Exercices : Espaces vectoriels normés

1 Normes

Exercice 1 (Normes : $\mathbb{K}^n$)
Soit $E = \mathbb{K}^n$.Notons

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

1) Montrer que ce sont des normes.

2) Montrer que, pour tout $x \in E$,

a) $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$ **b)** $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$ **c)** $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$

Exercice 2 (Normes : Matrices)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Définir des normes 1, 2 et ∞ sur E.

2) Pour $A = (a_{i,j}) \in E$, on pose $\|A\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

Exercice 3 (Normes : Espace de fonctions)
Soit $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, avec $a < b$ deux réels.

1) Construire des normes 1 et ∞. Rappeler une norme 2 sur E.

2) Montrer que ce sont des normes. Sur le modèle de l'exercice 1, donner des relations entre elles.

3) Soit $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{K})$ et $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\|.\|_1$ et diverge pour $\|.\|_\infty$.Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 (Convexité)
Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont convexes.

1) Les sphères de rayon $r > 0$ dans un espace vectoriel normé E.

2) $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leqslant 1\right\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

3) L'ensemble des matrices bistochastiques dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} \geqslant 0; \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1; \qquad \forall j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

4) Soit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, I_k un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $I_1 \times \cdots \times I_n$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

2 Suites

Exercice 5
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, la matrice $M_k = M - \dfrac{1}{k} I_n$ est inversible. Vers quelle matrice converge la suite $(M_k)_{k\geq 1}$?

Exercice 6
Pour $M \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\|M\|_\infty = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} |m_{i,j}|$.

1) Montrer que pour $M \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, on a $\|MN\|_\infty \leqslant q\|M\|_\infty\|N\|_\infty$.

2) Soit $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) une matrice ayant une valeur propre λ telle que $|\lambda| > 1$. Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \|M^n\|_\infty$. Conclusion ?

3) Soit $N \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) telle que $N^p = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbb{C})}$ et $N^{p-1} \neq 0_{\mathscr{M}_d(\mathbb{C})}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$. Montrer que la suite matricielle $\left(\left(\lambda I_d + N\right)^n\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0_d.

Exercice 7
Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Le but de cet exercice est de construire une norme N telle que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}[X]$, tende vers $P \in E$ arbitraire.

1) Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$. On pose $N(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|a_n|}{n+1}$.
Montrer que N est bien définie et est une norme sur E. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} X^n$ pour N.

2) Avec les notations précédentes, on pose $N(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)|a_n|$. Mêmes questions.

3) Soit $P \in E$ fixé non nul et $d = \deg P$. Montrer que $(1, X, \dots, X^d, X^{d+1} - P, \dots, X^n - P, \dots)$ est une base de E. En déduire une norme $\|.\|$ telle que la suite $(X^n)_n$ converge vers P pour cette norme.

Exercice 8
Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{K}_d[X]$ et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $(P_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite qui, en tant que suite de fonctions (polynomiales associées) converge simplement sur $[a, b]$. Montrer que (P_n) converge uniformément vers une fonction polynomiale. Indication : *Penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange.*

Exercice 9
On considère, dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite (X_n) définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \text{ avec } X_0 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ quelconque, et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{1}{6}w_n + \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{6}v_n + \dfrac{1}{3}w_n \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}v_n + \dfrac{1}{6}w_n - \dfrac{7}{6} \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (X_n) vérifie une relation matricielle de la forme $X_{n+1} = AX_n + B$.

2) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a : $\|AX\|_\infty \leqslant k\|X\|_\infty$ où k est un réel de $]0; 1[$.

3) Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution $L \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4) En déduire que la suite (X_n) est convergente, de limite L.

Exercice 10 (Suites de matrices)
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. À l'aide de la norme définie à l'exercice 2, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(AB)^n = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(BA)^n = 0$.

Exercice 11 (Suites de matrices)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable telle que $\mathrm{Sp}\,(A) \subset]-1, 1[$. Montrer que $(A^n)_n$ converge vers 0.

Exercice 12 (Suites de matrices)
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $E_q = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^q = I_n\}$.

1) Déterminer A si $\mathrm{Sp}\,(A) = \{1\}$.

2) Montrer que I_n est isolée dans E_q : $I_n \notin \overline{E_q \setminus \{I_n\}}$.

Exercice 13 (Distance)
Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$, muni de $\|.\|_\infty$.

1) Soit e la suite constante égale à 1 et F l'ensemble des suites convergente vers 0. Calculer $d(e, F) = \inf\limits_{y\in F} \|e - y\|_\infty$.

2) Soit $e = ((-1)^n)$ et F l'ensemble des suites convergente. Calculer $d(e, F)$.

3 Parties : ouverts, fermés, densité

Exercice 14 (Quelques résultats généraux : ouverts)
Soit E muni de $\|.\|$ un espace vectoriel normé.

1) Soient A et B deux parties de E. Montrer $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\mathring{F} \neq \emptyset \Longrightarrow F = E$.

Exercice 15 (Quelques résultats généraux : fermés)
Soit E muni de $\|.\|$ un espace vectoriel normé.

1) Soient A et B deux parties (non vide pour la question sur le produit) de E. Montrer

$$A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$$

Montrer que

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Pour l'intersection, montrer à l'aide d'un exemple simple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.

3) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que F est fermé.
Indication : *Commencer par le cas où E est de dimension finie, puis considérer $F + \mathrm{Vect}\,(\ell)$.*

4) Soit A une partie non vide de E, et $x \in E$. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

5) Soit $(u_u) \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérences est $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{u_n \mid n \geqslant p\}}$.

Exercice 16 (Convexité)
Soit A une partie convexe de $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé. Montrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.
Indication : *Pour $\overline{A}$, utiliser la caractérisation séquentielle. Pour $\mathring{A}$, faire un dessin avec $r = \min(r_a, r_b)$.*

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 (Espace de fonctions)
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de $\|.\|_\infty$.

1) Est-ce que $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0\}$ est fermé ?

2) Montrer que $G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0\}$ n'est pas ouvert.

3) Soit $\varphi \in E$. On pose, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\varphi = \|\varphi f\|_\infty$. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur φ pour que $\|.\|_\varphi$ soit une norme, puis une norme équivalente à $\|.\|_\infty$.

Exercice 19 (Espace de fonctions)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(1) = 1\}$.

1) L'espace E est muni de $\|.\|_\infty$. F est-il fermé ?

2) Même question en munissant E de $\|.\|_1$.
En déduire une autre preuve que ces deux normes ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 20 (Densité)
Soit $E = \ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$, muni de $\|.\|_1$.
Soit F l'ensemble des suites à support fini : $u = (u_n) \in F \iff \exists n \in \mathbb{N}, \forall k > n, u_k = 0$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que F est dense dans E. En déduire que F n'est pas fermé.

Exercice 21 (Densité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (Indication : *exercice 5*).

Exercice 22 (Densité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.