

Point méthode : étude d'une suite de fonctions (f_n) , où $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$.

Convergence simple : Fixer $x \in I$, regarder la limite de la suite numérique $(f_n(x))$.

Remarques : Au besoin distinguer des cas.

Exemples : tous, 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3.

Convergence uniforme :

- Après la convergence simple – pour avoir f .
- Fixer $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|f_n - f\|_\infty$. Pour calculer $\|f_n - f\|_\infty$, faire un tableau de variations (de $f_n - f$ ou de $|f_n - f|$, le plus simple).
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ (où $(\|f_n - f\|_\infty)$ est une suite numérique).

Remarques : On peut aussi utiliser le théorème de continuité, par l'absurde.

Est-ce que la suite de l'exemple 1.1 peut converger uniformément ? Bien le rédiger par l'absurde : supposons que la suite converge uniformément, (appliquer proprement le théorème de continuité) or (expliciter le fait que f n'est pas continue) donc c'est absurde : la suite ne converge pas uniformément.

Exemples : 1.* ne converge pas uniformément, 2.1 et 2.3 convergent uniformément sur I , 2.2 converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, mais pas sur I .

- 1) 1. Appliquer la méthode ci-dessus : convergence simple ($x = 1$ se traite à part), puis tableau de variation à n fixé, puis limite.
 2. Idem, mais pour la convergence uniforme raisonner par l'absurde.
 3. La non convergence uniforme apparaît dès le calcul de $\|f_n - f\|_\infty$. On peut aussi regarder la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1]$ fixé.
 4. Tableau de variation, et le réutiliser pour la convergence uniforme sur $[-a, a]$: placer $-a$ et a . On constate que le $\sup_{[-a, a]} |f_n - f|$ peut être atteint en $x = 0$ ou $x \in \{-a, a\}$, selon les valeurs de a .
 Donc, en prenant ¹ $a > 2$, le sup est atteint au bord et vaut $\frac{1 - a^2}{n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, etc.
 5. Pas besoin de tableau de variations pour conclure pour la convergence uniforme. Pour le signe de $(f_n - f)'$, penser à la majoration de convexité ² $\ln(1 + t) \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
 6. Majorer pour se débarrasser du sinus (classique), puis étudier g_n que l'on vient de trouver : $\|g_n\|_\infty$?
 Si $|f| \leq |g|$ sont deux fonctions bornées, alors $|f| \leq |g| \leq \|g\|_\infty$ puis $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.
- 2) 1. Convergence simple (à vue), puis convergence uniforme, dans chacun des cas. Morale : la convergence uniforme n'est pas stable par produit. 2. Commencer par vérifier que toutes les fonctions sont bornées à partir d'un certain rang, pour pouvoir écrire des normes infinies sereinement.
- 3) Adapter 2) ci-dessus.
- 4) 1.6 : $|f| \leq |g|$ entraîne $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.
- 5) 1. Regarder ce qui se passe en $+\infty$: limite, via un équivalent. 2. Penser +1 – 1.3. Utiliser ce qui précède.
- 6) 1. À $x \in [0, 1]$ fixé, c'est une étude de suite récurrente. La bonne piste est $(f_n(x))$ croissante majorée, et, en cherchant un peu, il faut montrer $0 \leq f_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.
- 7) 1. Classique : convergence simple, puis $\|f_n - f\|_\infty$ via un tableau de variations.
 2. Classique : f_n est continue sur $[0, +\infty[$, l'étude en $+\infty$ se fait via $x^2 f_n(x)$ etc.
 3. À $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, I_n se calcule. Le théorème d'inversion ne s'applique pas car l'intégrale n'est pas sur un segment : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$.

1. Certes, $a \geq \sqrt{2}$ suffit, mais pas besoin de raffiner ici.

2. Qui se montre aussi, pour $t \in [0, 1]$, via la série alternée $\ln(1 + t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n}$.

4. 3. Trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $(f'_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'ait pas de limite. Et les x tels qu'il y ait convergence simple sont juste les $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc se restreindre à un segment d'une forme ou d'une autre ne sert à rien.
- 8) Rectifier la suite (Q_n) donnée par le théorème de Weierstrass : faire simple.
- 9) Par approximation uniforme.
- 10) Les intervalles d'intégration ne sont pas des segments : théorème de convergence dominée.