Programme de colle 14

Classe de PC

Semaine du lundi 12 au vendredi 16 janvier

Liste des questions de cours
• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\Big[\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T A Y = 0\Big] \Longrightarrow A = 0$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. $\Big[\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = 0\Big] \Longrightarrow u = 0$. • Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \\|p(x)\\| \leqslant \\|x\\|$. • Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et une isométrie (avec preuve). • Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux (avec preuve). • Un projecteur p de E euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint (avec preuve). • Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$. • Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Pour tout $x \in E$, $\inf(\mathrm{Sp}\,(f))\\|x\\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \sup(\mathrm{Sp}\,(f))\\|x\\|^2$

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

1.3 Isométries

Définition et valeurs propres réelles possibles d'une isométrie. Groupe $\mathscr{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.
Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Interprétation comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormée, ou matrice de changement de base orthonormée. Groupes $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation, bases directes et indirectes.
Description dans le cas de la dimension 2.

1.4 Endomorphismes autoadjoints

1.5 Définition

Définition et matrice (dans une base orthonormée) d'un endomorphisme autoadjoint.

1.5.1 Réduction

Théorème spectral : un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée. Version matricielle.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif, caractérisations spectrales. Versions matricielles.