

Programme de colle 12

Classe de PC

Semaine du lundi 15 au vendredi 19 décembre

Liste des questions de cours

- Énoncer la CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ soit trigonalisable.
- Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.
 $\text{Tr}(A)$ est la somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.
- Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire.
- Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$, où a_0, \dots, a_n sont des réels 2 à 2 distincts, est un produit scalaire. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).
- Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire. Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.

Théorème de Pythagore.

1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.

Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.

Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.