

Exercice 1 (Oral – d’après Centrale)

Pour tout entier n on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$.

- 1) Montrer que (u_n) est décroissante. Est-elle convergente ?
- 2) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Déterminer un équivalent de u_n .

Nous verrons, au chapitre « Suites et séries de fonctions », des techniques d’étude de la limite pour cette catégorie de suites.

Exercice 2

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu’il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 3 (Formule de la moyenne – révisions)

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec $g \geq 0$.

Montrer qu’il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = f(c) \int_a^b g(t) \, dt$$

Exercice 4

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$.

Exercice 5 (Théorème de relèvement)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{U})$, et $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(x) = ib + \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

- 1) Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- 2) Soit $h : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x) \exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h .
- 3) Montrer qu’il existe une fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 6

On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t} \, dt$.

Déterminer le domaine de définition, prolonger en 0, la dérivabilité, la dérivée, les variations puis la limite en $+\infty$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_1^x e^{-(xt)^2} \frac{dt}{t}$. Montrer que f est dérivable et calculer f' .

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \textbf{1)} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t^3} \, dt & \textbf{2)} \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{t - 1}{(\ln t)^2} \, dt & \textbf{3)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} \, dt \end{array}$$

Indication : *Penser aux DL.*

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$.

- 1) On suppose qu’il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(t) \, dt = K$. Montrer que f est T -périodique.
- 2) Montrer la réciproque.
- 3) On suppose que f est T -périodique et d’intégrale nulle sur une période. Montrer que F , une primitive de f , est T -périodique. Est-ce toujours vrai en supposant seulement f périodique ?

Exercice 10 (Théorème de Riemann-Lebesgue)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

- 1) Montrer que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ist} dt = 0$.
- 2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, T -périodique, d'intégrale nulle sur une période.
Montrer que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(st) dt = 0$.
- 3) On ne suppose plus que φ est d'intégrale nulle. Dédurre de la question précédente que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(st) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt \int_a^b f(t) dt$$

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable puis calculer la dérivée.

Exercice 12

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f'(x) \in [0, 1]$ pour tout x , et $f(a) = 0$. On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_a^x f^3(t) dt - \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2$$

- 1) Déterminer les variations de F .
- 2) Montrer que $\int_a^b f^3(t) dt \leq \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2$.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

- 1) Pour tout $x > 0$ montrer que $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$ (Indication : faire un dessin).
- 2) En déduire que $\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$, l'égalité se produisant si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 14 (Primitives)

Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur des intervalles que l'on précisera :

- | | | | |
|------------------------|--------------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| 1) $\frac{1}{ix-1}$ | 2) $\frac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$ | 3) $\frac{1}{t(\ln t)^2}$ | 4) $\frac{\cos x}{\sin(x)+1}$ |
| 5) $\cos^2 x \sin^4 x$ | 6) $x^2 e^{-3x}$ | 7) $(x^2+x+1) \cos(2x)$ | 8) $x \operatorname{Arctan} x$ |

Exercice 15 (Cours)

Nature des intégrales :

- | | | | |
|--|---|--|------------------------|
| 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; | 2) $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dt$ où $\beta \in \mathbb{R}$ | 3) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; | 4) $\int_0^1 \ln t dt$ |
|--|---|--|------------------------|

Exercice 16 (un exemple)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = 0$ sauf sur les intervalles de la forme $\left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n} \right]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) où la courbe $\mathcal{C}_f$ forme un triangle de hauteur 1.

- 1) a) Faire un dessin du graphe de f entre 0 et 3, puis au voisinage de $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Est-ce que f a une limite en $+\infty$?

Rappel : si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors pour toute suite (x_n) de limite a , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

- 2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt$.

b) Soit $X \in \mathbb{R}$. En posant $n = \lfloor X \rfloor$, encadrer $\int_0^X f(t) dt$.

c) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

3) Construire sur ce modèle une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, non bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que les intégrales sur $\mathbb{R}_+$ de f et de f' convergent. Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 18

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3 + 5t^2 + 1}{2t^4 + 2t^3 + t^2 + 1} dt$

2) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$

Exercice 19 (Intégrales de Bertrand)

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

1) On suppose $\alpha \neq 1$. Étudier la nature de l'intégrale.

2) Étudier le cas $\alpha = 1$. Conclure.

3) Déduire du cas $\alpha = 1$ la nature de $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de β .

4) Déduire de l'étude précédente la nature de $\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} dt$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 20

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t) + e^t} dt$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} dt$

3) $\int_0^1 \frac{1 - t^2}{1 - \sqrt{t}} dt$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t} dt$

Exercice 21

Les fonctions suivantes sont-elles intégrables, sur l'intervalle précisé ?

1) $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^2 - 4}}$ sur $]2, +\infty[$ (CCINP)

2) $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1 + t^{2a}}}$ sur $]0, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ (CCINP)

3) $t \mapsto \ln \left(\cos \frac{1}{t} \right)$ sur $] \frac{2}{\pi}, +\infty[$

4) $t \mapsto t^n e^{-zt}$ sur $]0, +\infty[$, où $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt$

2) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$

3) $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

4) $I_{p,q} = \int_0^1 t^p \ln^q t dt$ où $p, q \in \mathbb{N}$.

Exercice 23

Étudier la convergence absolue et la convergence des intégrales suivantes :

1) $\int_\pi^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{x^2} \right) e^{i(x^2)} dx$

2) $\int_0^{+\infty} t \sin(t^4) dt$

Indication : Pour le 1), calculer une primitive. Pour le 2), cf 24

Exercice 24 (Intégrale de Dirichlet)

On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

- 1) Montrer que l'intégrale I converge. On pourra s'aider d'une intégration par parties.
- 2) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Indication : Prouver $|\sin t| \geq \sin^2 t$.
- 3) En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt$$

déterminer le signe de I .

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

Démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$ converge.

Exercice 27

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

- 1) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente.
- 2) On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$ est divergente.

Exercice 28

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ existe et vaut ℓ .

Exercice 29

Donner un équivalent des fonctions suivantes lorsque $x \rightarrow a$ précisé :

$$1) \int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1} \text{ en } 0^+ \qquad 2) \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ en } +\infty$$

Exercice 30

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive, telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que $f(x) = o_{+\infty}(1/x)$.

Exercice 31 (D'après Mines Ponts)

Justifier l'existence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt dx$.