Programme de colle 12

Classe de PC

Semaine du lundi 18 au vendredi 22 décembre

Liste des questions de cours
• Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\mathrm{Tr}\,(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité. • Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire. • Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$, où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels 2 à 2 distincts, est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve). • Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve). • Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\Big[\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T AY = 0\Big] \Longrightarrow A = 0$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. $\Big[\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = 0\Big] \Longrightarrow u = 0$.

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.