Programme de colle 9

Classe de PC

Semaine du lundi 24 au vendredi 28 novembre

Liste des questions de cours
• Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$ et $g(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$. • Pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\quad \text{Ker}\,(v \circ u) = \text{Ker } u \Longleftrightarrow \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$ • Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre. • Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \text{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de $\text{Tr } A$, déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. • $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$. Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}\,(AB) = \text{Tr}\,(BA)$.

1 Généralités sur les espaces vectoriels

1.1 Structure algébrique

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel, d'un morphisme d'espace vectoriel.
Caractérisation de $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k)$ à l'aide des combinaisons linéaires.
Produits, sommes et sommes directes finies de sous-espaces vectoriels. Projecteurs et symétries.
Sous-espaces stables. Polynômes d'endomorphismes : polynôme annulateur, calcul d'inverse et de puissances.

1.2 Familles et bases

Définition des familles libres, familles liées, famille génératrices, bases. Théorème de la base incomplète.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre. Base de $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes interpolateurs de Lagrange.
Morphismes et bases : si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors $u : E \to E'$ est entièrement déterminé par la famille $(u(e_i)_{i \in I})$. Caractérisation des injections, surjections et bijections.

1.3 Dimension finie

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation d'une base.
Base adaptée à une décomposition en somme directe. Caractérisation de $F = F_1 \oplus F_2$.
$\dim \left(\sum_{i=1}^{k} F_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
Rang d'une famille de vecteurs. $\boxed{\textbf{Théorème du rang}}$.
Méthode : Détermination de la base d'un noyau, via la résolution d'un système.

2 Matrices

Matrice d'une application linéaire, rang d'une matrice, produit matriciel, transposition, matrices de passage (matrice de Vandermonde), formule de changement de base, matrices semblables. Matrices triangulaires.
Matrices blocs. Sous-espace stable par un endomorphisme : caractérisation matricielle. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.
Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

3 Déterminants

3.1 d'une matrice

Déterminant d'une matrice, d'un produit de matrice, d'une transposée.
Calculs : opérations sur les colonnes et sur les lignes, déterminant d'une matrice triangulaire blocs, d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une colonne ou une ligne.
Déterminant de Vandermonde.

3.2 d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme u, de $u \circ v$, de u automorphisme.

3.3 de n vecteurs

Déterminant de n vecteurs d'un espace de dimension n dans une base. Caractérisation des bases.