Cours : Reduction

Partie manquante du cours

2) Diagonalisation

a) Définition et théorème avec sous-espaces propres

Définition 1 (diagonalisation)

L'endomorphisme u est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle sa matrice $D = \mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}')$ est diagonale.

Remarque 1 **1)** u diagonalisable $\iff$ il existe une base $\mathscr{B}'$ de vecteurs propres :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e'_i) = \lambda_i e'_i \qquad D = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e'_1) & \cdots & u(e'_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix}$$

2) En pratique, lorsqu'on a une matrice ou un endomorphisme concret :

- On calcule le polynôme caractéristique pour trouver $\mathrm{Sp}\,(u)$;
- On cherche une base de $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$; *(matrice : résolution de système linéaire)*
- Comme $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda \subset E$, on concatène les bases de chaque E_λ, et on espère obtenir [1] une base de E. *(au pire, c'est une famille libre)*

Théorème 2 (de diagonalisation — 1)

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, notons m_λ sa multiplicité et E_λ le sous-espace propre associé.

① u diagonalisable $\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda$ ②

$\iff \dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim E_\lambda$ ③

$\iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u),\ m_\lambda = \dim E_\lambda \end{cases}$ ④

Rappel 2
Définition de $P \in \mathbb{K}[x]$ scindé : toutes les racines de P sont dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3
$X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$: scindé dans $\mathbb{R}[X]$
$X^2 + 1$: pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$

1. si et seulement si l'inclusion est une égalité.

Démonstration. Notons ① la définition et ②, ③, ④, les propriétés précédentes.

① ⇒ ② : Supposons u diagonalisable :
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k = \mathrm{Sp}(u)$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{B}'_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathscr{B}'_k$ une base de diagonalisation de u, où $\mathscr{B}'_i$ est composé de vecteurs propres pour la valeur propre λ_i.
Alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}'_i) \subset E_{\lambda_i}$

$$\text{Or } E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}(\mathscr{B}'_i) \qquad \mathscr{B}' \text{ base de } E$$
$$\subset \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} \subset E \qquad \text{sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes}$$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$ (changement d'indices).

② ⇒ ③ : Passage à la dimension.

③ ⇒ ④ : Supposons $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda \leqslant m_\lambda$, d'où

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda \leqslant \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda \leqslant \deg \chi_u = \dim E$$

Donc $\dim E_\lambda = m_\lambda$ et χ_u scindé.

④ ⇒ ① : Supposons χ_u scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$.

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda \qquad \text{propriété sur la dimension des sous-espaces propres}$$
$$= \deg \chi_u \qquad \text{polynôme scindé}$$
$$= \dim E \qquad \text{propriété du polynôme caractéristique}$$

De plus, $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda \subset E$, donc l'égalité des dimensions donne l'égalité des sous-espaces.
Ainsi, en concaténant une base de chaque sous-espace propre, on obtient une base de vecteurs propres de E : u est diagonalisable.

□

Point de vue matriciel. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Étudions l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$u_M : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & MX \end{cases}$$

Il faudrait plutôt écrire

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

pour avoir des vecteurs colonnes. Mais $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

- Les vecteurs propres sont des matrices colonnes.
- Le choix d'une base $\mathscr{B}'$ revient à faire un changement de base.

Propriété – Définition 3

M diagonalisable $\iff$ il existe D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PDP^{-1}$
$\iff$ u_M est diagonalisable

Démonstration. En exercice. □

Remarque 4 **1)** L'ordre des vecteurs colonnes de P impose l'ordre des valeurs propres dans D :

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ C_1 & \cdots & C_n \\ & & \end{array}\right) \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On doit avoir $MC_i = \lambda_i C_i$.
Cf. exercices 6, 8, etc...

2) Via « u_M diagonalisable », on récupère une version matricielle du théorème de diagonalisation.

Proposition 5 (Condition suffisante)

Si u admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Remarque 6 **1)** C'est le cas particulier *simple* de l'exercice 7.

2) Il n'y a évidemment pas de réciproque : matriciellement, $M = I_n$ est diagonalisable, mais $\chi_{I_n}(x) = (x-1)^n$.

Démonstration. On a $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda \subset E$ et $\dim E_\lambda \geqslant 1$, d'où

$$\begin{aligned} \dim E &\geqslant \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim E_\lambda \\ &\geqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} 1 \\ &\geqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{Sp}\,(u)) \end{aligned}$$

Si $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(u) = \dim E$,toutes les inégalités sont des égalités, et en particulier

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim E_\lambda$$

Donc, par théorème de diagonalisation, u diagonalisable. □

Proposition 7 (Condition suffisante)

Si χ_u a $n = \dim E$ racines distinctes, alors u est diagonalisable.

Démonstration. Comme $Z(\chi_u) = \mathrm{Sp}\,(u)$, Si χ_u a $n = \dim E$ racines distinctes, alors (Proposition 5) u admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, donc u est diagonalisable. □

b) Théorèmes avec polynômes

Théorème 8 (de diagonalisation — 2)

u diagonalisable $\iff$ il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

Vocabulaire 4
On dit aussi « simplement scindé ».

Démonstration.

($\Longrightarrow$) Supposons u diagonalisable : soit $\mathscr{B}'$ une base de diagonalisation, et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale obtenue.
Notons $P = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)$. Par construction, P est scindé à racines simples.
Montrons que P est annulateur :

$$\begin{aligned} P(D) &= \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) && \text{(calcul – que vous savez faire)} \\ &= \operatorname{diag}(0, \dots, 0) && \text{(car } \lambda_i \in \operatorname{Sp}(u) \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\exists P \in \mathbb{K}[X] /\ P(u) = 0$ et P scindé à racines simples.

($\Longleftarrow$) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$ et P scindé à racines simples. Quitte à diviser par une constante, on le suppose unitaire. Notons le

$$P = \prod_{i=1}^{d} (X - \mu_i)$$

Avec les μ_i 2 à 2 distincts. $P(u) = 0$ entraîne $\operatorname{Sp}(u) \subset Z(P)$, mais pas d'égalité a priori.
Lemme des noyaux : pour $i \in [\![1, d]\!]$, les $P_i = X - \mu_i$ sont 2 à 2 premiers entre eux donc

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Ker}(u - \mu_i \operatorname{id}_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u - \mu_d \operatorname{id}_E) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{d} E_{\mu_i} && \text{où } E_{\mu_i} = \operatorname{Ker}(u - \mu_i \operatorname{id}_E) \end{aligned}$$

A priori, pour certains i, on peut avoir $E_{\mu_i} = \{0\}$.
On écarte ces indices, et on renomme les $(\mu_i)_{i \in I}$ restant $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Ainsi,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$$

Comme, désormais, $E_{\lambda_i} \neq \{0\}$, c'est un sous-espace propre, et on décomposé E en somme directe de sous-espaces propres : u est diagonalisable.

□

Proposition 9 (de diagonalisation — 2 bis)

u diagonalisable $\iff$ π_u scindé à racines simples.

Démonstration.

($\Longrightarrow$) Supposons u diagonalisable. Soit P annulateur scindé à racines simple (théorème 8).
Par construction du polynôme minimal, $\pi_u | P$. Donc π_u est scindé à racines simples.

($\Longleftarrow$) Supposons π_u scindé à racines simples. Or π_u est un polynôme annulateur.
Donc, d'après le théorème 8, u est diagonalisable.

□

Proposition 10

$$Z(\pi_u) = \mathrm{Sp}\,(u)$$

Remarque 11
Autrement dit : les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propre, ou bien

$$\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \iff \pi_u(\lambda) = 0$$

Démonstration.

($\supset$) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. Comme π_u est un polynôme annulateur,

$$\pi_u(\lambda) = 0$$

D'où $\mathrm{Sp}\,(u) \subset Z(\pi_u)$.

($\subset$) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de π_u. Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_u = (X - \lambda)Q$. Soit un tel Q. On a

$$\pi_u(u) = (u - \lambda \,\mathrm{id}_E) \circ Q(u) = 0 \tag{1}$$

Supposons que $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,(u)$. Alors

$$\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \,\mathrm{id}_E) = \{0\}$$

Donc $v = u - \lambda \,\mathrm{id}_E$ est injective, donc — c'est un endomorphisme en dimension finie — bijective. On peut donc composer par v^{-1} dans (1) :

$$\begin{aligned}(1) &\Longrightarrow (u - \lambda \,\mathrm{id}_E)^{-1} \circ (u - \lambda \,\mathrm{id}_E) \circ Q(u) = 0 \\ &\Longrightarrow Q(u) = 0\end{aligned}$$

Donc Q est un polynôme annulateur de u. Ainsi, par défintion du polynôme minimal, $\pi_u | Q$.
Or $\deg Q = \deg \pi_u - 1$: c'est absurde.
Par conséquent, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$.
Et, finalement, $Z(\pi_u) \subset \mathrm{Sp}\,(u)$.

□

Corollaire 12

$$u \text{ diagonalisable} \iff \pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (X - \lambda)$$

Démonstration. D'après la proposition 10, $Z(\pi_u) = \mathrm{Sp}\,(u)$.

$(\Longrightarrow)$ Supposons u diagonalisable. D'après la proposition 9, π_u est scindé à racines simples.
Donc $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (X - \lambda)$.

$(\Longleftarrow)$ Supposons $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (X - \lambda)$.
π_u scindé à racines simples, donc d'après le théorème 8, u est diagonalisable.

□

Remarque 13
Le théorème 8 de diagonalisation à l'aide de polynômes nous permet de prouver facilement un résultat sur les endomorphismes induits :

Proposition 14

Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel stable par u.

$$u \text{ diagonalisable } \Longrightarrow \widetilde{u}_F \text{ diagonalisable}$$

Démonstration. Supposons u diagonalisable.
D'après le théorème 8, il existe un polynôme P annulateur de u scindé à racines simples.
Or $P(\widetilde{u}_F) = 0$:

$$\forall x \in F, \qquad P(\widetilde{u}_F)(x) = P(u)(x) = 0$$

Donc P est un polynôme annulateur de $\widetilde{u}_F$ scindé à racines simples. Donc $\widetilde{u}_F$ diagonalisable.

□

Théorème 15 (Cayley-Hamilton)

$$\chi_u(u) = 0$$

Remarque 16
Autrement dit : le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Démonstration. Non exigible. □

Corollaire 17

$$\pi_u | \chi_u$$

Démonstration. Par construction, π_u divise tout polynôme annulateur, en particulier χ_u. □