Programme de colle 21

Classe de PC

Semaine du lundi 24 au vendredi 28 mars

Liste des questions de cours
• $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x+y \leqslant 1\right\}$ est convexe dans $\mathbb{R}^2$. • Si $A \subset E$ est convexe, alors $\bar{A}$ est convexe. • Étude des limites en $(0,0)$ de $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. • $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné. • Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A^k)_k$, alors $M = \lim\limits_{k\to+\infty} A^k$ est la matrice d'un projecteur. • Étude des extrema de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Construction

1.1.1 Norme et distance

Norme, distance. Exemple des normes 1, 2 et ∞ usuelles dans $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

1.1.2 Suites

Limite, sous-suites.

1.2 Parties d'un espace vectoriel normé

1.2.1 Topologie

Ouverts : définition, stabilité par union et intersection finie, $\emptyset$, E et les boules ouvertes sont des ouverts. Intérieur $\mathring{A}$ d'une partie A, point intérieur.
Fermés : définition, stabilité par intersection et union finie, E, $\emptyset$ et les boules fermées sont des fermés. Caractérisation séquentielle. Adhérence $\overline{A}$ d'une partie A, point adhérent. Frontière.

1.2.2 Autres parties

Parties bornées : définition, une suite convergente est bornée. Parties convexes : définition, les boules sont des convexes.

1.2.3 Dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie. La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme choisie en dimension finie.
Suites coordonnées associées à une base en dimension finie.

1.3 Fonctions continues

1.3.1 Limite

Définition, opérations algébriques, composition. Caractérisation séquentielle. Continuité en un point.

1.3.2 Continuité sur une partie

Définition, opérations algébriques, composition. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue. Fonctions lipschitziennes.

1.3.3 Dimension finie

Fonctions coordonnées dans une base de l'espace d'arrivée E' : limite, continuité.
Toute fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur une partie fermée bornée en *dimension finie*, est bornée et atteint ses bornes.
Fonctions linéaires, multilinéaires, polynomiales.

2 Fonctions vectorielles

Continuité, dérivabilité : définitions et propriétés. En particulier, tout se ramène à l'étude des composantes.
Dérivées et dérivées k-ième de $L \circ f$, $B(f, g)$ et $M(f_1, \ldots, f_p)$, où L est linéaire, B bilinéaire et M p-linéaire.
Dérivées de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles.

3 Calcul différentiel

3.1 Fonctions $\mathscr{C}^1$

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications $\mathscr{C}^1$, gradient, différentielle.
Formule de Taylor à l'ordre 1. Compositions : règle de la chaîne et changements de variable.
Fonctions constantes sur un ouvert convexe.

3.2 Fonctions $\mathscr{C}^2$

Dérivées partielles d'ordre 2, classe $\mathscr{C}^2$, théorème de Schwarz.
Matrice hessienne $H_f(a)$, formule de Taylor à l'ordre 2.
Recherche d'extrema : points critiques, hessienne, cas de la dimension 2.

Savourez bien cette dernière colle !