

Programme de colle 13

Classe de PC

Semaine du lundi 5 au vendredi 9 janvier

Liste des questions de cours

- Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire.
- Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$, où a_0, \dots, a_n sont des réels 2 à 2 distincts, est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).
- Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $[\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, X^T A Y = 0] \implies A = 0$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $[\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle = 0] \implies u = 0$.
- Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \|p(x)\| \leq \|x\|$.
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et une isométrie (avec preuve).

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.

Théorème de Pythagore.

1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.

Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.

Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

1.3 Isométries

Définition et valeurs propres réelles possibles d'une isométrie. Groupe $\mathcal{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.

Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Interprétation comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormée, ou matrice de changement de base orthonormée. Groupes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation, bases directes.

Description dans le cas de la dimension 2.