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.

(c). Écrire une fonction `test(epsilon)` d'argument un réel `epsilon` strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq \varepsilon$.

(d). Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50;5000]\!]$.

RAPPORT DE L'EPREUVE DE MATHS 1 E3A PC

1) PRESENTATION DU SUJET

Le sujet comportait 4 exercices indépendants, chacun sur un thème différent (analyse, algèbre, probabilités, algorithmique et programmation).

Chaque exercice se composait de plusieurs questions de difficulté graduée et plus ou moins indépendantes. Les programmes des deux années étaient concernés.

Les thèmes abordés sont pour la plupart classiques, comme la fonction ζ , les matrices de rang 1, les queues de lois de probabilités ou les nombres premiers.

Les questions font appel aux connaissances de base du calcul de seconde année, tant en analyse, qu'en calcul matriciel ou dans le dénombrement, ainsi qu'à la maitrise de quelques algorithmes simples utilisant des tests, des compteurs ou des boucles conditionnelles.

De nombreuses questions portent sur le cours ou sur des conséquences immédiates du cours, quelques unes font appel à une maitrise plus approfondie comme la continuité ou la classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une somme de série de fonctions.

2) COMMENTAIRE GENERAL DE L'EPREUVE

L'épreuve a été traitée par 2662 candidats. Les notes obtenues vont de 0 à 20, avec une moyenne de 9,72/20 et un écart-type de 4,49.

Le sujet regroupait un nombre important de questions sur des thèmes très variés et de difficulté très hétérogène. Les candidats ont pu aisément occuper leur 4 heures en se consacrant à leurs thèmes de prédilection.

Au demeurant, la plupart des candidats aborde tous les exercices, en général de façon substantielle.

L'équipe de correction a constaté dans l'ensemble que les copies sont bien présentées, rédigées et que le travail effectué a été soigné. Ce soin a été récompensé, et dans les rares cas de copies de mauvaise facture, les candidats ont été sanctionnés.

3) ANALYSE DES RESULTATS PAR EXERCICE

• *Exercice*1

Il s'agissait de l'étude approfondie de la fonction ζ.
L'ensemble de définition ne pose que rarement problème.

La continuité nécessitait de connaitre et appliquer correctement le théorème relatif aux séries de fonctions. Sur ce point on note d'importants écarts entre les copies. Dans l'ensemble cette question a été bien traitée, mais par une minorité de candidats.

Même remarque pour la classe $\mathcal{C}^\infty$, où les dérivées successives ne posent pas problème, mais le théorème est souvent mal compris ou mal rédigé.

Si la limite de la question 5 a été mieux réussie, on regrette l'absence trop fréquente de courbes à la question 7 ; même approximatives, les courbes rapportent des points non négligeables.

La question 8 a été moins traitée que les autres, mais souvent avec succès, à l'exception du ii) ou là encore la continuité pose problème.

• *Exercice*2

Il s'agissait là d'étudier, d'abord sur un exemple, puis de façon générale la diagonalisabilité des matrices de rang 1.

La question 1 a rapporté beaucoup de points à la plupart des candidats, récompensant ceux qui ont travaillé les techniques classiques sur ce thème.

La question 2a fut plus délicate en particulier à cause de la démonstration d'existence. Cependant, la suite a été plutôt réussie.

La question 3 a été moins traitée et sa première sous-question a entrainé des confusions entre f non nulle et f(x) non nul pour un x donné.

• *Exercice*3

L'exercice 3 était dans le thème des probabilités mais en pratique axé sur le calcul et le dénombrement.

La première question a posé problème par l'utilisation de l'inégalité de Markov, mais aussi par une rédaction souvent hasardeuse sur les critères de convergences de séries à termes positifs.

Les questions suivantes ont moins inspiré les candidats peut-être soucieux d'aborder vite le dernier exercice, ou rebutés par les techniques calculatoires.

Nous avons remarqué cependant que nombre de bons candidats ont largement traité cet exercice avec souvent un réel succès.

• *Exercice*4

C'est l'exercice qui a le mieux réussi aux candidats.

Les questions ont en général été bien traitées, tant sur le principe des algorithmes que sur la correction de la syntaxe du code python.

Le point qui paradoxalement pose souvent problème reste la question 4a qui est pourtant un simple rappel de cours sur une notion très classique en analyse.

4) CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Comme souvent dans les rapports de jury de l'écrit, il convient de rappeler aux futurs candidats que les épreuves sont calibrées de manière à ce qu'un candidat de niveau correct et ayant travaillé sérieusement toute l'année ait une note au dessus de 10/20. A ce titre nous rappelons :

• Qu'il est indispensable de connaitre parfaitement les théorèmes et définitions des programmes de première et deuxième année.

• Qu'un théorème s'utilise en rappelant son énoncé et ses hypothèses et en l'appelant par son nom s'il en a un.

• Que les questions nécessitant de longs calculs rapportent des points en conséquence et qu'il ne faut pas les négliger.

• Que dans tous les exercices il y a des points à prendre et qu'on peut tenter de traiter des questions dans toutes les parties.

• Qu'aucune partie du programme ne doit être négligée.

• Que la qualité de la rédaction et de l'argumentation mathématique est un élément fondamental pris en compte lors de l'évaluation.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I. et II., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

On rappelle que pour une série $\sum_{k\geq 1} u_k$ convergente, le reste d'indice n, pour $n \in \mathbb{N}$, est le réel défini par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Partie I.

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
4. (a) Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$.
   (c) En déduire que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.
   (b) Rappeler la formule de Stirling.
   (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\, dx$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{2n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

   (b) Montrer que f est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\, dx$.

4. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\, dx$.

   (a) En utilisant un changement de variable, montrer que J est convergente et que $I = J$.

   (b) En calculant $I + J$ trouver la valeur de I.

5. Donner, en le justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Partie III.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première et deuxième partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).
On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que la notation $u_n = \circ(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

   (a) Calculer U_n. Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{U_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \circ(R_n)$.

   (d) Conclure que $R_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

(c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$

(d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall n \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq T_n \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(d) Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement? Laquelle converge le moins rapidement? Justifier vos réponses.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques PC2 (problème) 2016

Présentation du sujet

L'épreuve est un problème divisé en trois parties ; le but des deux premières parties est de donner quatre expressions du réel ln(2) sous la forme d'une somme de série puis, dans la troisième partie, d'étudier la vitesse de convergence de ces quatre séries en déterminant un équivalent de leur reste. Ce problème permettait d'utiliser une bonne partie du cours d'analyse ainsi que plusieurs techniques et exemples classiques : série harmonique alternée, intégrales de Wallis, intégrales de Dirichlet, transformation d'Abel, comparaison série-intégrale.

Analyse par parties

Partie 1

Une question de cours, une bonne moitié des candidats, seulement, connaissait le développement en série entière demandé à la question 1., le rayon de convergence étant alors souvent correct. Pour la question 2. il suffisait de penser à utiliser $x = -1/2$ ce qui n'a pas éte souvent perçu. Ce résultat ayant d'ailleurs généré des propositions inexactes à la question précédente. Pour le calcul du rayon de convergence de la question 3., les candidats ont pensé, en général, à utiliser la règle de d'Alembert ; pour le calcul de la somme, certains candidats pensent à utiliser soit un télescopage soit à primitiver le développement en série entière de $\ln(1-x)$, mais avec beaucoup de maladresses dans les calculs, un résultat final correct étant assez rare. A la question 4., on reconnait souvent une série alternée, mais certains affirment une convergence absolue. La majoration uniforme du module du reste en revanche n'est pas toujours justifiée et on ne sait pas en général l'utiliser pour calculer la limite en 1.

Partie 2

C'est la partie la moins bien traitée. La formule de Stirling est correctement énoncée par un candidat sur deux ; la plupart des candidats cherchent à montrer la convergence de la série de terme général a_n en utilisant la règle de d'Alembert (qui ne marche pas ici) sans penser à utiliser un équivalent. Pour la question 2.a. la plupart des candidats pensent à faire une intégration par parties mais un grand nombre de candidats se trompent sur les primitives et dérivées des fonctions en jeu. A la question 3.a. les candidats ont confondu la convergence simple de la série de fonctions avec la convergence simple de la suite de fonctions. La technique de changement de variable est connue et souvent maitrisée mais le choix du changement de variable n'était pas toujours judicieux, lorsque celui-ci n'est pas donné explicitement il faut commencer par penser a un changement de variable affine.

Partie 3

Les deux calculs de somme de termes d'une suite géométrique de cette partie (1.a. et 2.a.) ont posé beaucoup de problèmes aux candidats. La transformation d'Abel (question 1.) était ici guidée, certains candidats arrivent au bout du calcul. La notion de négligeabilité (question (1.c.) n'est pas maîtrisée par les candidats. L'intégration par partie de la question 2.c. a été en général bien traitée mais l'équivalent de la question 2.d a posé plus de problème. A la question 3.b. un nombre satisfaisant de candidats reconnaissent la technique de comparaison série-intégrale. La dernière question du sujet est abordée dans de nombreuses copies, même faibles, les réponses données plus ou moins bien justifiées étant la plupart du temps correctes.

Commentaire général de l'épreuve

L'épreuve a été traitée par 2058 candidats. Les notes sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9.41 et un écart-type de 4.75. Le sujets n'étant pas trop long et les parties étant indépendantes, toutes les parties ont été abordées en revanche peu de questions ont été bien traitées par une majorité des candidats. Ceux ayant des bases solides d'analyse s'en sont bien sortis ce qui a donné de bonnes, voire très bonnes copies. Le bilan est cependant, en moyenne, plus mitigé et parfois décevant avec des faiblesses surprenantes sur des notions basiques d'analyse (par exemple sur les calculs de somme de termes d'une suite géométrique), on a pu ainsi observé un nombre important de notes faibles.
Les correcteurs ont pu parfois constater que, pour traiter certaines questions, les candidats connaissent la méthode ou ont la bonne idée mais sont complètement bloqués dans la mise en oeuvre de celle-ci par en général des difficultés importantes dans les calculs. Les copies étaient dans l'ensemble bien présentées.

Conseils aux futurs candidats

- ne pas négliger certains chapitres du programme ; un candidat ayant, par exemple, fait l'impasse sur les séries, obtient nécessairement une mauvaise note sur une telle épreuve.
- s'entraîner à faire des calculs afin de de pas être bloqué dans la mise oeuvre d'une méthode ou technique.
- les correcteurs encouragent fortement la bonne présentation ainsi que la qualité de la rédaction des copies, un nombre de points non négligeable leur est consacré. Sont sanctionnées, par exemple, les copies mal présentées (soulignez vos résultats), les copies comportant trop de fautes d'orthographes ou bien celles dont la rédaction est trop elliptique.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Dans chacun des exercices, les différentes parties ne sont pas indépendantes, mais tout résultat peut-être admis pour être utilisé par la suite.

Dans tous les exercices, étant donnés deux entiers naturels a, b tels que $a < b$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels n tels que $a \leq n \leq b$. On note N^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Le produit scalaire sur E est noté $< \, , \, >$ et la norme associée $\| \; \|$.

A. Préliminaires : Soient u_1, u_2 deux vecteurs de E.

1. Démontrer l'inégalité :

$$| < u_1, u_2 > | \leq \|u_1\| \, \|u_2\|$$

On pourra considérer la fonction f définie par $f(t) = \|u_1 + tu_2\|^2$ pour t dans $\mathbb{R}$ et démontrer qu'il s'agit d'une fonction polynomiale.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs u_1, u_2 pour que $| < u_1, u_2 > | = \|u_1\| \, \|u_2\|$. Justifier votre réponse.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute famille $(u_1, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, ..., u_n)$ la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $< u_i, u_j >$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

Soit M une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$, dont le (i, j)-ème coefficient est noté $m_{i,j}$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
Si p est un entier naturel non nul, $M^{\otimes p}$ désigne la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $m_{i,j}^p$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

On dit que la matrice M vérifie la propriété $\mathtt{G}$ s'il existe des vecteurs $u_1, ..., u_n$ dans E tels que :

$$M = G(u_1, ..., u_n).$$

B. Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice $(2, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3. On suppose que la matrice B vérifie la propriété $\mathtt{G}$. Soit (u_1, u_2) dans E^2 tels que $B = G(u_1, u_2)$. Justifier que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$.

4. Réciproquement, on suppose que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$. Justifier que B vérifie la propriété $\mathtt{G}$.
Indications : En considérant (e_1, e_2) une base orthonormale de E, on pourra construire une famille de vecteurs (u_1, u_2) telles que $B = G(u_1, u_2)$ en choisissant u_1 sous la forme xe_1 et u_2 sous la forme $ye_1 + ze_2$ pour des nombres réels x, y, z qu'on précisera. On pourra commencer par étudier le cas $a > 0$.

5. Justifier que la matrice B vérifie la propriété $\mathtt{G}$ si et seulement si, pour tout entier p dans N^*, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété $\mathtt{G}$.

C. Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Soient a, b deux nombres réels. On pose :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que la matrice C vérifie la propriété $\mathtt{G}$. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs de E tels que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Démontrer que $a \geq 1$ et $a \geq b^2$.
   (b) Justifier que la famille (u_1, u_3) est othonormale.

(c) Déterminer le vecteur v_2 projection orthogonale du vecteur u_2 sur le plan engendré par les vecteurs u_1 et u_3.

(d) En déduire que $a \geq b^2 + 1$.

(e) Démontrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a > b^2 + 1$.

7. On suppose $a \geq b^2 + 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E.

(a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que $< u, e_1 >= 1$ et $< u, e_3 >= b$.

(b) Justifier que la matrice C vérifie la propriété $\mathtt{G}$.

(c) Est-il vrai que, pour tout p dans N^*, la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété $\mathtt{G}$? On argumentera précisément la réponse.

D. Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ des fonctions f telles que pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)^2 P(t)dt$ est absolument convergente. On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

Soit p dans N^*.

8. Démontrer que pour tous f et g dans $\mathcal{E}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt$ est absolument convergente.

9. On peut donc définir l'application :

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \to & < f, g >_p = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt \end{array}$$

Démontrer que c'est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

10. Démontrer que la fonction h définie par $h(t) = e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$.

Dans la suite, on note :

$$\gamma_p = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

11. Soit α un nombre réel strictement positif. On admet que la fonction h_α définie par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$. Exprimer $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{p-1} dt$ en fonction de α, p et γ_p.

12. Soit n un entier naturel ≥ 2. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs. On désigne par D la matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le (i, j)-ème coefficient $d_{i,j}$, pour (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, est défini par :

$$d_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, il existe un espace euclidien E et une famille $(u_1, ..., u_n)$ dans E^n tels que la matrice $D^{\otimes p} = G(u_1, ..., u_n)$. On explicitera E, son produit scalaire ainsi que la famille $(u_1, ..., u_n)$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A. Soit F la fonction définie en un nombre réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ x^2, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée F'. La fonction F' est-elle continue ? est-elle dérivable ?
3. Etablir le tableau de variations de F et dessiner précisément le graphe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

B. Soit E_0 l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$ sont toutes deux des fonctions polynomiales de degré ≤ 2.

4. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
5. Soient P et Q deux fonctions polynomiales de degré ≤ 2. On pose $P : x \to ax^2 + bx + c$ et $Q : x \to dx^2 + ex + f$. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \begin{cases} P(x), & \text{si } x < 0 \\ Q(x), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les nombres réels a, b, c, d, e, f pour que H soit une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire une base de E_0. Quelle est la dimension de E_0 ?
6. Soit Ψ_0 l'application de E_0 dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\Psi_0(H) = (H(0), H'(0), H(1))$.
   (a) Démontrer que Ψ_0 est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de Ψ_0.
   (c) En déduire que Ψ_0 est surjective.

C. Soit α un nombre réel. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $P : x \to ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soient u, v, w des nombres réels tels que $f(\alpha) = u$, $f'(\alpha) = v$. Soit H la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq \alpha \\ P(x), & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

7. Justifier que H est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\alpha + 1) = w$ si et seulement si (a, b, c) est solution d'un système linéaire qu'on explicitera. *Indication : on pourra exprimer a en fonction de $P(\alpha + 1)$, $P(\alpha), P'(\alpha)$.* Ce système linéaire a-t'il une unique solution ?
8. Ecrire une fonction `prolonge` en python qui prend en entrée des nombres (u, v, w, β) et donne en sortie un triplet (a, b, c) tel que la fonction polynomiale définie par $h : x \to ax^2 + bx + c$ vérifie : $h(\beta - 1) = u, h'(\beta - 1) = v$ et $h(\beta) = w$.

D. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $I_0 =]-\infty, 0], I_1 =]0, 1]$, $I_2 =]1, 2]$, ... , $I_j =]j - 1, j]$, ... ,$I_{n-1} =]n - 2, n - 1]$, $I_n =]n - 1, +\infty[$.

Soit E l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telles que sur chacun des intervalles $I_0, I_1, ..., I_n$ la restriction de H est une fonction polynomiale de degré ≤ 2. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

9. Pour j un entier compris entre 0 et n, soit $P_j : x \to a_j x^2 + b_j x + c_j$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soit H la fonction définie par : $H(x) = P_j(x)$, si $x \in I_j$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Démontrer que la fonction H appartient à E si et seulement si le vecteur $(a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, ..., a_{n_1}, b_{n_1}, c_{n_1}, a_n, b_n, c_n)$ est solution d'un système linéaire à $2n$ équations qu'on explicitera.
   (b) Résoudre ce système si on suppose de plus que H s'annule en tout point i dans $[\![0, n-1]\!]$. On commencera par exprimer b_i et c_i en fonction de a_i et i pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$.
   (c) On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R}^n \\ & & H & \to & (H(0), H(1), ..., H(n-1)) \end{array}$$

      i. Justifier que φ est une application linéaire.
      ii. Quel est le noyau de φ ? En préciser la dimension.
      iii. Démontrer que φ est surjective. On pourra faire une démonstration par récurrence sur n.
      iv. Quelle est la dimension de E ? On citera précisément le théorème utilisé.

10. Soient $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{49}$ des nombres réels. Ecrire un programme `interpo` en python qui prend en entrée $\beta_0, ..., \beta_{49}$ et donne en sortie une liste de triplets $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), ..., (a_{50}, b_{50}, c_{50})$ tels que la fonction H définie par : $H(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$, si $x \in I_j$, pour $j \in [\![0, 50]\!]$, est dans E et vérifie de plus $H(i) = \beta_i$ pour tout $i \in [\![0, 49]\!]$.

Exercice 3

A. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction $(x \to \dfrac{1}{1-x})$ au voisinage de 0. Quel est son rayon de convergence ?
2. Calculer les valeurs propres de la matrice M. Justifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note α et β les valeurs propres de la matrice M.
   (a) Justifier qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

   (b) Sans chercher à calculer A et B, justifier les égalités :

i. $A + B = 4$,
ii. $A\alpha + B\beta = 3$,
iii. $A\beta + B\alpha = -1$.

(c) Démontrer l'égalité :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \frac{A(1-\beta) + B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

4. Proposer une fonction en python, `suite`(N), qui prend en entrée l'entier naturel N et renvoie la liste des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous forme de nombres rationnels. Préciser la complexité de votre algorithme en fonction des opérations que vous utilisez (additions, multiplications...).

B. On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » avec la probabilité p et tombe sur « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Alice et Benoît jouent à un jeu de « pile ou face » avec cette pièce de la façon suivante : La pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce que trois lancers successifs fournissent deux fois « pile » suivies d'une fois « face » ou une fois « face » suivie de deux fois « pile ». Dans le premier cas, deux fois « pile » suivies d'une fois « face » , Alice gagne et dans le cas une fois « face » suivie de deux fois « pile » , Benoît gagne.

On désigne par *motif* le résultat de trois lancers successifs.
Par exemple, si on a effectué 7 lancers dont le résultat est « pile, face, pile, face, face, pile, pile » les motifs de longueur 3 sont « pile, face, pile », « face, pile, face », « pile, face, face », « face, face, pile » et « face, pile, pile » ; à ce stade, Benoît a gagné et la partie est finie.

Soit n un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur 1 lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur 0 lorsque la pièce tombe sur« face ».

La probabilité d'un événement A lié à ce jeu sera noté $P(A)$. Ainsi, pour n dans N^*, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = q$.

Les lancers sont supposés indépendants, donc les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

Soit n dans N^*. On note E_n l'évènement « Ni Alice, ni Benoît n'ont gagné après n lancers » , A_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Alice » et B_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Benoît ».

5. Déterminer $P(E_n), P(A_n), P(B_n)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
6. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Soit $(x_0, ..., x_k)$ dans $\{0, 1\}^{k+1}$. Justifier que les évènements $E_n \cap (X_n = x_0)$ et $(X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$ sont indépendants.
   Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'événement
   $E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$?
7. Soit n dans N^*. On note v_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 0)$ et w_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 1)$.

   (a) Exprimer v_1, v_2, w_1, w_2 en fonction de p et q.

(b) Soit n un entier naturel ≥ 3. En décomposant l'événement $E_n \cap (X_n = 0)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que $v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$.

(c) Soit n un entier naturel ≥ 3. On considère une suite de n lancers consécutifs qui n'a fait gagner ni Alice, ni Benoît et qui se conclut par un « pile » (X_n prend la valeur 1.) On suppose que lors de l'un au moins de ces lancers, la pièce est tombée sur « face ». On note k le plus grand indice tel que, pour cette suite, X_k a pris la valeur 0 (c'est-à-dire le dernier lancer pour lequel la pièce est tombée sur « face »). Justifier que $k = n - 1$.

(d) Soit n un entier naturel ≥ 3. Démontrer que $w_n = p^n + pv_{n-1}$.

8. Soit T la variable aléatoire « durée du jeu » , c'est-à-dire que T prend la valeur n lorsque « Alice ou Benoît gagne à la n-ième étape » , pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si la partie ne se termine pas, T prend la valeur $+\infty$.

(a) Soit n un entier naturel ≥ 2.

i. Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et E_n ?

ii. En déduire l'expression de $P(T > n)$ en fonction de v_n, v_{n-1} et p.

iii. Justifier que $P(T = +\infty) = 0$.
Indication : On pourra étudier la suite $(v_n + pv_{n-1})_{n\geq 2}$ et démontrer qu'elle est décroissante.

iv. Quelle propriété du jeu obtient-on ainsi ?

(b) Si la série $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ est convergente, démontrer que la variable T est d'espérance finie. En notant $E(T)$ cette espérance, justifier l'égalité :

$$E(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p)(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n).$$

(c) On suppose dans cette question seulement que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = q = \frac{1}{2}$. Démontrer que la variable T est d'espérance finie et calculer $E(T)$.
Indication : On pourra calculer v_2 et v_3.

9. Soit n un entier naturel ≥ 3.

(a) On considère une suite de n lancers consécutifs telle qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer. Démontrer que lors des $n - 1$ premiers lancers, la pièce n'est pas tombée sur « face ».

(b) En déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(A_n)$, puis la probabilité que Benoît gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(B_n)$.

10. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'Alice gagne la partie et la probabilité que Benoît gagne la partie. Quelles valeurs obtient-on pour ces deux probabilités lorsque la pièce est équilibrée ?

11. Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques PC1 (exercices) 2016

Présentation du sujet

Le sujet est composé de trois exercices indépendants sur des thématiques du programme différentes : espaces euclidiens, systèmes linéaires, probabilités . Les programmes des deux années sont abordés.

Commentaire général de l'épreuve.

L'épreuve a été traitée par 2702 candidats. Les notes se sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9,94 et un écart-type de 3,77. Les exercices étaient longs et il était possible d'obtenir une très bonne note avec un investissement significatif dans seulement deux des exercices, mais beaucoup de candidats ont préféré picorer dans chacun des exercices, avec une certaine tendance au grapillage. Les copies sont dans l'ensemble bien présentées et il en est tenu compte dans la notation pour les distinguer de celles écrites sans soin ou rédigées de façon désinvolte. Sont en particulier pénalisés l'accumulation de fautes d'orthographe ou les abus d'abréviation.

Analyse par exercice:

- Exercice 1 :

  Il s'agissait d'un exercice d'algèbre linéaire dans les espaces euclidiens construit autour des matrices de Gram et leurs puissances de Hadamard. On utilisait l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui faisait l'objet du début de l'exercice, puis une partie élémentaire sur le cas particulier des matrices $(2, 2)$, un cas particulier de matrices $(3, 3)$ et enfin un le cas des matrices de Cauchy en dimension quelconque. Dans l'ensemble, l'exercice a été peu réussi. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pourtant rappelée n'est pas connue de nombreux candidats et prend des formes fantaisistes. Dans la partie B, l'équivalence finale n'est trop souvent pas comprise, faute d'une compréhension du sens du quantificateur. Dans la partie C, beaucoup de candidats appliquent aux matrices $(3, 3)$ ce qui vient d'être démontré uniquement pour des matrices $(2, 2)$. La partie D n'est correctement abordée que dans les très bonnes copies. Le changement de variables de la question 11 est très souvent incorrect.

- Exercice 2 :

  Il s'agissait d'un exercice d'algèbre linéaire dont le but est de proposer un algorithme de construction de l'interpolation d'une fonction par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ polynomiale de degré au plus 2 par morceaux (spline quadratique). La construction était basée sur la résolution de systèmes linéaires et on utilisait cette situation pour déterminer la dimension de l'espace de solutions. C'est l'exercice le moins réussi. Seules les questions très faciles sont traitées, et même celles-ci donnent trop souvent lieu à des réponses fausses par désinvolture dans l'argumentation : on démontre que la fonction de la question A est continue, puis on affirme que par les mêmes arguments elle est dérivable puis deux fois dérivable, ce qui est faux, une application linéaire dont on demande le noyau est "forcément" injective (elle ne l'était pas) , les systèmes linéaires dont le nombre d'inconnues et le nombre d'équations coïncident n'ont qu'une solution (ce n'était pas le cas)...

- Exercice 3 :
  C'est l'exercice le plus investi et le plus réussi. On étudie un jeu (le jeu de Penney) qui semble a priori équitable, mais les calculs démontrent le contraire (à moins d'utiliser une pièce non équilibrée).

  L'étude de la suite récurrente dans la partie A est souvent correctement menée, environ un dixième des copies font même l'effort de l'application numérique de la question (d). La question de programmation est abordée dans un nombre non négligeable de copies. L'énoncé demandait explicitement des nombres rationnels de façon à encourager les candidats à utiliser le relation de récurrence plutôt que l'expression développée 3(a) peu efficace et non exacte, en vain. Il n'a pas éte tenu compte de l'efficacité du programme mais de la cohérence du calcul de complexité avec le programme proposé. La notion de complexité et l'utilisation des O est loin d'être maitrisé, même chez les candidats qui proposent un programme correct. Le reste de l'exercice était des probabilités et comportait de nombreuses questions de calcul. Elles ont souvent été traitées. Si les calculs sont menés, il n'en est pas de même pour l'argumentation et les candidats peinent le plus souvent à exprimer précisément pourquoi des événements sont indépendants (question 6) ou pourquoi certains événements en enchaînent d'autres (questions 7(c) ou 9(a)). Peu de candidats ont dépassé la question 8(a).

Conseil aux futurs candidats

- Lisez bien l'énoncé.
- Dans les calculs, justifiez vos égalités une par une. Relisez-vous pour éviter les erreurs de recopie d'une ligne sur l'autre.
- Les questions se résolvent souvent par application des théorèmes de cours. Il faut donc les connaître précisément et s'interroger sur le respect des hypothèses avant d'en utiliser un.
- Dans les questions ouvertes, c'est votre argumentation qui doit guider votre conclusion. Une réponse donnée au hasard a peu de chance d'être correcte.