

Programme de colle 2

Classe de PC

Semaine du lundi 15 au vendredi 19 septembre

Liste des questions de cours

- Expression de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Démonstration du théorème de Cesàro.
- Limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$; équivalent de $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$.
- Les dix DL usuels : famille exponentielle (\exp, \cos, \sin), géométrique ($\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x), \ln(1-x), \operatorname{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.
- Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
- Limite en 0^+ de $x \mapsto \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

1 Révisions de trigonométrie circulaire et hyperbolique

2 Complexes

Révisons PCSI.

3 Combinatoire

- Soit $f : E \rightarrow F$. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F < \infty$, alors f bijective $\iff f$ injective $\iff f$ surjective.
- **Formule du binôme**, $\binom{n}{k}$.
- Manipulation du symbole Sigma : sommes telescopiques et changements d'indices.

4 Suites et séries numériques

4.1 \mathbb{R}

Inégalités triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz (dans \mathbb{R}^n).
Définition de la convergence d'une suite, avec des ε .

4.2 Situations classiques

Suite et série géométrique : limites, expression de $\sum_{k=0}^n q^k$.

Suites croissantes majorée et décroissantes minorées. Sommes de Riemann. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, en particulier le cas f monotone ou f contractante ($\sup_I |f'| < 1$).

4.3 Relations de comparaison

Grand O , petit o , équivalents.

4.4 Séries numériques

Révisions de PCSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.

Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comparaison de séries à termes positifs : \leq , grand O , petit o , équivalent.

Formule de Stirling : équivalent de $n!$.

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.

5 Fonctions d'une variable réelle

5.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle. Fonctions convexes.

« f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

5.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée.

5.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de PCSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand O , petit o , équivalents.

Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;

Les DL des fonctions hyperboliques sh , ch , et de Arcsin doivent pouvoir être retrouvés rapidement.