Programme de colle 10

Classe de PC

Semaine du lundi 1er au vendredi 5 décembre

Liste des questions de cours
• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de Tr A, déterminer Ker f et Im f. • det $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$. Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. • Déterminant de Vandermonde (valeur et preuve). • Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable (définition et 2 théorèmes). • Énoncer la CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit trigonalisable.

1 Matrices

Matrice d'une application linéaire, rang d'une matrice, produit matriciel, transposition, matrices de passage (matrice de Vandermonde), formule de changement de base, matrices semblables. Matrices triangulaires.
Matrices blocs. Sous-espace stable par un endomorphisme : caractérisation matricielle. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.
Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

2 Déterminants

2.1 d'une matrice

Déterminant d'une matrice, d'un produit de matrice, d'une transposée.
Calculs : opérations sur les colonnes et sur les lignes, déterminant d'une matrice triangulaire blocs, d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une colonne ou une ligne.
Déterminant de Vandermonde.

2.2 d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme u, de $u \circ v$, de u automorphisme.

2.3 de n vecteurs

Déterminant de n vecteurs d'un espace de dimension n dans une base. Caractérisation des bases.

3 Réduction

3.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

3.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre. Théorème de Cayley-Hamilton.
CNS de diagonalisation (4 propositions, y compris la définition). u diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
CS de diagonalisation : cas de $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.
CNS de trigonalisation. Cas complexe.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).

3.3 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.