

Devoir de Mathématiques numéro 1.5

Correction

Exercice 1

La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. La suite des sommes de Riemann $(S_n(f))$ converge donc vers

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

1) Application

a) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n) + 1} \\ &= S_n(h) \quad \text{où} \quad \forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Donc, d'après le résultat sur les sommes de Riemann ci-dessus, (u_n) converge vers $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} &= [\ln |1+x|]_0^1 \\ &= \ln 2 - 0. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$(u_n) \text{ converge vers } \ln 2.$$

b) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} v_n + \frac{1}{2}u_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \\ &= \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{1}{2k'+1+2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n} && \text{en posant } k = k' + n \\ &&& \text{dans la première somme} \\ &= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} \\ &= \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} \\ &= u_{2n}, \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}.$$

Cherchez au brouillon en écrivant les sommes avec des pointillées : vous comprendrez forcément comment fonctionne le calcul.

- c) La relation de la question précédente nous dit que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n$.
 Or la suite (u_{2n}) est extraite de (u_n) , elle converge donc aussi, vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$.
 Donc (v_n) converge, comme combinaison linéaire de suites convergentes, et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

- a) La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, donc $\mathcal{C}^3$, donc $f^{(3)}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.
 D'après le théorème des bornes atteintes, $f^{(3)}$ est bornée et atteint ses bornes sur $[0, 1]$. Par conséquent,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0; 1], \quad |f^{(3)}(x)| \leq M.$$

- b) i) La fonction f est $\mathcal{C}^3$ sur $I = \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$. Comme $\sup_I |f^{(3)}|$ d'après la question précédente, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 s'écrit

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \quad \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3$$

- ii) En dérivant $t \mapsto \frac{1}{q+1} \left(t - \frac{k}{n}\right)^{q+1}$, on constate que

$$\text{La primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } t \mapsto \left(t - \frac{k}{n}\right)^q \text{ qui s'annule en } \frac{k}{n} \text{ est } t \mapsto \frac{1}{q+1} \left(t - \frac{k}{n}\right)^{q+1}$$

Avant de vous convaincre que vous ne savez pas faire, essayez. Quelque chose de plausible : du X^{q+1} .

- iii) On a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \right| \\ & \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \\ & \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 dt \end{aligned} \quad \text{d'après 2)b)i)}$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 dt &= \frac{M}{6} \left[\frac{1}{4} \left(t - \frac{k}{n}\right)^4 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ &= \frac{M}{24n^4} \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \right| \leq \frac{M}{24n^4}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \\
&= \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} 1 dt - f'\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k}{n}\right) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} f''\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 dt \\
&= \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - f\left(\frac{k}{n}\right) \left[t \right]_{k/n}^{(k+1)/n} - f'\left(\frac{k}{n}\right) \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\
&\quad - \frac{1}{2} f''\left(\frac{k}{n}\right) \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\
&= \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} - f'\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{2n^2} - f''\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{6n^3},
\end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{24n^4}.$$

c) On a

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 f(t) dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{M}{24n^3} \quad \text{d'après b).}
\end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

d) D'après la question précédente,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{M}{24n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$$

Par définition de ε_n , il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}$$

e) Si l'on applique le résultat de la question précédente à la fonction f' , ce qui est licite puisque f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$, on obtient

$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') - \frac{1}{6n^2} S_n(f''') + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la suite $(S_n(f'''))$ est bornée puisqu'elle converge d'après le résultat rappelé en préliminaire, donc

$$\frac{1}{6n^2} S_n(f''') = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui donne

$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La fonction f'' étant continue, le théorème sur les sommes de Riemann dit que

$$S_n(f'') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f''(t) dt,$$

ce que l'on peut écrire

$$S_n(f'') = \int_0^1 f''(t) dt + o(1)$$

Ainsi, il existe deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n} \quad \text{et} \quad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t) dt + \varepsilon''_n}$$

f) En combinant les trois derniers résultats, on obtient

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \left(\int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \left(\int_0^1 f''(t) dt + o(1) \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, en particulier, il existe une suite (δ_n) de limite nulle telle que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + \frac{\delta_n}{n^2}.$$

3) Application

a) Nous avons déjà signalé que

$$u_n = S_n(h) \quad \text{où} \quad \forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \frac{1}{1+x}.$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction h , on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 h(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 h'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 h''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2n} [h(t)]_0^1 + \frac{1}{12n^2} [h'(t)]_0^1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= [\ln |1+t|]_0^1 - \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{1+t} \right]_0^1 + \frac{1}{12n^2} \left[-\frac{1}{(1+t)^2} \right]_0^1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) On en déduit immédiatement que

$$u_n - \ln 2 = \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc

$$\boxed{u_n - \ln 2 \sim \frac{1}{4n}.$$

c) Pour tout $n \geq 1$, les résultats des questions 1. c) et 3. b) donnent

$$\begin{aligned} v_n &= u_{2n} - \frac{1}{2}u_n = \ln 2 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{64n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$v_n - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{64n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui donne

$$\boxed{v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}.$$