

Devoir de Mathématiques numéro 1.1

Correction

Exercice 1 (d'après Centrale MP 2025, ep1, Partie A) I - Calculs préliminaires

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1) a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, donc

$$\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{2n+1-n} = \binom{2n+1}{n+1}$$

b) La formule du binôme nous donne,

$$(1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 1^k 1^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket$, $\binom{2n+1}{k} \geq 0$.

En ne gardant que les termes $k = n$ et $k = n+1$, il vient

$$2^{2n+1} = 2 \times 4^n \geq \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = 2 \binom{2n+1}{n}$$

D'où

$$\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$$

c) Comme $\llbracket n+2, 2n+1 \rrbracket \cap \mathcal{P} \subset \llbracket n+2, 2n+1 \rrbracket$, il vient

$$a = \left(\prod_{p \in \llbracket n+2, 2n+1 \rrbracket \cap \mathcal{P}} p \right) \mid \left(\prod_{k \in \llbracket n+2, 2n+1 \rrbracket} k \right) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!}$$

d) Nous avons montré que $a \mid n! \binom{2n+1}{n}$. Si $a \wedge n! = 1$, alors le lemme de Gauss nous donne $a \mid \binom{2n+1}{n}$.

Pour $p \in \llbracket n+2, 2n+1 \rrbracket \cap \mathcal{P}$, $v_p(n!) = 0$ car $p > n$. Donc

$$a \wedge n! = 1$$

Or, comme $\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = n! \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = n! \binom{2n+1}{n}$, la question précédente s'écrit

$$a \mid n! \binom{2n+1}{n}$$

Or $a \wedge n! = 1$, donc le lemme de Gauss nous donne

$$a \mid \binom{2n+1}{n}$$

Ce qui entraine en particulier $a \leq \binom{2n+1}{n}$. Finalement, avec 1b,

$$\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2n+1}{n} \leq 4^n$$

2) C'est une récurrence forte. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \prod_{p \in \llbracket 1, k \rrbracket \cap \mathcal{P}} p < 4^k$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1$: 1 n'est pas premier donc $\{1\} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, or $\prod_{p \in \emptyset} p = 1$, (produit vide¹). D'où $\mathcal{H}_1$:

$$1 = \prod_{p \in \llbracket 1, 1 \rrbracket \cap \mathcal{P}} p < 4^1 = 4$$

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Montrons que $\prod_{p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \cap \mathcal{P}} p < 4^{n+1}$.

- Si $n = 2m$ pair, avec $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \prod_{p \in \llbracket 1, 2m+1 \rrbracket \cap \mathcal{P}} p &= \prod_{p \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket \cap \mathcal{P}} p \times \prod_{p \in \llbracket m+2, 2m+1 \rrbracket \cap \mathcal{P}} p \\ &< 4^{m+1} \times 4^m = 4^{2m+1} = 4^{n+1} \quad \text{D'après } \mathcal{H}_{m+1} \text{ et 1)} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie dans le cas n pair.

- Si $n = 2m+1$ impair, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Alors $n+1 = 2(m+1)$ n'est pas premier, donc

$$\mathcal{P} \cap \llbracket 1, 2m+2 \rrbracket = \mathcal{P} \cap \llbracket 1, 2m+1 \rrbracket$$

Donc

$$\prod_{p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \cap \mathcal{P}} p = \prod_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket \cap \mathcal{P}} p < 4^n < 4^{n+1}$$

Et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie aussi dans le cas n impair.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n$$

3) Soit $x \in [1, +\infty[$, et $n = \lfloor x \rfloor$. D'après 2, et par croissance de la partie entière,

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n < 4^x$$

De plus, $[1, x] \cap \mathcal{P} = \llbracket 1, n \rrbracket \cap \mathcal{P}$ car $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x$$

1. Si I_1 et I_2 sont deux ensembles finis *disjoints* et $(a_i)_{i \in I_1 \cup I_2}$ une famille dans un anneau commutatif, on veut avoir $\prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \prod_{i \in I_1} a_i \prod_{i \in I_2} a_i$. Dans le cas où $I_2 = \emptyset$ et $\prod_{i \in I_1} a_i$ inversible, on en déduit $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \frac{n!}{k!} &= \prod_{i=k+1}^n i \\
 &= \prod_{i=1}^{n-k} (k+i) \\
 &\leq \prod_{i=1}^{n-k} (n+i) && \text{Car } k \leq n \\
 &\leq \prod_{i=n+1}^{2n-k} i \\
 &\leq \frac{(2n-k)!}{n!}
 \end{aligned}$$

Comment avoir l'idée ? En commençant par écrire ce que l'on veut : $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$, puis avec des factorielles, et on réécrit la fraction de façon plausible : $\frac{1}{k!(2n-k)!} \leq \frac{1}{n!n!}$ semble moins facile que $\frac{n!}{(2n-k)!} \leq \frac{k!}{n!}$. Puis on continue à regarder les deux cotés, avec des pointillés. Et finalement on rédige avec des produits et des changements d'indices.

$$\text{D'où } \binom{2n}{k} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \leq \frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n}.$$

Pour $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, on applique le résultat précédent à $n-k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} \leq \binom{2n}{n}$.

Finalement, les coefficients binomiaux étant positifs,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad 0 \leq \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule du binôme s'écrit

$$\begin{aligned}
 2^{2n} &= (1+1)^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \\
 &> \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} && \text{Car } n > 0 : \binom{2n}{n} \neq \binom{2n}{0} \\
 &> \binom{2n}{n} && \text{Car } \binom{2n}{k} \geq 0 \text{ pour } k \neq n
 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après 4a,

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad 0 \leq \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

Comme $n > 0$, on peut isoler $k=0$ et $k=2n$:

$$\begin{aligned}
 2^{2n} &= 1 + \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} \right) + 1 \\
 &\leq 1 + (2n-1) \binom{2n}{n} + 1
 \end{aligned}$$

Or (ne jamais perdre de vue le but : on veut $2n \binom{2n}{n}$, donc $1+1 \leq \binom{2n}{n}$). Est-ce vrai pour $n=1$? pour $n=2$? Et la preuve apparaît.)

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \geq 2$$

$\text{Car} \binom{m}{p} \geq 1$ dès que $m \geq 1$ et $p \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Ainsi,

$$2^{2n} \leq 2n \binom{2n}{n}$$

Ainsi, avec $2^{2n} = 4^n$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} < 4^n$$

5) a) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a\mathbb{Z} \cap \llbracket 1, n \rrbracket &= \{ka \mid k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq ka \leq n\} \\ &= \{ka \mid k \in \llbracket 1, \lfloor n/a \rfloor \rrbracket\} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Card}(a\mathbb{Z} \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$$

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow$ Supposons $v_p(b) = \ell$. Alors $p^\ell \mid b$ et $b \in p^\ell \mathbb{Z}$. Et $p^{\ell+1}$ ne divise pas b , donc $b \notin p^{\ell+1} \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$b \in p^\ell \mathbb{Z} \setminus p^{\ell+1} \mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$ Supposons $b \in p^\ell \mathbb{Z} \setminus p^{\ell+1} \mathbb{Z}$ Alors $p^\ell \mid b$ mais $p^{\ell+1}$ ne divise pas b . Par conséquent

$$v_p(b) = \ell$$

En conclusion,

$$v_p(b) = \ell \iff b \in p^\ell \mathbb{Z} \setminus p^{\ell+1} \mathbb{Z}$$

c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la décomposition en facteurs premiers de k s'écrit (le produit est fini car $(v_p(k))_{p \in \mathcal{P}}$ est à support fini)

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(k)}$$

D'où, par unicité de cette décomposition, on a $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ si $a, b \in \mathbb{N}^*$. Puis, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_p(n!) = v_p\left(\prod_{k=1}^n k\right) = \sum_{k=1}^n v_p(k)$$

Soit $m = \min\{\ell \in \mathbb{N}^* \mid p^\ell \geq n\}$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq v_p(k) \leq m$. Regroupons la somme précédente selon les valeurs de $v_p(k)$:

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{\ell=0}^m \sum_{\substack{k=1 \\ v_p(k)=\ell}}^n v_p(k) \\ &= \sum_{\ell=1}^m \sum_{\substack{k=1 \\ v_p(k)=\ell}}^n \ell && \text{Car } v_p(k) = \ell, \text{ et on peut enlever } \ell = 0 \\ &= \sum_{\ell=1}^m \ell \sum_{\substack{k=1 \\ k \in p^\ell \mathbb{Z} \setminus p^{\ell+1} \mathbb{Z}}}^n 1 && \text{D'après 5b} \\ &= \sum_{\ell=1}^m \ell \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \cap p^\ell \mathbb{Z} \\ k \notin p^{\ell+1} \mathbb{Z}}}^n 1 \end{aligned}$$

Or $\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket \cap p^\ell \mathbb{Z}) = \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor$ d'après 5a, et donc

$$\text{Card} \left(\left(\llbracket 1, n \rrbracket \cap p^\ell \mathbb{Z} \right) \setminus \left(\llbracket 1, n \rrbracket \cap p^{\ell+1} \mathbb{Z} \right) \right) = \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\ell+1}} \right\rfloor$$

D'où, en remplaçant,

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{\ell=1}^m \ell \left(\left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\ell+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^m \ell \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^m \ell \left\lfloor \frac{n}{p^{\ell+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^m \ell \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor - \sum_{\ell=2}^{m+1} (\ell-1) \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^m \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor \end{aligned}$$

Comme $\left\lfloor n/p^\ell \right\rfloor = 0$ si $\ell > m$, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.}$$