

# Programme de colle 19

Classe de PC

Semaine du lundi 19 au vendredi 23 février

## Liste des questions de cours

- Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.
- Rayon et somme de  $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n}$ .
- Rayon de  $\sum d_n z^n$ , où  $d_n$  est la  $n$ -ème décimale de  $\pi$ .
- Tableau des lois de probabilités usuelles, avec les fonctions génératrices.
- Rayon et somme des séries entières usuelles : famille exponentielle ( $\exp, \cos, \sin, \text{sh}, \text{ch}$ ), géométrique ( $\frac{1}{1-x}, \ln(1+x), \ln(1-x), \text{Arctan}(x)$ ),  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2 \ln 2 - 1$  (exercice 9).
- (volontariat)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$ .

## 1 Séries entières

### 1.1 Domaine de définition

Lemme d'Abel. Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Comparaison des coefficients ( $\leq, O, o, \sim$ ).

Opérations sur les séries entières, rayon et somme. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$ .

### 1.2 Fonction somme

#### 1.2.1 Variable complexe

Continuité de la somme (admis).

Développement de  $\frac{1}{1-z}$ , exponentielle complexe.

#### 1.2.2 Variable réelle

##### 1.2.2.1 Rappels sur les séries de fonctions

Convergences simple, uniforme et normale.

Théorème de continuité, d'intégration terme à terme. Théorème de dérivation terme à terme.

##### 1.2.2.2 Séries entières

Convergence normale sur tout segment  $[a, b] \subset ]-R, R[$ .

Continuité, primitivation terme à terme, dérivation terme à terme de la fonction somme sur  $] -R, R[$ .

Caractère  $\mathcal{C}^\infty$ . Expression des coefficients.

Unicité du développement en série entière (application : résolution d'équations différentielles).

## 1.3 Fonctions développables en séries entières

### 1.3.1 Définition et structures algébriques

Définition, stabilité par combinaison linéaire et produit.

### 1.3.2 Séries entières usuelles

À connaître impérativement, et à savoir reconnaître, au voisinage de 0 :

$$e^x, \quad \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{sh}(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad (1+x)^\alpha$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Une série entière est inséparable de son rayon de convergence.

Détermination d'un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle.

## 2 Probabilités

Tout le chapitre reste au programme.

### 2.1 Fonctions génératrices

Le rayon de convergence est au moins égal à 1, et  $G_X$  est définie en 1.

Liens entre fonction génératrice et espérance, variance, et loi de la variable aléatoire.

Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Fonctions génératrices des lois usuelles.