

# Programme de colle 14

Classe de PC

Semaine du lundi 15 au vendredi 19 janvier

## Liste des questions de cours

- Un projecteur  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $\forall x \in E \|p(x)\| \leq \|x\|$ .
- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est une symétrie orthogonale si et seulement si  $u$  est une symétrie et une isométrie (avec preuve).
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux (avec preuve).
- Un projecteur  $p$  de  $E$  euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si  $p$  est un endomorphisme autoadjoint (avec preuve).
- Soit  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  si et seulement si il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = A^T A$ .
- Soit  $f \in \mathcal{S}(E)$ . Pour tout  $x \in E$ ,  $\inf(\text{Sp}(f))\|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \sup(\text{Sp}(f))\|x\|^2$

## 1 Algèbre bilinéaire

### 1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.

Théorème de Pythagore.

### 1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.

Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.

Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

### 1.3 Isométries

Définition et valeurs propres réelles possibles d'une isométrie. Groupe  $\mathcal{O}(E)$ . L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.

Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Interprétation comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormée, ou matrice de changement de base orthonormée. Groupes  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $SO_n(\mathbb{R})$ . Orientation, bases directes et indirectes.

Description dans le cas de la dimension 2.

### 1.4 Endomorphismes autoadjoints

#### 1.5 Définition

Définition et matrice (dans une base orthonormée) d'un endomorphisme autoadjoint.

### 1.5.1 Réduction

Théorème spectral : un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée. Version matricielle.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif, caractérisations spectrales. Versions matricielles.