Exercices : Réduction

1 En dimension quelconque

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et $g \in \mathscr{L}(E)$.

1) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$ avec $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f \circ g)$.

2) Cas $\lambda = 0$: Montrer que le résultat précédent pour $\lambda = 0$ est vrai en dimension finie mais faux en général en dimension quelconque. Indication : *Regarder, sur $E = \mathbb{K}[X]$, la dérivation et une primitivation.*

Exercice 2
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ inversible, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}\,(u)$.

2) Établir : $\mathrm{Sp}\,(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)\}$.

Exercice 3
Soient $E = \ell^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles bornées et $\Delta : E \to E$ l'endomorphisme défini par

$$\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

Exercice 4
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite nulle en $\pm\infty$.
Soit u définie sur E par $u(f)(x) = f(2x)$.
Montrer que u est un endomorphisme, puis que u n'a pas de valeurs propres.
Indication : *si $u(f) = \lambda f$, regarder $u^n(f)(x)$.*

Exercice 5
Notons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$. Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

2 En dimension finie

Exercice 6
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres (on vérifiera ses calculs à l'aide de la trace) et les sous-espaces propres de f.

2) Donner une base $\mathscr{B}'$ de vecteurs propres, la matrice D de f dans cette base, et la matrice de changement de base P. Donner la formule liant M, P et D.

3) Déterminer la matrice de f^k dans la base $\mathscr{B}'$ puis dans la base canonique.

Exercice 7
Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable : Calculer le polynôme caractéristique et donner une matrice diagonale semblable à M *sans calculer les sous-espaces propres.*

Exercice 8
Calculer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres des matrices suivantes et diagonaliser, lorsque c'est possible, ces matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}), \quad B_6 = aA_6^2 + bA_6 + cI_3, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9
On définit l'application Φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \qquad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$. Calculer la trace de Φ.

3) L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 10 (Polynôme caractéristique)
Deux résultats sur le polynôme caractéristique.

1) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

2) Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On note $P = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ A & I_n \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ 0_n & AB \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible.

b) Montrer que $MP = PN$.

c) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 11
Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ et f définie sur $\mathbb{K}_{2n}[X]$ par $f(P)(X) = (X - a)(X - b)P'(X) - (2nX - n(a + b) + c)P(X)$. Montrer que f est un endomorphisme, dont on déterminera les éléments propres (vecteurs propres et valeurs propres).

Exercice 12
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel fixé. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, α, $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha \neq \beta$ et

$$f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta \,\mathrm{id}_E = 0$$

1) Montrer que f est diagonalisable. Déterminer les spectres possibles de f.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha \,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(f - \beta \,\mathrm{id}_E)$.

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1) Montrer qu'il existe X et Y des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ tels que $M = XY^T$.

2) Déterminer $\mathrm{Tr}\, M$ en fonction de X et Y.

3) Calculer M^2 en fonction de M.

4) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 14
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ inversible.
Montrer que u^2 diagonalisable entraîne u diagonalisable.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour avoir l'implication lorsque u n'est pas inversible.

Exercice 15
Déterminer les polynômes caractéristiques des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Indication : *Pour J, cherchez le polynôme minimal. Pour A, développez par rapport à la « plus mauvaise » colonne – en déduire que tout polynome unitaire est un χ_A pour une matrice A à préciser.*

Exercice 16
Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les matrices A_f et A_g sont diagonalisables.

2) Vérifier que les endomorphismes f et g commutent.

3) Déterminer tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1. Vérifier que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de g.

4) Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1. Vérifier que ce sous-espace est stable par g.

5) Construire une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de diagonalisation commune à f et g.

6) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ qui commutent. Montrer que, si f et g sont diagonalisables (resp. trigonalisable), ils le sont dans une même base.

Exercice 17
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

1) Diagonaliser A, donner la matrice de passage et son inverse.

2) Déterminer toutes les matrices M' telles que $M'^2 = D$, où D est la matrice diagonale obtenue en 1.

3) En déduire toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 18
Montrer qu'une somme (puis un produit) de matrices diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable. On pourra chercher des matrices 2×2 triangulaires.

Exercice 19
Montrer que M et $M^\top$ ont mêmes valeurs propres.

Exercice 20
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B}$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et H un hyperplan.

1) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^\star \mid u(H) = \{0\}\}$. (Indication : *regarder* Ker u)

2) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ alors H est stable par f si, et seulement si, $u \circ f$ est colinéaire à u.

3) E est désormais de dimension finie n. Soient A et L les matrices dans $\mathscr{B}$ de f et u.
Montrer que H est stable par f si, et seulement si, $L^\top$ est vecteur propre de $A^\top$

4) Déterminer les plans stables par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 21
Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = M^\top$. Valeurs propres (Indication : *calculer* φ^2), sous-espaces propres. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Trace de φ. Quelle est la nature géométrique de φ ?

Exercice 22
Posons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in E$ et $u_A : M \mapsto MA$ défini sur E.

1) Montrer que u_A est un endomorphisme.

2) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si u_A est diagonalisable.

3) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Montrer que $\dim E_\lambda(u_A) = n \dim E_\lambda(A)$

Exercice 23
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 2A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{Tr}\ A \in \mathbb{Z}$.

Exercice 24
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(A)$ est pair.
Indication : *On pourra étudier la multiplicité des valeurs propres, puis la dimension des sous-espaces propres.*

Exercice 25
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) On note e_1' un vecteur propre pour la plus grande des deux valeurs propres, et e_2' un vecteur propre pour l'autre valeur propre. Vérifier que $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3)$ est une base de E. Donner la matrice T de l'application f dans la base $\mathscr{B}'$,

3) Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^{-1}, puis T^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

4) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 26
Soit S le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_{n+1} & = & 2x_n & - & y_n & + & z_n \\ y_{n+1} & = & & & y_n & + & z_n \\ z_{n+1} & = & -x_n & + & y_n & + & z_n \end{array} \right.$ avec $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixés

1) Écrire le système sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$. Exprimer X_n en fonction de A, de X_0 et de n.

2) À l'aide des résultats de l'exercice 26, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n.

Exercice 27
Soit $\mathscr{E}$ le système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x' & = & 2x & - & y & + & z \\ y' & = & & & y & + & z \\ z' & = & -x & + & y & + & z \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} x(0) & = & -1 \\ y(0) & = & 2 \\ z(0) & = & 0 \end{array}$$

1) Écrire le système sous forme matricielle $X' = AX$ et, à l'aide des résultats de l'exercice 26 réduire A.

2) Dans la nouvelle base, résoudre le système d'équations différentielles $X_1' = TX_1$.

3) En déduire les solutions X de $\mathscr{E}$ à l'aide de la matrice de passage.

4) Même exercice avec le système $X' = AX + B(t)$ où $B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$.

Exercice 28
Réduire les matrices de l'exercice 8 non diagonalisables.