Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1. Une inégalité entre sommes de séries

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réelles (indexées par $\mathbb{N}^*$) à termes strictement positifs telles que la série $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$ et pour tout entier n non nul,

$$h_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

L'objet de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum h_n$ et de comparer sa somme à celle de la série $\sum a_n$.

1. `Un premier exemple`

   On pose, dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   (b) i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   ii. Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

2. `Un second exemple`

   Soit q un réel de $]0,1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = q^{n-1}$.

   (a) Indiquer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n.

   (b) Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et prouver la majoration : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n-uplets de nombres réels.

   (a) Prouver l'égalité : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

   (b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

4. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité : $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{2k^2}$.

   On s'intéressera à la monotonie de la suite de terme général $u_k = \frac{1}{2k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathscr{E}$.

   (a) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

   $$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right).$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :

   $$\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 4 \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k\right).$$

   (c) Prouver, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité : $\sum_{n=1}^{p} h_n \leqslant 2 \sum_{k=1}^{p} a_k$.

   (d) En déduire la convergence de la série $\sum h_n$ et l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

6. Soit C un réel strictement positif tel que, pour tout élément $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{E}$, on a

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leqslant C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

   On va montrer que C est au moins égal à 2.

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1 et on rappelle qu'on dispose de l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (a) Prouver l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\pi^2}{6}$.

   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $h_n \geqslant (\alpha+1) \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$.

   (c) Prouver l'égalité : $\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ >}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

(d) Conclure que $C \geqslant 2$.

7. On suppose qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes réels strictement positifs dont la série $\sum a_n$ converge, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

(a) Justifier l'inégalité : $K \geqslant 1$.
On pourra utiliser le résultat de la question 2.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$g_n = \begin{cases} \dfrac{4}{2^n} & \text{si } \exists\, p \in [\![1,N]\!] \quad n = p^2 \\ \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{(g_n)^n}{(g_{n-1})^{n-1}}.$$

i. Calculer a_n pour $n > N^2 + 1$ et en déduire la convergence de la série $\sum a_n$.

ii. Prouver les inégalités : $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leqslant 4 \quad$ et $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geqslant 2N$.

(c) Établir l'égalité : $(g_n)^n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

(d) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $h_n \leqslant g_n$ et en déduire qu'un tel réel K n'existe pas.

Exercice 2. Premier numéro manquant

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant n < N$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires **indépendantes** toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ et toutes de loi uniforme sur l'intervalle entier $[\![1,N]\!]$. On note, pour tout entier naturel n non nul, T l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe

$$T(\omega) = \min\left\{k \in [\![1,N]\!]\,;\, \forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad X_i(\omega) \neq k\right\}.$$

*Si on se représente l'expérience aléatoire consistant à tirer n fois successivement, avec remise, une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, la valeur $T(\omega)$ serait le numéro aléatoire du plus petit numéro qui **n'est pas** apparu dans la liste ω des numéros tirés au cours de la succession de ces n tirages.*

Partie A : Deux cas particuliers

Soit N un entier au moins égal à 4 et X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes trois de loi uniforme sur l'intervalle entier $[\![1,N]\!]$. On note U et V les applications qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associent

$$U(\omega) = \min\Big\{k \in [\![1,N]\!]\,;\, X(\omega) \neq k \text{ et } Y(\omega) \neq k\Big\}.$$

et

$$V(\omega) = \min\Big\{k \in [\![1,N]\!]\,;\, X(\omega) \neq k,\, Y(\omega) \neq k \text{ et } Z(\omega) \neq k\Big\}.$$

1. (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire U ?

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire U.

(c) Calculer l'espérance de U.

2. (a) Calculer $\mathbf{P}(V=1)$ et $\mathbf{P}(V=4)$.

(b) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(V=3)=\dfrac{6N-12}{N^3}\cdot$

(c) En déduire que l'espérance de V vaut $\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^3\cdot$

Partie B : Des égalités

On note Δ l'application qui, à tout polynôme réel $P(X)$, associe le polynôme

$$\Delta(P)(X)=P(X+1)-P(X).$$

On observera que l'application Δ est linéaire.

On note, pour tout entier naturel k non nul, Δ^k l'application $\underbrace{\Delta\circ\Delta\circ\ldots\circ\Delta}_{k \text{ fois } \Delta}$ et on pose $\Delta^0=\mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$.

1. Soit $(j,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $j\leqslant n$. Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}=\binom{n+1}{j+1}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P:=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

   Prouver, pour tout entier naturel m, l'égalité :

$$\Delta^m(P)(X)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}P(X+j).$$

   On pourra procéder par récurrence sur l'entier m.

3. (a) Soit $q\in\mathbb{N}$ et $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ de degré q.
   Quel est, pour tout entier $r\in[\![0,q]\!]$, le degré de $\Delta^r(Q)(X)$?

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $Q=X^n$. Que vaut $\Delta^n(Q)(X)$?

4. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P:=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ un polynôme réel de degré n.

   (a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$a_n\,n!=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j).$$

   (b) En déduire l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\left(1-\frac{j}{N}\right)^n=\frac{n!}{N^n}\cdot$$

   On utilisera le résultat précédent pour un polynôme P bien choisi.

5. Soit $(n, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   (a) Établir, pour tout entier $m \geqslant n+1$, l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n = 0.$$

   (b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \binom{n+1}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^n$.

Partie C : Le cas général

On reprend maintenant les notations du préambule.

Soit $(N, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n < N$.

1. (a) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T = 1)$.

   (b) Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(T = n+1)$.

   (c) Établir l'égalité

$$\mathbf{P}(T = 2) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{N}\right)^i \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i} \quad \text{puis l'égalité} \quad \mathbf{P}(T = 2) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n.$$

   (d) Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T = 3) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{3}{N}\right)^n$.

2. *On admet que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ alors on dispose de la formule du crible suivante :*

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant n} \boldsymbol{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

   On pose, pour tout entier $p \in [\![1, n]\!]$, $A_p = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \neq p]$.

   (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Que vaut la probabilité de l'intersection de j événements distincts pris parmi $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

   (b) On note E^c le complémentaire d'un événement E. Justifier, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, l'égalité : $[T > k] = \left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c$.

   (c) Obtenir, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, une expression de $\mathbf{P}(T > k)$ faisant intervenir un symbole de sommation.

3. (a) Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Établir l'égalité : $\mathbf{P}(T = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n$.

   (b) Retrouver, à l'aide du résultat précédent, les valeurs trouvées en fin de **partie A** pour les sommes

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j+1}{N}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^n.$$

4. `Calcul de l'espérance de` T

Soit $(N,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n < N$.

(a) Établir, pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité :

$$\mathbf{P}(T > k) = \left(\frac{N+1}{N}\right)^n \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{N+1-j}{N+1}\right)^n.$$

(b) En utilisant le résultat de la question **B**-5-b) (avec $N \leftarrow N+1$) conclure à l'égalité :

$$\mathbf{E}(T) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2023

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Le problème porte sur une famille de polynômes orthogonaux, appelés polynômes de Hermite, qui interviennent dans de nombreuses applications, en physique, en théorie du signal et en probabilité, par exemple.

L'énoncé est divisé en trois parties, largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

On note $\mathscr{L}_2$ l'ensemble des applications u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ converge.

On note $\mathscr{R}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on peut confondre avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour en définir les coefficients et le degré (égal à $-\infty$ pour la fonction nulle).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{R}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.

Partie 1 Étude et développements en séries d'une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{2xy - x^2}\ .$$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et que son seul point critique est l'origine $(0,0)$. La fonction f admet-elle un extremum local en ce point ?

2. On note K l'ensemble des éléments (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

   a) Justifier que f admet un maximum et un minimum sur K.

   b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

   Justifier qu'il existe un réel t tel que, pour cette valeur de t, $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ et :

$$2xy - x^2 = 2\sqrt{2}\,\sin(2t - \frac{\pi}{4}) - 2\ .$$

   c) En déduire le maximum et le minimum de f sur K, puis les points de K où ils sont atteints.

3. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en donner le développement en série entière.

4. On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\ .$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2}\, w^{(n)}(x)$$

   où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.
   En particulier : $H_0(x) = 1$.

   a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x) .$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n et trouver son coefficient dominant.

5. a) Compléter l'avant-dernière ligne du code Python suivant (en substituant une expression convenable aux trois points d'interrogation) pour que la fonction "coefH" calcule les coefficients du polynôme P_n pour la valeur de n entrée en paramètre.

```
def coefH(n):
    coeff=numpy.zeros((n+1,n+1))
    coeff[0,0]=1
    coeff[1,1]=2
    for k in range(1,n):
        coeff[k+1,0]=-coeff[k,1]
        coeff[k+1,k+1]=2**(k+1)
        for i in range(1,k+1):
            coeff[k+1,i]=2*coeff[k,i-1]- ??? # ligne à modifier
    return coeff[n,:]

coefH(4)  # exemple: les coefficients de H4, égal à 16 X^4 - 48 X^2 + 12
Out: array([ 12.,  -0., -48.,   0.,  16.])
```

b) Qu'obtiendrait-on pour "coefH(5)" après avoir modifié le code de la fonction "coefH" en insérant avant sa dernière ligne ("return coeff[n, :]") l'instruction suivante?

```
print(coeff)
```

6. a) Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, établir l'égalité : $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(y)}{n!} x^n$.

Partie 2 Un produit scalaire sur $\mathscr{L}_2$

1. a) Justifier que, pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}_2{}^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.|.)$ l'application de $\mathscr{L}_2{}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (u, v) \in \mathscr{L}_2{}^2, \quad (u|v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x .$$

b) Justifier que $\mathscr{L}_2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{L}_2$.

On note $\|.\|$ la norme sur $\mathscr{L}_2$ associée au produit scalaire $(.|.)$, définie par :

$$\forall u \in \mathscr{L}_2, \quad \|u\| = \sqrt{(u|u)} .$$

2. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathscr{L}_2$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathscr{L}_2$.

   a) Justifier l'égalité :
$$\mathscr{L}_2 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I} \quad . \tag{1}$$

   b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}_n = \mathscr{P} \cap \mathscr{R}_n$ et $\mathscr{I}_n = \mathscr{I} \cap \mathscr{R}_n$.

   Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dimension de $\mathscr{P}_n$ et la dimension de $\mathscr{I}_n$ (on distinguera le cas où n est pair du cas où n est impair).

   c) Pour tout $u \in \mathscr{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x) - P(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \,;\, P \in \mathscr{P}_n\right\}$.

3. On note $\mathscr{K}$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{L}_2$ qui sont nulles hors d'un segment inclus dans l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$:
$$\mathscr{K} = \{v \in \mathscr{L}_2 \,;\, \exists\, \alpha > 0, \exists\, A > \alpha,\ \forall\, x \notin [\alpha, A],\ v(x) = 0\} \,.$$

   Soit u une fonction bornée appartenant à $\mathscr{L}_2$ et ε un nombre réel strictement positif.

   a) Pour tout entier n strictement supérieur à 1, on pose :
$$v_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ (nx - 1)\, u(\dfrac{2}{n}) & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ u(x) & \text{si } \frac{2}{n} < x < n - \frac{1}{n} \\ n(n - x)\, u(n - \dfrac{1}{n}) & \text{si } n - \frac{1}{n} \le x \le n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \,.$$

   Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(u(x) - v_n(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

   b) Justifier l'existence d'un élément v de $\mathscr{K}$ tel que :
$$\int_0^{+\infty} \big(u(x) - v(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \le \varepsilon \,.$$

   c) Justifier que si la fonction u est paire, alors il existe un élément v de $\mathscr{K}$ tel que :
$$\|u - v_p\|^2 \le 2\varepsilon \quad \text{où} \quad v_p(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \ge 0 \\ v(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \,.$$

   On démontre de même, et on pourra l'admettre, que si la fonction u est impaire, alors il existe un élément v de $\mathscr{K}$ tel que :
$$\|u - v_i\|^2 \le 2\varepsilon \quad \text{où} \quad v_i(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \ge 0 \\ -v(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \,.$$

Partie 3 Un endomorphisme autoadjoint de $\mathscr{R}$

On note g et h les endomorphismes de $\mathscr{R}$ définis par :

$$\forall P \in \mathscr{R}, \quad \begin{cases} g(P) = -P'' + 2XP' + P \\ h(P) = 2XP - P' \end{cases} .$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in \mathscr{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\big(h(P)\big)(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. a) Établir l'égalité : $g \circ h - h \circ g = 2h$.
   b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathscr{R}$, si $g(P) = \lambda P$, alors

$$g\big(h(P)\big) = (\lambda + 2)\, h(P) \quad (*)$$

2. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathscr{R}^2$:

$$(P'|Q') = (g(P)|Q) - (P|Q) .$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer : $\forall P \in \mathscr{R}_n, \quad g(P) \in \mathscr{R}_n$.
   b) On note g_n l'endomorphisme de $\mathscr{R}_n$ défini par :

$$\forall P \in \mathscr{R}_n, \quad g_n(P) = g(P).$$

Montrer que g_n est un endomorphisme autoadjoint de $\mathscr{R}_n$, pour le produit scalaire $(.|.)$.

4. Les polynômes H_n utilisés dans la suite sont ceux de la partie 1.
   a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h(H_k)$, et en déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(H_k) = (2k+1) H_k .$$

   b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathscr{R}_n$.
   c) En déduire, pour tout $u \in \mathscr{L}_2$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{(u|H_n)^2}{\| H_n \|^2}$ et l'inégalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u|H_n)^2}{\| H_n \|^2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \quad . \tag{2}$$

5. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note e_p la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-px}$.
   a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$, les inégalités :

$$|\mathrm{e}^{-2x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \mathrm{e}^{-x}| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{-x} \leq \frac{(n+1)^n}{n!} \mathrm{e}^{-n-1} .$$

   b) En déduire une suite de polynômes $(Q_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_{2,n}(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction e_2.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, il existe une suite de polynômes $(Q_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_{p,n}(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction e_p.

On pourra utiliser les fonctions polynomiales $x \longmapsto Q_{p,n}(\dfrac{x}{2})\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k(p+1)^k}{k!\,2^k}\, x^k\Big)$.

d) En déduire que, pour toute fonction polynomiale P, il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}$ telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_n(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $x \longmapsto P(\mathrm{e}^{-x})$.

6. Soit v une fonction appartenant à l'ensemble $\mathscr{K}$ défini dans la partie 2.

a) En utilisant le théorème de Weierstrass et le changement de variable $x = -\ln(t)$, justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un polynôme P tel que :

$$\forall\, x \geq 0,\ |v(x) - P(\mathrm{e}^{-x})| \leq \varepsilon .$$

b) En déduire qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes (éléments de $\mathscr{R}$) telle que la suite des fonctions $x \longmapsto Q_n(x)\mathrm{e}^{-x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction v.

c) On note w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$w(x) = \begin{cases} v(\dfrac{x^2}{4})\,\mathrm{e}^{x^2/4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{cases} w_p(x) = w(x) + w(-x) \\ w_i(x) = w(x) - w(-x) \end{cases} .$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de deux polynômes Q et R vérifiant les inégalités

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(w_p(x) - Q(\frac{x^2}{4})\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(w_i(x) - x\,R(\frac{x^2}{4})\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \end{cases} .$$

Pour parvenir à la seconde inégalité, on pourra, en lieu et place de v, utiliser la fonction

$$t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{w(2\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

d) Soit $\eta > 0$.

Déduire des résultats précédents que :

- pour toute fonction paire w_p telle que la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} w_p(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{K}$, il existe un polynôme pair P_p tel que

$$\| w_p - P_p \| \leq \eta$$

- pour toute fonction impaire w_i telle que la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} w_i(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{K}$, il existe un polynôme impair P_i tel que

$$\| w_i - P_i \| \leq \eta \, .$$

7. Soit u une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

a) En s'appuyant sur les derniers résultats de la partie 2 et sur ce qui précède, démontrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathscr{R}$ qui converge vers u pour la norme $\|.\|$.

b) Justifier l'égalité :

$$\lim_{n \to +\infty} \| u - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u|H_k)}{\| H_k \|^2} H_k \| = 0 \, .$$

c) Justifier que l'inégalité (2) démontrée en question 4 est en fait une égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u|H_n)^2}{\| H_n \|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \quad . \tag{3}$$

d) Ces propriétés restent-elles vraies si u appartient à $\mathscr{L}_2$ sans être bornée ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

Exercice 1. Valeurs prises par une fonction

On note $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\mathscr{C} := \left\{ f \in E\,;\, \forall\, t \in [0,1]\ f(t) \geqslant 0 \text{ et } f \text{ est non nulle} \right\}$$

$$\text{et} \quad \mathscr{C}' := \left\{ f \in E\,;\, \forall\, t \in [0,1]\ f(t) \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \right\}.$$

On considère, pour tout élément g de E, l'application Φ_g suivante :

$$\Phi_g : \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \dfrac{\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t} \end{array}.$$

L'objet de l'exercice est de déterminer les valeurs prises par l'application Φ_g.

1. Soit $g \in E$.

   (a) Prouver l'égalité : $\Phi_g(\mathscr{C}) = \Phi_g(\mathscr{C}')$.

   (b) Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathscr{C}'$ avec $a_1 = \Phi_g(f_1)$ et $a_2 = \Phi_g(f_2)$.
   On suppose $a_1 \leqslant a_2$. Prouver l'inclusion $[a_1, a_2] \subset \Phi_g(\mathscr{C})$.

2. Dans cette question on suppose que, pour tout réel $t \in [0,1]$, $g(t) = t$.

   (a) Prouver l'inclusion : $\Phi_g(\mathscr{C}) \subset [0,1]$. Les réels 0 et 1 sont-ils éléments de Φ_g ?

   (b) Montrer que $\sup \Phi_g(\mathscr{C}) = 1$.
   On pourra, pour tout entier naturel n, calculer $\Phi_g(f_n)$ où $f_n : t \mapsto t^n$.

   (c) i. Calculer, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 t(1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

   ii. En déduire que $\inf \Phi_g(\mathscr{C}) = 0$.

   (d) Conclure que $\Phi_g(\mathscr{C}) =]0,1[$.

3. Dans cette question on suppose que, pour tout réel $t \in [0,1]$, $g(t) = \mathrm{e}^t$.

   (a) Prouver l'inclusion : $\Phi_g(\mathscr{C}) \subset]1,\mathrm{e}[$.

   (b) On considère la fonction

   $$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha+1}-1}{\mathrm{e}^{\alpha}-1} \end{array}.$$

   i. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 0.

   ii. Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} h(\alpha)$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} h(\alpha)$.

   (c) Prouver l'égalité : $\Phi_g(\mathscr{C}) =]1,\mathrm{e}[$.

4. Dans cette question on traite le cas général où l'application g est élément de E et supposée non constante.

(a) Justifier l'existence d'un couple (a, b) de réels distincts de $[0,1]$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $g(a) \leqslant g(t) \leqslant g(b)$.

On suppose désormais que a et b sont dans $]0,1[$ et on note N un entier naturel tel que $0 < b - \dfrac{2}{N} < b + \dfrac{2}{N} < 1$.

On considère, pour tout entier $n \geqslant N$, la fonction f_n qui vaut

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant b - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \quad \text{ou} \quad b + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \leqslant t \leqslant 1 \\ \\ 1 & \text{si} \quad b - \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant b + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

et qui est affine sur les segments $\left[b - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}, b - \dfrac{1}{n}\right]$ et $\left[b + \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right]$.

(b) Représenter le graphe de la fonction f_n.

(c) Prouver, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence : $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{n}$.

(d) Prouver l'existence d'un réel $K > 0$ (ne dépendant que de g) tel que, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$\int_0^{b-\frac{1}{n}} f_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_{b+\frac{1}{n}}^1 f_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{n^2}.$$

(e) Soit G une fonction réelle définie au voisinage de b et dérivable en b.

Que vaut $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{G(b+h) - G(b-h)}{h}$?

(f) Prouver l'égalité : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \int_{b-\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} g(t)\,\mathrm{d}t = g(b)$.

(g) En déduire que $\sup \Phi_g(\mathscr{C}) = g(b)$.

On montrerait de même, et on l'admet, que $\inf \Phi_g(\mathscr{C}) = g(a)$.

5. Soit $g \in E$. Que vaut $\Phi_g(\mathscr{C})$?

On cherchera à quelle condition $\displaystyle\max_{t \in [0,1]} g(t)$ *est élément de* $\Phi_g(\mathscr{C})$.

Exercice 2. Une suite binomiale

Soit n un entier naturel non nul. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n et E^* son dual c'est-à-dire le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E. On note, pour tout entier naturel k, $P^{(k)}$ le polynôme dérivé k-ième d'un polynôme P (avec $P^{(0)} = P$).

On note $P_0 = 1$ et, pour tout entier naturel k non nul, $P_k = X(X-k)^{k-1}$ (on a donc $P_1 = X$).

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} := (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E.

2. On note, pour tout entier r de $[\![0, n]\!]$, φ_r l'application qui, à chaque polynôme P de E, associe $\varphi_r(P) = \dfrac{1}{r!} P^{(r)}(r)$ (on a donc $\varphi_0(P) = P(0)$).

(a) Soit $(k,r) \in [\![0,n]\!]$. Calculer $P_k^{(r)}$.
On distinguera les cas $k > r$, $k < r$ et $k = r$.

(b) Calculer, pour tout couple (k,r) d'entiers distincts de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $\varphi_r(P_k)$.

(c) Calculer, pour tout entier k de $[\![0,n]\!]$, la valeur de $\varphi_k(P_k)$.

(d) Soit $P \in E$. Établir l'égalité : $P = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(P)P_k$.

(e) Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*.

3. Établir, pour tout couple (x,y) de nombres réels, l'égalité :

$$(x+y)^n = y^n + x\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-k)^{k-1}(y+k)^{n-k}.$$

On pourra considérer le polynôme $(X+y)^n$.

4. Établir, pour tout couple (x,y) de réels, l'égalité :

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)P_{n-k}(y).$$

Exercice 3. Étude d'une variable aléatoire

On note, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $a(n,p)$ le nombre de p-listes $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ telles que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$. *On a donc $a(n,1) = 1$.*

1. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la valeur de $a(n,2)$.

   (b) Prouver, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$.

2. Établir, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'égalité : $a(n,p+1) = \sum_{k=0}^{n} a(n-k,p)$.

3. Établir, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'égalité : $a(n,p) = \binom{n+p-1}{p-1}$.

4. En déduire que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, le nombre de p-listes $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^p$ telles que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ vaut $\binom{n-1}{p-1}$.

On munit, pour tout entier naturel n non nul, l'ensemble Ω des parties à n éléments de $[\![1,2n]\!]$ de la tribu pleine et de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$.

On appelle **bloc** d'une partie A élément de Ω, tout sous-ensemble de A de la forme $[\![a,b]\!]$ où

$$1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2n \text{ avec } (a = 1 \text{ ou } a-1 \notin A) \text{ et } (b = 2n \text{ ou } b+1 \notin A).$$

Par exemple, dans le cas où $n = 3$, la partie (de $[\![1,6]\!]$) $\{1,2,5\}$ a deux blocs ($[\![1,2]\!]$ et $\{5\}$) alors que, dans le cas où $n = 4$ la partie (de $[\![1,8]\!]$) $\{2,4,6,7\}$ a trois blocs ($\{2\}$, $\{4\}$ et $[\![6,7]\!]$).

On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie A à n éléments de $[\![1, 2n]\!]$, associe le nombre de blocs de A. *La variable* X_1 *est donc constante égale à* 1.

5. (a) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

   (b) Déterminer la loi de X_3 et son espérance.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.

   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que la donnée d'une partie A à n éléments de $[\![1, 2n]\!]$ avec k blocs équivaut à la donnée d'une liste $(j_0, i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_{k-1}, j_{k-1}, i_k, j_k)$ où $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$ sont des entiers naturels non nuls et j_0 et j_k des entiers naturels vérifiant les conditions

$$\sum_{r=1}^{k} i_r = n \quad \text{et} \quad \sum_{r=0}^{k} j_r = n.$$

   (c) En déduire, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, l'égalité : $\mathbf{P}(X_n = k) = \dfrac{\binom{n-1}{k-1}\binom{n+1}{k}}{\binom{2n}{n}}$.

   (d) i. Calculer l'espérance de la variable X_n.

   ii. Calculer la variance de la variable X_n.

7. Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$, l'égalité :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce équilibrée et on note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n})$ la suite de résultats obtenus (avec $\varepsilon_i = 1$ (resp. 0) si le i-ème lancer a donné pile (resp. face)). Quelle est la probabilité d'obtenir une telle suite comportant n fois le 1 avec exactement k blocs de 1 ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2022

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

On rappelle que la **fonction Gamma** d'Euler est définie par

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{dt} \tag{1}$$

qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie la formule récursive $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, valable pour tout réel strictement positif x.

Cette fonction intervient à maintes reprises dans la suite.

L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I Un lien avec loi de Poisson

Dans cette partie, on considère une suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ et on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre n .

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}([X_n > k])$ tend vers 0 quand l'entier k tend vers l'infini.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Justifier, pour tout entier naturel k, l'égalité :
$$\mathbf{P}([X_n > k]) = \mathbf{P}([X_n > k-1]) - \frac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-n}\,.$$

   b) En utilisant le résultat précédent et une intégration par parties, établir que :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X_n > k]) = \frac{1}{k!}\int_0^n t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{2}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   a) Préciser la limite de $\mathbf{P}([X_n > k])$ quand n tend vers l'infini.

   b) En utilisant (2), justifier que $\mathbf{P}([X_n \leq k])$ est équivalent à $\dfrac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-n}$ quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^n t^{2n}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   a) Justifier l'encadrement : $\dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{e}^{-n} \leq I_n \leq \dfrac{n^{2n+1}}{2n+1}$.

   b) En déduire la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

   c) Démontrer que I_n est négligeable devant $(2n)!$ quand n tend vers l'infini (on pourra utiliser la propriété (2)).

Partie II La fonction Γ comme transformée intégrale

On note S l'ensemble des fonctions réelles f définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, telles que, pour tout couple (n, p) de nombres entiers positifs ou nuls, la fonction $t \longmapsto t^p f^{(n)}(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour quelles valeurs réelles de a la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{at}$ est-elle un élément de S?

6. Soit k un nombre entier strictement positif et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \geq 0, \quad f_k(t) = \exp(-t^k)\,.$$

a) Montrer que, pour tout entier positif n, il existe un polynôme $P_{k,n}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que la dérivée n-ième de f_k vérifie :

$$\forall\, t \geq 0, \quad f_k^{(n)}(t) = P_{k,n}(t)\; f_k(t)\,.$$

b) En déduire que f_k est un élément de S.

7. Montrer que, pour tout élément f de S et tout réel $x > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{x-1} f(t)$ est intégrable sur $]\,0, +\infty\,[$.

Pour tout $f \in S$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $G(f)$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad G(f)(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\,\mathrm{dt} \tag{3}$$

8. a) Exprimer, pour tout entier strictement positif k, la fonction $G(f_k)$ à l'aide de la fonction Gamma.

b) Donner un équivalent de la fonction Γ en 0 et en déduire que, pour tout $x > 0$, $G(f_k)(x)$ tend vers $\dfrac{1}{x}$ lorsque k tend vers l'infini.

9. Montrer que, pour tout élément f de S, la fonction $G(f)$ est de classe C^∞ sur $]\,0, +\infty\,[$.

10. Dans cette question, on suppose que f est une fonction à valeurs strictement positives qui appartient à S.

a) Montrer que $\big(G(f)\big)(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\big(G(f)\big)(x)$ est équivalent à $f(0)/x$ quand x tend vers 0.

c) Montrer que la fonction $G(f)$ admet un minimum global, atteint en un point unique.

Partie III Application au prolongement de la fonction ζ de Riemann

Pour tout élément f de l'espace S défini dans la deuxième partie du problème, on associe la fonction $Z(f)$ définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad Z(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} f(t)\,\mathrm{dt} \tag{4}$$

11. Soit f un élément de S .

a) Montrer que la dérivée f' de f appartient à S et vérifie :

$$\forall\, x > 0, \quad G(f')(x+1) = -\, x\, G(f)(x)\,.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall\, x > 0, \quad Z(f^{(n)})(x+n) = (-1)^n\, Z(f)(x)\,.$$

c) Montrer qu'on peut définir, de manière cohérente, un prolongement $\overline{Z(f)}$ de $Z(f)$ à $\mathbb{R}$, en posant, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n tel que $n > -x$:

$$\overline{Z(f)}(x) = (-1)^n\, Z(f^{(n)})(x+n)\,.$$

d) Montrer que $\overline{Z(f)}$, ainsi défini, est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{Z(f)}(-n) = (-1)^n\, f^{(n)}(0)\,.$$

12. Dans cette question, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{e^t - 1} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

a) Justifier la validité des deux développements en série suivants :

$$\text{(i)} \quad \forall\, t > 0, \quad f(t) = t\, e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$$

$$\text{(ii)} \quad \forall\, t \geq 0, \quad f(t) = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}}\,.$$

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

c) Pour tout nombre entier strictement positif k, montrer que la série de terme général $n^k e^{-n}$ est convergente et que sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k e^{-n}$ majore la valeur absolue de la dérivée k-ième de la fonction $t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$ sur l'intervalle fermé $[1, +\infty[$.

d) En déduire que f est un élément de S.

13. On rappelle que la **fonction Zêta** de Riemann est définie par :

$$\forall\, x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \tag{5}$$

a) Démontrer que, pour l'élément f de S défini dans la question précédente, on a :

$$\forall\, x > 0, \quad Z(f)(x) = x\, \zeta(x+1)\,.$$

b) La propriété précédente permet de prolonger la fonction ζ à la droite réelle privée de 1 en posant :

$$\forall\, x \neq 1, \quad \overline{\zeta}(x) = \frac{1}{x-1}\, \overline{Z(f)}(x-1)\,.$$

En utilisant un développement limité de f, calculer ses valeurs en $\overline{Z(f)}(0)$ et $\overline{Z(f)}(-1)$.

Partie IV Un autre prolongement

Dans cette partie, P et Q désignent deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, non nuls et **premiers entre eux**, et on note $E(P,Q)$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$P\ y'' + Q\ y' + (Q-P)\ y = 0 \tag{6}$$

Autrement dit, $E(P,Q)$ est l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad P(x)\, f''(x) + Q(x)\, f'(x) + \big(Q(x) - P(x)\big)\ f(x) = 0\ .$$

14. a) Montrer que $E(P,Q)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui contient la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b) Montrer que, si $E(P,Q)$ contient une fonction de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda \neq -1$, les polynômes P et Q sont nécessairement constants.

c) Trouver $E(P,Q)$ lorsque P et Q sont constants (non nuls) .

15. On suppose, dans cette question, que le polynôme P possède une unique racine réelle a et on note Φ l'application linéaire de $E(P,Q)$ dans $\mathbb{R}^4$ qui associe à tout élément f de $E(P,Q)$ le vecteur :

$$\Phi(f) = \big(f(a-1), f'(a-1), f(a+1), f'(a+1)\big)\ .$$

a) En utilisant le théorème de Cauchy linéaire, montrer que l'application Φ est injective.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément f de $E(P,Q)$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(a-1) = f'(a-1) = 0 \\ f(a+1) = -f'(a+1) = \mathrm{e}^{-(a+1)} \end{cases} .$$

c) Déduire des résultats précédents que la dimension de l'espace vectoriel $E(P,Q)$ est au plus égale à 3.

d) Montrer que, si $P(X) = X^3$ et $Q(X) = -1$, la dimension de l'espace vectoriel $E(P,Q)$ est égale à 3.

16. a) Montrer que la fonction $\Delta :\ x \longmapsto \dfrac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(x)}$, définie sur $]\,0,+\infty\,[$, vérifie la formule récursive :

$$\forall\ x > 0, \quad \Delta(x+2) = \frac{\Delta(x)}{2(x+1)}\ .$$

b) En utilisant la fonction $f_2 : t \longmapsto \exp(-t^2)$ définie dans la deuxième partie, montrer que la fonction Δ admet un prolongement $\overline{\Delta}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \overline{\Delta}(x) = 2\,(x+1)\,\overline{\Delta}(x+2)\ .$$

c) Comment utiliser une équation différentielle de la forme (6) pour trouver une formule récursive satisfaite à la fois par les fonctions constantes et par la fonction $\overline{\Delta}$?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Une caractérisation de la loi géométrique

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, **indépendantes et de même loi**, toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I(\omega) = \min\big(X(\omega), Y(\omega)\big), \quad M(\omega) = \max\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \quad \text{et} \quad D(\omega) = M(\omega) - I(\omega).$$

1. Montrer que I et M sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
2. Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. *On pourra poser* $q = 1 - p$.
   (a) Reconnaître la loi de la variable I.
   (b) Calculer, pour tout $(i,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}([I = i] \cap [D = d])$ (qu'on pourra noter $\mathbf{P}(I = i, D = d)$).
   On séparera les cas $d = 0$ *et* $d > 0$.
   (c) Déterminer la loi de la variable D.
   (d) Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.
3. Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.
   On note $b := \mathbf{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$.
   On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbf{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbf{P}(I > k, D = 0)$ établir l'égalité
   $$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\Big(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\Big)^2.$$
   (d) i. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1 - b)p_k = 2b\mathbf{P}(X > k)$.
   ii. Calculer p_1 en fonction de b puis établir, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $p_{k+1} = \dfrac{1-b}{1+b}\, p_k$.
   (e) En déduire que la loi commune des variables X et Y est géométrique de paramètre p_1.

Exercice 2. Un calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout entier naturel n, $C_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\, \mathrm{d}x$ et $D_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n}\, \mathrm{d}x$.

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n - 1)(C_{n-1} - C_n)$.
   On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}.$$

3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2 D_n$.

4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\dfrac{1}{n^2} = 2\Big(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\Big)$.

5. (a) Justifier, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la minoration : $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}\, x$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $D_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\,\dfrac{C_n}{2n+2}$.

6. Prouver l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3. Trois preuves d'une égalité combinatoire

1. `Avec la fonction Beta`

   On pose, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, $B(n, p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^p\,\mathrm{d}t$.

   (a) Relier, pour tout couple $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les réels $B(n, p)$ et $B(n+1, p-1)$. En déduire, pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $B(n, p) = \dfrac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$.

   (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir l'égalité
   $$(\mathscr{E}) \qquad \frac{(m-1)!\,n!}{(m+n)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}.$$

2. `Avec des différences finies`

   On note Δ l'application qui, à chaque suite réelle $u := (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, associe la suite
   $$\Delta(u) := (u_{p+1} - u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}.$$
   On note, $\Delta^2 = \Delta\circ\Delta$, $\Delta^3 = \Delta\circ\Delta\circ\Delta$, *etc.*, et $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}}$.

   (a) Prouver, pour toute suite $u := (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, pour tout entier naturel n et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité
   $$\big(\Delta^n(u)\big)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}.$$

   (b) En utilisant la suite $u := \big(\dfrac{1}{p}\big)_{p\in\mathbb{N}^*}$ établir à nouveau l'égalité $(\mathscr{E})$.

3. `Par un raisonnement probabiliste`

   On rappelle que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ on dispose de la formule du crible suivante
   $$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots A_{i_k}).$$

(a) Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ et B des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Établir l'égalité

$$\mathbf{P}(B \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(B) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots A_{i_k}^c),$$

(où l'on note E^c le complémentaire d'un événement E).

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une urne contenant une boule noire notée N, n boules blanches notées $B_1, B_2, \dots, B_n$ et $m-1$ boules rouges notées $R_1, R_2, \dots, R_{m-1}$. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne, sans remise de la boule dans l'urne après tirage, jusqu'à épuisement de l'urne. Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une $(m+n)$-liste (ordonnée ...) composée des $m+n$ symboles $B_1, B_2, \dots, B_n$, $R_1, R_2, \dots, R_{m-1}$ et N. On note B l'événement constitué des tirages où la boule noire est tirée avant chacune des boules rouges, et, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, A_i l'événement constitué des tirages où la boule noire est tirée après la boule blanche B_i.

(b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B)$.

(c) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i)$.

(d) Prouver, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ et tout k-liste $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$, l'égalité

$$\mathbf{P}(B \cap A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \dots A_{i_k}^c) = \frac{1}{m+k}.$$

(e) i. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer – en le justifiant – le nombre de k-listes $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers telles que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$.

ii. En déduire à nouveau l'égalité $(\mathscr{E})$.

Exercice 4. Une propriété des matrices symétriques

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles colonnes de taille n que l'on munit de sa structure euclidienne standard où le produit de deux matrices colonnes X et Y est ${}^{\mathrm{t}}XY$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n et symétriques.

On note, pour tout entier naturel n non nul et pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$,

$$R(A) = \left\{ {}^{\mathrm{t}}XAX \,;\, {}^{\mathrm{t}}XX = 1 \right\}.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonalement semblable** à une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ (*i.e.* vérifiant l'égalité ${}^{\mathrm{t}}PP = I_n$) pour laquelle $B = {}^{\mathrm{t}}PAP$.

1. Soit $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A est orthogonalement semblable à B.

   Prouver l'égalité : $R(A) = R(B)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant *i.e.* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$.

   (a) Prouver l'inclusion : $R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

(b) Établir l'égalité : $R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

(c) Montrer que si la matrice A est de trace nulle alors 0 est élément de $R(A)$. Dans le cas où $n = 3$, la réciproque est-elle vraie ?

On appelle diagonale d'une matrice $M := (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la liste $(m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,n})$ de ses éléments diagonaux.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on dispose d'une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ pour laquelle ${}^tPAP$ **a pour diagonale** $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$ (où $\operatorname{Tr} A$ désigne la trace de A). Vérifier que $\operatorname{Tr} A$ est élément de $R(A)$.

3. (a) Donner un exemple de matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$ dont la trace n'est pas élément de $R(A)$.

   (b) Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ si et seulement si $0 \in R(A)$.

4. Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\operatorname{Tr} A, 0)$.

5. Soit n un entier avec $n \geqslant 2$. On suppose que toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$.

   Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$.

   (a) Justifier l'existence d'une matrice colonne $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'une matrice ligne $L \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice $B \in S_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \operatorname{Tr} A & L \\ C & B \end{pmatrix}$.

   (b) Que vaut $\operatorname{Tr} B$? En déduire que $\operatorname{Tr} B \in R(B)$.

   (c) Conclure que la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$.

6. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel a pour lequel la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à a.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2021

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Le thème du problème est le comportement asymptotique des restes des séries numériques convergentes, à travers l'étude d'exemples variés.

L'énoncé est divisé en quatre parties largement indépendantes, que les candidats ne sont pas tenus de traiter dans l'ordre.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Pour toute suite réelle $u = \left(u_n\right)_{n\geq 0}$, on notera $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ la série de terme général u_n et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

Partie 1 Exemples de calcul explicite du reste

1. Rappeler pourquoi, lorsque la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente, la suite de terme général $\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$ est convergente. Quelle est alors sa limite ?

2. Dans cette question, x désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.

   a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Quelle est sa somme ?

   b) Établir, pour tout nombre entier strictement positif n, l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \operatorname{sh}(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

   c) Donner une expression similaire de $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, sous la forme d'une intégrale.

3. a) Démontrer que la série de terme général $a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ est convergente.

   b) Trouver un couple (P,Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X \\ P(X)\,Q(X) = X^4 + X^2 + 1 \end{cases} \quad .$$

   c) Établir que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls , on a :

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y) \quad .$$

   d) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1) \ .$$

   e) La série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k\right)$ est-elle convergente ?

Partie II Exemples d'évaluation asymptotique du reste

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si, et seulement si, x est strictement supérieur à 1.

5. Dans cette question on suppose que le réel x est strictement supérieur à 1 et, pour tout entier n strictement positif, on note $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^x}$.

a) Pour tout réel a strictement positif, justifier l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{a^{1-x}\big(1+(x-1)\ln a\big)}{(x-1)^2}\,.$$

b) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t \;\le\; r_n \;\le\; \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t \quad .$$

c) En déduire que r_n est équivalent à $\frac{\ln n}{(x-1)\,n^{x-1}}$ quand n tend vers l'infini.

6. Sommation des relations de comparaison

On considère deux suites $v = (v_n)_{n\ge 0}$ et $w = (w_n)_{n\ge 0}$ à termes réels non nuls.
On suppose que v_n est équivalent à w_n quand n tend vers l'infini et que la série $\sum_{n\ge 0} v_n$ est convergente.

On rappelle que, si tous les termes de la suite v sont positifs, alors :

- la série $\sum_{n\ge 0} w_n$ est convergente.
- $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini .

a) À l'aide d'un contre-exemple, montrer que la première de ces deux propriétés de w ne serait pas assurée si le signe des termes de la suite v n'était pas constant.

b) Montrer de même que, lorsque le signe des termes de la suite v n'est pas constant, il est possible que la série $\sum_{n\ge 0} w_n$ soit convergente mais que $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ ne soit pas équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand n tend vers l'infini. *On pourra utiliser pour w la suite de terme général* $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n(n+1)}$.

Pour traiter la question qui suit, on pourra admettre la propriété suivante qui complète les propriétés rappelées précédemment.

Si v et w sont deux suites à termes positifs telles que $v_n = o(w_n)$ (v_n négligeable par rapport à w_n quand n tend vers l'infini) et si les séries $\sum_{n\ge 0} v_n$ et $\sum_{n\ge 0} w_n$ sont convergentes, alors

$$\sum_{k=n}^{\infty} v_k = o\Big(\sum_{k=n}^{\infty} w_k\Big)\,.$$

7. Un exemple probabiliste

   Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.
   On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p $(\in]0,1[)$, que Y suit la loi de Poisson de paramètre λ (> 0) et que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(X \geq n)$.

   b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\mathbf{P}(X+Y=n) = p(1-p)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^k.$$

   c) En déduire que $\mathbf{P}(Y \geq n)$ est négligeable devant $\mathbf{P}(X+Y \geq n)$ quand n tend vers l'infini.

   d) Démontrer que $\mathbf{P}(X+Y \geq n)$ est équivalent à $\mathrm{e}^{\lambda p/(1-p)}(1-p)^{n-1}$ quand n tend vers l'infini.

   e) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(X+Y \geq n)$ est convergente. Quelle est sa somme ?

Partie III Étude du reste comme opérateur

On note L_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées et $\| \; \|_\infty$ la norme sur L_∞ définie par

$$\forall\, u = (u_n)_{n\geq 0}, \quad \| u \|_\infty = \sup\{|u_n|\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

8. Démontrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \| \; \|_\infty)$.

9. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\geq 0}$ telles que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

   a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F.

   b) L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(L_\infty, \| \; \|_\infty)$? Quelle est son adhérence ?

10. On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de E associe la suite $r = (r_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

   a) Calculer $\| u \|_\infty$ et $\| \Phi(u) \|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme u_0 égal à 1.

   b) Démontrer que Φ est une application linéaire et injective de E dans L_∞, dont l'image est F.

c) On note Ψ la restriction de Φ à E, considérée comme une bijection de E sur F.

On munit E et F de la norme $\| \|_\infty$.

i) L'application Ψ est-elle continue ?

ii) L'application réciproque Ψ^{-1} est-elle continue ?

Partie IV Restes de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

On rappelle que, si $v = (v_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle, alors :

- la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n v_n$ est convergente
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k$ est positive si n est pair, négative si n est impair, et vérifie l'inégalité

$$|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k v_k| \leq v_n .$$

11. Établir, pour tout réel positif ou nul t, la double inégalité :

$$0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -\frac{f'(t)}{f(t)} .$$

12. Pour tout entier positif ou nul n, on pose : $u_n = (-1)^n f(n)$.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

b) Pour tout entier positif ou nul n, on pose : $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n, on a :

i) $| r_n | = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p)$

ii) $0 \leq | r_n | - | r_{n+1} | \leq f(n) - f(n+1)$.

c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ est convergente.

d) Démontrer que, si le quotient $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand le réel t tend vers l'infini alors r_n est équivalent à $\dfrac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini.

13. a) Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est-elle convergente ?

b) Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$ quand n tend vers l'infini.

14. a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

b) La série de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est-elle convergente ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve de mathématiques

Durée : 3h

En dehors de sa dernière question, la partie II est indépendante de la partie I.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1. *Les sous-questions sont indépendantes.*

   (a) On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 ; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

   Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   On **admet** l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$

   ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

   (d) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$

   Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Vérifier que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$.

   Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t, on a : $\left|h_n^{(k)}(t)\right| \leqslant K$.

   (b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir l'égalité : $\lim_{t\to 0} \dfrac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(c) Justifier, pour tout entier $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$.

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Établir, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} \mathrm{e}^{i(2n-2k)t}.$$

(b) En déduire, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt).$$

(c) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$.

5. `Étude asymptotique de la suite de terme général` $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$

(a) Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot$

(b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]\cdot$

ii. En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot$$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1-c), donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ *où* $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\cdot$

(c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on a : $|\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant 2u$.

ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1-c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\left(1-\mathrm{e}^{-nt^3}\right)\mathrm{d}t,$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\,\frac{\ln^4 n}{n}\cdot$$

(d) En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}\cdot$$

On se souviendra du résultat de 1-d).

Partie II Montées d'une permutation de $[\![1, n]\!]$

On appelle, pour tout entier naturel n non nul, **montée** d'une liste $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'entiers naturels **distincts deux à deux** toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \ldots, a_q)$ (avec $p \leqslant q$) vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} & p = 1 \text{ ou } a_{p-1} > a_p \\ \text{et} & a_p < a_{p+1} < \cdots < a_q \text{ (si } p < q) \\ \text{et} & q = n \text{ ou } a_q > a_{q+1} \end{cases}$$

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a. Par exemple, les montées de la liste $a = (2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont $(2,5,7)$, (6), $(1,4)$ et $(3,8)$, et donc $M(a) = 4$.

On définit de même la notion de descente d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont (2), (5), $(7,6,1)$, $(4,3)$ et (8), et donc $D(a) = 5$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n l'ensemble des n-listes d'éléments de $[\![1, n]\!]$ **distincts deux à deux**.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n, on a $1 \leqslant M(a) \leqslant n$ et $1 \leqslant D(a) \leqslant n$.

Enfin, pour tout entier naturel k, on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k) = \mathrm{card}\left\{a \in \mathrm{S}_n\,;\, M(a) = k\right\}$. On a donc, $E_n(0) = 0$ ainsi que $E_n(k) = 0$ pour tout entier $k > n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

   (b) Soit k un entier fixé compris entre 1 et n.
   Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a) = k$.

2. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et pour toute liste a de S_n, la valeur de $M(a) + D(a)$.

   En notant, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1, a_2, \ldots, a_i)$, on évaluera, en fonction du nombre s_i, la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1, a_2, \ldots, a_{i+1})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On associe, à toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de S_n, la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n).$$

   (a) Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n.

   (b) En déduire, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, l'égalité : $E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

4. `Calcul de` $E_n(2)$

   Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Quel est le nombre de couples (A, B) de parties **non vides** de $[\![1, n]\!]$ tels que

$$A \cup B = [\![1, n]\!] \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

   (b) Établir l'égalité : $E_n(2) = 2^n - (n+1)$.

5. `Une relation de récurrence`

   Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1}, on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $(n+1)$ de la liste a. Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3,4,1,5,6,2)$, alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$, et si $a = (6,3,4,1,5,2)$ alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$.

   (a) Soit $b = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de S_n. Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

   (b) Soit k dans $[\![1, n]\!]$ et soit b dans S_n tels que $M(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

   (c) Établir, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, l'égalité :

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k).$$

   Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout entier $k > n$.

   (d) Donner, en détaillant le calcul de $E_5(3)$, les valeurs de $E_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

6. `La formule de Worpitzky`

   Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n.$$

   On raisonnera par récurrence sur l'entier n.

7. `Une égalité miraculeuse !`

   Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi}(2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 3h

Les matrices de Hessenberg sont des matrices « presque triangulaires », qui permettent d'économiser les calculs lors de la mise en œuvre d'algorithmes d'analyse numérique. L'objet du problème est d'examiner le comportement asymptotique des puissances de certaines de ces matrices.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Dans tout l'énoncé, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

• Le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne d'une matrice M est noté $M[i,j]$.

• Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont nuls sauf un, égal à 1, sont notées $E_{i,j}^{(n)}$. Ainsi a-t-on, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\forall (\ell,k) \in [\![1,n]\!]^2, \quad E_{i,j}^{(n)}[\ell,k] = \delta_i^\ell \, \delta_j^k = \begin{cases} 1 & \ell = i \text{ et } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où δ_i^ℓ (respectivement δ_j^k) vaut 1 si $i = \ell$ (respectivement $j = k$), 0 sinon.

• Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note u_M (respectivement v_M) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé à M, c'est-à-dire l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). On appelle *spectre* de M l'ensemble, noté $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M)$, des valeurs propres de v_M (il s'agit d'une partie non vide de $\mathbb{C}$).

• Lorsque doit être établie la convergence d'une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de la convergence pour l'une quelconque des normes sur cet espace vectoriel, toutes équivalentes puisqu'il est de dimension finie.

Partie I Matrices de Hessenberg

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hessenberg* si tous ses coefficients $M[i,j]$ situés en dessous de la « sous-diagonale », c'est-à-dire tels que $i \geq j+2$, sont nuls.

Par exemple, les matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M[1,1] & M[1,2] & M[1,3] & M[1,4] & M[1,5] \\ M[2,1] & M[2,2] & M[2,3] & M[2,4] & M[2,5] \\ 0 & M[3,2] & M[3,3] & M[3,4] & M[3,5] \\ 0 & 0 & M[4,3] & M[4,4] & M[4,5] \\ 0 & 0 & 0 & M[5,4] & M[5,5] \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   a) Justifier que $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   b) En donner une base et la dimension.

2. Soit a un réel strictement positif. On note $H_+(a)$ et $H_-(a)$ les deux matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$H_+(a) = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_-(a) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -1 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   a) Trouver les valeurs propres de la matrice $H_+(a)$ et montrer qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

   b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p}\big(H_+(a)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est supérieur ou égal à $a+\sqrt{a}$.

   c) Soit $Q(a) = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{(a+\sqrt{a})^p}\big(H_+(a)\big)^p$.
   Justifier que l'endomorphisme $u_{Q(a)}$ de $\mathbb{R}^n$ est un projecteur, dont on précisera le rang, l'image et le noyau.

   d) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{r^p}\big(H_-(a)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est strictement supérieur à $\sqrt{a(1+a)}$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $J_n = \sum\limits_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j}^{(n)}$ et $H_n(a,b) = a\,I_n + bJ_n$.

   a) Calculer les puissances successives de la matrice J_3 et donner, sans démonstration, une expression générale des puissances $(J_n)^q$ ($q \in \mathbb{N}$).

   b) Établir, pour tout entier $p \geq n-1$, l'égalité

$$\big(H_n(a,b)\big)^p = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \binom{p}{i-j} a^{p-i+j}\, b^{i-j} E_{i,j}^{(n)}$$

   et en déduire que, si a et b sont différents de 0, alors tous les coefficients de la matrice $\big(H_n(a,b)\big)^{n-1}$ situés sur ou en dessous de la diagonale (c'est-à-dire dont l'indice de ligne est supérieur ou égal à l'indice de colonne) sont différents de 0.

   c) Pour quelles valeurs de (a,b) la suite $\left(\big(H_n(a,b)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Partie II Rayon spectral

Dans cette partie, on considère une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $\rho(M)$ le plus grand des modules des éléments du spectre de M, appelé *rayon spectral de M* :

$$\rho(M) = \text{Max}\,\{|\,\lambda\,|\,;\ \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(M)\}\ .$$

4. Soit ε un nombre réel strictement positif et P_ε la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont donnés par :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ P_\varepsilon[i,i] = \varepsilon^i\ .$$

a) Calculer, pour toute matrice triangulaire supérieure T de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients de la matrice $P_\varepsilon^{-1}\,T\,P_\varepsilon$.

b) En déduire que, pour tout réel $\alpha > 0$, il existe une matrice triangulaire semblable à T dont tous les coefficients non diagonaux sont de modules inférieurs ou égaux à α.

c) Démontrer que pour tout réel $r > \rho(M)$, il existe une matrice inversible P à coefficients complexes pour laquelle la matrice $M' = P^{-1}MP$ est triangulaire et le module de chacun de ses coefficients au plus égal à r, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |\,M'[i,j]\,| \le r\ .$$

5. Justifier, pour tout réel $r > \rho(M)$, la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{r^p}M^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ vers la matrice nulle.

6. On suppose dans cette question que le polynôme caractéristique de M possède au moins une racine réelle simple, que l'on note λ.
On note u_M^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de u_M, dont la matrice dans la base canonique est la transposée ${}^tM$ de la matrice M.

a) Justifier l'existence de deux éléments non nuls x et y de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$u_M(x) = \lambda\, x \qquad \text{et} \qquad u_M^*(y) = \lambda\, y.$$

b) Démontrer que l'orthogonal $\text{Vect}\{y\}^\perp$ de la droite vectorielle engendrée par le vecteur y, pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, est stable par l'endomorphisme u_M et que λ n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme de $\text{Vect}\{y\}^\perp$ induit par u_M.

c) En déduire que $\text{Vect}\{y\}^\perp$ et $\text{Vect}\{x\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

d) On note Q la matrice dans la base canonique du projecteur de $\mathbb{R}^n$ d'image $\text{Vect}\{x\}$ et de noyau $\text{Vect}\{y\}^\perp$.
Démontrer que, si λ est égal au rayon spectral $\rho(M)$ et si tous les éléments de $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$ distincts de λ ont un module strictement inférieur à $\rho(M)$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{\rho(M)^p}M^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite Q.

Partie III Matrices irréductibles

Pour toute partie J de $[[1,n]]$, on note F_J le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dont l'indice j appartient à J :

$$F_J = \mathrm{Vect}\{e_j\,;\, j \in J\}$$

(qui est réduit au vecteur nul lorsque J est vide).

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *J-réduite* si F_J est stable par l'endomorphisme u_M et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})[J]$ l'ensemble des matrices J-réduites de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})[J] = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, u_M(F_J) \subseteq F_J\}\ .$$

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *irréductible* s'il n'existe aucune partie J de $[[1,n]]$, non vide et distincte de $[[1,n]]$, pour laquelle M est J-réduite.

7. Exemples

   a) Pour quelles parties non vides J de $\{1,2,3\}$ les matrices $H_+(a)$ et $H_-(a)$ de la question 2 sont-elles J-réduites ?

   b) Démontrer qu'aucune des matrices $H_n(a,b)$ de la question 3 n'est irréductible.

8. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Démontrer que, pour que M soit irréductible, il suffit qu'il existe un entier naturel p pour lequel tous les coefficients de la matrice M^p sont différents de 0.

Pour traiter la dernière question du problème, on admettra les deux résultats suivants (théorèmes de Perron-Frobenius).

• Si une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs ou nuls, alors $\rho(N)$ appartient au spectre de N.

• Si une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients strictement positifs, alors $\rho(N)$ en est la seule valeur propre de module maximal et la dimension du sous-espace propre qui lui est associé est égale à 1.

9. Soit H une matrice de $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés sur et au dessus de la sous-diagonale sont strictement positifs :

$$\forall\,(i,j) \in [[1,n]]^2,\ i \leq j+1 \Longrightarrow H[i,j] > 0\ .$$

   a) Justifier l'existence de deux réels strictement positifs a et b pour lesquels tous les coefficients de $H - H_n(a,b)$ sont positifs ou nuls.

   b) En déduire que H est irréductible.

   c) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{1}{\rho(H)^p} H^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice qui est canoniquement associée à un projecteur de rang 1.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle que l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A est la variable aléatoire qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

On rappelle qu'une fonction réelle h, définie sur $\mathbb{R}$, est dite convexe si, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a : $h\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$. Le candidat se rappellera, ou admettra, que si une fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et convexe alors, pour tout réel a, la fonction $p_a : x \mapsto \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$ est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Partie I - Préliminaires

On établit ici des résultats qui seront utilisées dans la suite du problème. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout entier naturel , non nul $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Quelle est, pour tout entier naturel n non nul, la loi de S_n ?

   (b) Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :
$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda+\varepsilon\Big) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}\cdot$$

2. Soit $(x,\mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mu < x$.
   On considère l'application Ψ qui, à chaque réel $\theta \geqslant 0$, associe
$$\Psi(\theta) = \exp\Big(\mu(\mathrm{e}^{\theta}-1)-\theta x\Big).$$

   (a) Montrer que la fonction Ψ a un minimum sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa valeur.

   (b) Soit $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = n(\lambda+\varepsilon)$ et $\mu = n\lambda$.
   Justifier, dans ces conditions, l'existence d'un réel $a > 0$ (fonction de λ et ε mais pas de n) pour lequel $\min\limits_{\theta\geqslant 0}\Psi(\theta) = \mathrm{e}^{-an}$.

3. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g\big(\frac{x+y}{2}\big) \leqslant \frac{g(x)+g(y)}{2}\cdot$

   (a) Prouver, pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in [\![0,2^n]\!]$, l'inégalité :
$$g\Big(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\Big) \leqslant \frac{k}{2^n}\,g(x)+\big(1-\frac{k}{2^n}\big)\,g(y)\cdot$$
   On pourra raisonner par récurrence sur l'entier n, et observer que, si p est un entier, on a l'égalité : $\dfrac{2p+(2p+2)}{2} = 2p+1$.

   (b) On pose $D = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\Big\{\frac{k}{2^n}\,;\, k\in[\![0,2^n]\!]\Big\}$ et on considère un réel λ de $[0,1]$.
   On note, pour tout entier naturel n, $d_n = \dfrac{\lfloor\lambda 2^n\rfloor}{2^n}\cdot$
   Vérifier que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D, **croissante** et convergente vers λ.

   (c) On suppose, de plus, que la fonction g est croissante. Montrer qu'elle est convexe.

4. Soit X une variable aléatoire discrète possédant une espérance.

   (a) Rappeler l'inégalité de Markov.

(b) On suppose, de plus, la variable X à valeurs positives ou nulles. Établir, pour tout réel $x > 0$, l'inégalité

$$\mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant \inf_{\theta > 0} \frac{\mathbf{E}(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}.$$

5. Soit X une variable aléatoire, **possédant une espérance** et telle que $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$. On note, pour tout entier naturel n, $\alpha_n = \mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{[X \leqslant x_n]})$.

(a) Prouver la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$.
Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a :

$$\mathbf{E}(X) - \varepsilon \leqslant \alpha_n.$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{E}(X)$.

(c) Soit β la fonction qui, à chaque réel $K \geqslant 0$ associe, $\beta(K) = \mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{[X \leqslant K]})$.
Prouver l'égalité $\lim\limits_{K\to+\infty} \beta(K) = \mathbf{E}(X)$.
On admet que ce résultat est valable pour toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concave et décroissante. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier l'existence d'une limite finie, négative ou nulle, à droite en x, pour la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}$. On note θ_0 cette limite.

(b) Prouver, pour tout réel u, l'inégalité : $f(u) \leqslant f(x) + \theta_0(u - x)$.

(c) En déduire l'égalité

$$\inf_{\theta \geqslant 0} \sup_{u \in \mathbb{R}} \Big(f(u) + \theta(u - x) \Big) = f(x),$$

en ayant, pour tout réel θ, posé $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}} \Big(f(u) + \theta(u - x) \Big) = +\infty$ quand la fonction $u \mapsto f(u) + \theta(u - x)$ n'est pas majorée.

7. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$.

(a) Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbf{P}(X > t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit r un entier naturel.
Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbf{P}(X > x_k)$, puis l'égalité

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{r} x_k\,\mathbf{P}(X = x_k) + x_{r+1}\,\mathbf{P}(X > x_r).$$

(c) Prouver que la variable aléatoire X a une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge et que, dans ce cas, on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que ce résultat s'étend à toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tout $(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, l'inégalité :

$$v_{m+n} \leqslant v_m + v_n.$$

   (a) Justifier l'existence du nombre $\rho = \inf\left\{\frac{v_n}{n}\,;\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ et $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\rho \leqslant \frac{v_N}{N} < \rho+\varepsilon$.
   Soit $(k,r)\in\mathbb{N}\times[\![0,N-1]\!]$ et $n = kN+r$. Prouver l'inégalité $\frac{v_n}{n} \leqslant \frac{v_N}{N} + \frac{v_r}{n}$ et en déduire, pour tout entier n assez grand, l'encadrement $\rho \leqslant \frac{v_n}{n} \leqslant \rho + 2\varepsilon$.
   On en déduit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = \rho$.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes, à valeurs **positives ou nulles**, indépendantes et suivant toutes la loi de X_1. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

On suppose, de plus, que, pour tout réel t, $\mathbf{P}(X_1 > t) > 0$.

9. (a) Soit $(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ et $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}(S_{m+n} \geqslant mu+nv) \geqslant \mathbf{P}(S_m \geqslant mu)\,\mathbf{P}(S_n \geqslant nv).$$

   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel u, l'inégalité :

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nu) > 0.$$

   (c) En déduire que, pour tout réel u, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \mathbf{P}(S_n \geqslant nu)}{n} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln \mathbf{P}(S_n \geqslant nu)}{n}$.

Partie II - Le théorème de Cramer

1. `Une inégalité`

   (a) Soit J une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément x de J, l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans J. Prouver que la partie J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que la fonction $\varphi : \theta \mapsto \ln \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1})$ est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}_-$.

   (c) Déterminer l'intervalle I et la valeur de $\varphi(\theta)$ pour tout $\theta\in I$, dans les cas où X_1 suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ ou la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

2. (a) Vérifier que la fonction $H : u \mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\ln\big(\mathbf{P}(S_n \geqslant nu)\big)$ est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est décroissante.

   (b) Prouver, pour tout couple $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, l'inégalité : $H\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \geqslant \frac{1}{2}\big(H(u)+H(v)\big)$.
   On utilisera **I** - 9.

(c) Qu'en déduit-on pour la fonction H ?

3. Soit $\theta \in I \cap \mathbb{R}_+$.

   (a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathbf{E}(e^{\theta S_n}) = \left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1})\right)^n$.

   (b) En déduire, pour tout réel u et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geqslant \frac{1}{n} \ln\left(e^{n\theta u}\, \mathbf{P}(S_n \geqslant nu)\right).$$

   (c) Conclure à l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geqslant \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\theta u + H(u)\right).$$

4. `Le cas d'égalité si` $\theta = 0$

   Établir l'égalité : $\varphi(0) = \sup_{u\in\mathbb{R}} H(u)$.

5. `L'autre inégalité si` $\theta > 0$

   On rappelle que les variables X_k sont discrètes, à valeurs positives ou nulles, indépendantes et suivent toutes la loi de X_1, et que, pour tout réel t, $\mathbf{P}(X_1 > t) > 0$.

   Soit $K > 0$, $\theta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) i. Prouver l'inégalité :

$$\ln\left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\, \mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\mathbf{E}(e^{\theta S_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \leqslant K]})\right).$$

   ii. En déduire l'inégalité :

$$\ln\left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\, \mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) \leqslant \frac{1}{n} \ln\left(\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\, \mathbf{1}_{[S_n \leqslant nK]})\right).$$

   (b) Justifier l'existence d'une espérance pour la variable $e^{\theta S_n}\, \mathbf{1}_{[S_n \leqslant nK]}$ et établir l'inégalité :

$$\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\, \mathbf{1}_{[S_n \leqslant nK]}) \leqslant \int_0^{\exp(n\theta K)} \mathbf{P}(e^{\theta S_n} > t)\, \mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire l'inégalité $\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\, \mathbf{1}_{[S_n \leqslant nK]}) \leqslant 1 + n\theta \int_0^K \mathbf{P}(S_n > nu)\, e^{n\theta u}\, \mathrm{d}u$, puis l'inégalité :

$$\ln\left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\, \mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) \leqslant \frac{1}{n} \ln\left(1 + n\theta K \exp(n M(\theta))\right),$$

   où l'on a posé $M(\theta) = \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\theta u + H(u)\right)$.

6. Prouver, pour tout réel K assez grand et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\ln\left(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\, \mathbf{1}_{[X_1 \leqslant K]})\right) \leqslant \frac{\ln(2n\theta K)}{n} + M(\theta).$$

7. En déduire l'inégalité : $\varphi(\theta) \leqslant M(\theta)$.

   Il y a donc égalité via 3 - (c).

8. Conclure, pour tout réel x, à l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S_n \geqslant nx) = \inf_{\theta\geqslant 0}\Big(\ln\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}) - \theta x\Big).$$

9. Soit $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$.

   (a) Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ pour lequel, pour tout entier naturel n assez grand, on a :
   $$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda+\varepsilon\Big) \leqslant \mathrm{e}^{-an}.$$

   (b) Retrouver ce résultat, en utilisant les résultats des questions **I** - 2 et **I** - 4, dans le cas particulier où X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

L'objet du problème est l'étude de quelques fonctions périodiques, bâties à partir de la distance à une partie de $\mathbb{R}$ et utilisées notamment en théorie du signal et en théorie des probabilités.

- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble des opposés des éléments de A :

$$-A = \{-a\,;\, a \in A\}\,.$$

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel strictement positif t, on dit que la fonction f est *t-périodique* si elle vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+t) = f(x)\,.$$

On dit que f est périodique s'il existe un réel strictement positif t pour lequel la fonction f est t-périodique. Dans ce cas, on appelle *période* de f la borne inférieure de l'ensemble des réels strictement positifs t pour lesquels la fonction f est t-périodique.

Par exemple, la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique, de période égale à 1, et toute fonction constante est périodique, de période égale à 0.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes, mais les matrices introduites dans la partie I sont utilisées dans la partie IV.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I : une famille de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note T_c la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$T_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .$$

On considère d'autre part la matrice : $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Pour quelles valeurs de c la matrice T_c est-elle diagonalisable ?
   b) Existe-t-il une valeur de c et une matrice inversible P pour lesquelles les deux matrices $P^{-1}T_cP$ et $P^{-1}SP$ sont diagonales ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Calculer la matrice $(T_{1/2})^n$.
   b) En déduire, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, la matrice $S^m (T_{1/2})^n$.
   c) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{G}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ stable par le produit matriciel et contenant les matrices S et $T_{1/2}$.
   Justifier que toutes les matrices de $\mathscr{G}$ sont de la forme $2^{-n}\begin{pmatrix} 2^n & h & k \\ 0 & (-1)^m & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(h,k,\ell) \in \mathbb{Z}^3$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   d) Quelles sont les matrices de $\mathscr{G}$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $+1$ ou à -1 ?

Partie II : distances à une partie de $\mathbb{R}$

3. a) Justifier, pour tout réel x et pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, l'existence de la distance de x à A, c'est-à-dire du nombre réel positif ou nul

$$\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{Inf}\{|x-a| \,;\, a \in A\} .$$

   b) Quels sont les nombres réels x pour lesquels la distance $\mathrm{d}(x,A)$ de x à une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est nulle ?
   c) Justifier que, si A est une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors il existe pour tout réel x un élément a_x de A tel que :

$$|x-a_x| = \mathrm{d}(x,A) .$$

4. Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, on note d_A la fonction $x \longmapsto \mathrm{d}(x,A)$, définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Dessiner le graphe de la fonction d_A lorsque $A = \{-1, 0, +1\}$.
   b) Démontrer que si $A = -A$, alors la fonction d_A est paire et que la réciproque est vraie lorsque A est fermée.
   c) Démontrer que, si l'ensemble A est minoré ou majoré, alors la fonction d_A n'est pas bornée.
   d) Donner un exemple d'ensemble A qui n'est ni minoré ni majoré, pour lequel la fonction d_A n'est pas bornée.

5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathrm{d}_A(y) \leq \mathrm{d}_A(x) + |y - x| + \varepsilon \, .$$

b) En déduire que la fonction d_A est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Justifier que, si la fonction d_A est dérivable et nulle en un point x_0, alors sa dérivée en ce point est nécessairement nulle.

6. On considère dans cette question une suite strictement décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergente et de limite nulle, et on note :

$$A = \mathbb{R}_-^* \cup \{u_n \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\} \, .$$

a) Justifier que 0 appartient à la frontière de A et que la fonction d_A s'annule en 0.

b) On considère ici le cas où $u_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\mathrm{d}_A\Big(\dfrac{1}{2}\,(u_n + u_{n+1})\Big)$ et en déduire que la fonction d_A n'est pas dérivable à droite au point 0.

c) On considère maintenant le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que la fonction d_A est dérivable au point 0 et indiquer les autres points où elle est dérivable.

Partie III : signaux triangulaires

7. Dans cette question, on suppose que A est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

a) Donner la fonction d_A lorsque $A = \{0\}$ et lorsque A est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que, dans tous les autres cas, il existe un réel strictement positif α tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}_A(x) = \alpha\, \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) \, .$$

On note désormais σ la fonction $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sigma(x) = \mathrm{Min}\{|x - n| \, ; \, n \in \mathbb{Z}\} \qquad (1)$$

8. a) Justifier l'expression de $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(x)$ donnée par (1).

b) Vérifier que la fonction σ est paire, périodique et de période égale à 1.

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -\dfrac{1}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Pour tout $r \in]0,1[$, on note P_r l'application $t \longmapsto \dfrac{1-r^2}{1-2\,r\cos(2\pi t)+r^2}$.

9. a) Vérifier que, pour tout $r \in [0,1[$, la fonction P_r est définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Soit $\varepsilon \in]0,1/2[$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+1/2} P_r(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

10. Soit $t \in \mathbb{R}$.

    a) Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\big(\cos(2\pi n t)\big)x^n$ est égal à 1.

    b) Établir, pour tout $r \in [0,1[$, l'égalité

$$P_r(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\cos(2\pi n t)\big)r^n \,.$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

    Pour tout $r \in [0,1]$, on pose : $\displaystyle\sigma_r(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\big((2k+1)\,2\pi\,x\big)}{(2k+1)^2}\,r^{2k+1}$.

    a) En utilisant les formules démontrées en 8c et 8d, démontrer que :

$$\forall\, r \in [0,1[, \quad \sigma_r(x) = \int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(t)\Big(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(2\pi n x)\cos(2\pi n t)r^n\Big)\,\mathrm{d}t \,.$$

    b) En déduire, pour tout $r \in [0,1[$, les égalités :

$$\sigma_r(x) = \frac{1}{2}\Big(\int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(t)P_r(x+t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(t)P_r(x-t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(x+t)P_r(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

12. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sigma(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos\big((2n+1)\,2\pi\,x\big)}{(2n+1)^2} \,.$$

Partie IV : une famille de fonctions 1-périodiques

Pour tout réel $c \in]0,1[$, on note τ_c l'application

$$\tau_c : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c^n \sigma(2^n x) \tag{2}$$

où σ est la fonction définie par (1) dans la partie III.

13. Soit $c \in]0,1[$.

a) Justifier que la fonction τ_c est définie, continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tau_c(x) = \sigma(x) + c\,\tau_c(2x)$.

c) Démontrer que τ_c est l'unique fonction τ définie et bornée sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau(x) = \sigma(x) + c\,\tau(2x) \tag{3}$$

14. Dans cette question, on suppose que c est égal à $1/4$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1/2]$, on a : $\tau_c(x) = 2x(1-x)$.

b) Donner une représentation graphique de la fonction τ_c.

On note désormais β la fonction $\tau_{1/2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sigma(2^n x) \tag{4}$$

15. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note f_1, f_2, f_3 les restrictions à $[0,1]$ des trois fonctions $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \beta(x)$, respectivement, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces trois fonctions.
On note Φ et Ψ les deux applications définies sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad \begin{cases} \Phi(f)(x) = f(x/2) \\ \Psi(f)(x) = f(1-x) \end{cases}.$$

a) Vérifier que le sous-espace vectoriel F est stable par les endomorphismes Φ et Ψ.

b) Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et reconnaître les matrices dans cette base des endomorphismes de F induits par Φ et Ψ.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 2^n]$.
En utilisant le résultat de la question 2b de la partie I, exprimer $\beta\big((1-x)\,2^{-n}\big)$ à l'aide de x, n et $\beta(x)$.

16. a) En exploitant le résultat trouvé en 15 c, justifier que la fonction β n'est pas dérivable en 0.

b) Démontrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction β est dérivable.