

Devoir de Mathématiques numéro 1.5

Un sujet moins abstrait que le devoir 1.

Exercice 1

Pour toute fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))$? (*Aucune démonstration n'est attendue.*)

1) Application

Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$

et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

a) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}$.

c) Démontrer alors que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2} \ln 2$.

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0; 1]$, à valeurs réelles.

a) Justifier l'existence d'un nombre réel M tel que $\forall x \in [0; 1]$, $|f^{(3)}(x)| \leq M$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

i) À l'aide d'une formule de Taylor, démontrer que

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \quad \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3$$

ii) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \left(t - \frac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\frac{k}{n}$?

iii) Par intégration entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, démontrer que

$$\left|\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{24n^4}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant les inégalités obtenues à la question 2) b) iii, démontrer que

$$\left|\left(\int_0^1 f(t) dt\right) - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

d) Définissons la suite (ε_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varepsilon_n = n^2 \left(S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t) dt \right).$$

Démontrer que la suite (ε_n) converge vers 0 et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

e) Justifier l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t) dt + \varepsilon''_n.$$

f) En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + \frac{\delta_n}{n^2}.$$

Nous venons ainsi de démontrer que

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3) Application

Les suites (u_n) et (v_n) ont été définies à la question 1.

a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

b) En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que $v_n - \frac{1}{2} \ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}$