

Devoir de Mathématiques numéro 1.1

Même sujet que le devoir 1, avec des questions intermédiaires.

Exercice 1 (d'après Centrale MP 2025, ep1, Partie A)

Notations

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
- Si p est un nombre premier et si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la valuation p -adique de n , c'est-à-dire le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n .
- Si x est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x . En d'autres termes,

$$\pi(x) = \text{card}(\{p \text{ premier}, p \leq x\}) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} 1$$

où $\text{card}(A)$ désigne le cardinal de l'ensemble fini A .

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Le but de cette partie (unique partie donnée) est d'établir l'encadrement suivant de la fonction π :

$$\forall x \in [3, +\infty[\quad \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

I - Calculs préliminaires

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Comparez $\binom{2n+1}{n}$ et $\binom{2n+1}{n+1}$.

b) Montrer que $\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$.

c) Montrer que $a = \prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p$ divise $\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}$.

d) En déduire que

$$\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2n+1}{n} \leq 4^n.$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n.$$

On pourra procéder par récurrence et effectuer l'hérédité en discutant suivant la parité de n .

3) En déduire que, pour tout réel $x \geq 1$,

$$\prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x.$$

- 4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $0 \leq \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} < 4^n.$$

- 5) Soit p un nombre premier.

- a) Pour $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\text{Card}(a\mathbb{Z} \cap \llbracket 1, n \rrbracket)$.
- b) On rappelle que $a\mathbb{Z}$ est exactement l'ensemble des multiples de a , pour $a \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout $b \in \mathbb{N}^*$,

$$v_p(b) = \ell \iff b \in p^\ell \mathbb{Z} \setminus p^{\ell+1} \mathbb{Z}$$

- c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

- 6) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
- b) Soit $a \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathcal{P}$. Déterminer $k_0 \in \mathbb{N}$ minimal tel que, pour tout $k \geq k_0$, $\left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor = 0$.
- c) En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et p nombre premier : si p^k divise $\binom{2n}{n}$, alors $p^k \leq 2n$.

II - Majoration de $\pi(x)$

- 7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \geq \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leq n \\ p \text{ premier}}} p.$$

- 8) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n.$$

- 9) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- a) Montrer que, pour tout $x \in [2, +\infty[$, $\ln(x)\sqrt{x} < x$.
- b) Justifier que

$$\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)},$$

- c) Puis en déduire que

$$\pi(n) \leq 4 \frac{n}{\ln(n)}.$$

On pourra remarquer que $4 \ln 2 < 3$.

- 10) Soit $x \geq 3$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$, montrer que

$$\pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

III - Minoration de $\pi(x)$

- 11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

On pourra utiliser la question 6c.

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(2n) \geq n \frac{\ln(2)}{\ln(2n)}.$$

13) Soit $x \geq 3$. Montrer que

$$\pi(x) \geq \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)}.$$

On pourra poser $n = \lfloor x/2 \rfloor$ et utiliser 12.

L'inégalité précédente a été asymptotiquement améliorée en 1896, ainsi on admettra dans la suite du problème le (difficile) résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$