

Programme de colle 20

Classe de PC

Semaine du lundi 18 au vendredi 22 mars

Liste des questions de cours

- La boule ouverte $B(0, \rho)$ est ouverte.
- $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\}$ est convexe dans \mathbb{R}^2 .
- Étude des limites en $(0, 0)$ de $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ et $(x, y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$.
- $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A^k)_k$, alors $M = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k$ est la matrice d'un projecteur.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Construction

1.1.1 Norme et distance

Norme, distance. Exemple des normes 1, 2 et ∞ usuelles dans \mathbb{K}^n et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

1.1.2 Suites

Limite, sous-suites.

1.2 Parties d'un espace vectoriel normé

1.2.1 Topologie

Ouverts : définition, stabilité par union et intersection finie, \emptyset , E et les boules ouvertes sont des ouverts.
Intérieur $\overset{\circ}{A}$ d'une partie A , point intérieur.

Fermés : définition, stabilité par intersection et union finie, E , \emptyset et les boules fermées sont des fermés.
Caractérisation séquentielle. Adhérence \overline{A} d'une partie A , point adhérent. Frontière.

1.2.2 Autres parties

Parties bornées : définition, une suite convergente est bornée. Parties convexes : définition, les boules sont des convexes.

1.2.3 Dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie. La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme choisie en dimension finie.

Suites coordonnées associées à une base en dimension finie.

1.3 Fonctions continues

1.3.1 Limite

Définition, opérations algébriques, composition. Caractérisation séquentielle. Continuité en un point.

1.3.2 Continuité sur une partie

Définition, opérations algébriques, composition. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue. Fonctions lipschitziennes.

1.3.3 Dimension finie

Fonctions coordonnées dans une base de l'espace d'arrivée E' : limite, continuité.

Toute fonction à valeurs dans \mathbb{R} , continue sur une partie fermée bornée en *dimension finie*, est bornée et atteint ses bornes.

Fonctions linéaires, multilinéaires, polynomiales.

2 Fonctions vectorielles

Continuité, dérivabilité : définitions et propriétés. En particulier, tout se ramène à l'étude des composantes.

Dérivées et dérivées k -ième de $L \circ f$, $B(f, g)$ et $M(f_1, \dots, f_p)$, où L est linéaire, B bilinéaire et M p -linéaire.

Dérivées de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles.