Samedi 21 novembre 2026

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

4

Exercice 1 (E3A 2021 MP)

Exercice 2

Partie I - Étude d'un exemple

1) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_f(x) &= \det(x\,\mathrm{id} - f)\\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1\\ -1 & x-2 & -1\\ -1 & -1 & x-2\end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3\\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1\\ x-4 & x-2 & -1\\ x-4 & -1 & x-2\end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1\end{matrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (x-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1\\ 0 & x-1 & 0\\ 0 & 0 & x-1\end{vmatrix}\\ &= (x-1)^2(x-4)\end{aligned}$$

Par conséquent

$\boxed{f \text{ admet deux valeurs propres distinctes, } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4}$

2) $\underline{E_4 = \mathrm{Ker}\,(A - 4I_3)}$: Nous savons que $1 \leqslant \dim E_4 \leqslant \alpha = 1$. Donc $\dim E_4 = 1$.

De plus, avec $X = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = 4X$. Donc $X \neq 0$ est un vecteur directeur de la droite E_4 :

$$\boxed{E_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

$\underline{E_1 = \mathrm{Ker}\,(A - I_3)}$

$$\begin{aligned}X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 &\iff (A - I_3)X = 0\\ &\iff \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &\iff x + y + z = 0\\ &\iff X = \begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)}$$

3) Comme $\dim E_1 + \dim E_4 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, f est diagonalisable et

$$\boxed{D = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = PDP^{-1}}$$

Il y a plusieurs D possibles – dès qu'il y a plus d'une valeur propre – et, même à D fixée, il y a plusieurs bases et donc P possibles.

4) La question aurait dû porter sur le polynôme minimal. Lapsus.
Comme f est diagonalisable, son polynôme minimal est exactement

$$\pi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}\,(f)} (X - \lambda) = (X-1)(X-4)$$

Le résultat se retrouve. Les racines de π_f sont les même que celles de χ_f : les valeurs propres (même complexes). Et f diagonalisable entraîne π_f à racines simples.

5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : \quad J^m = 3^{m-1}J$$

est vraie pour tout $m \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_m \Longrightarrow \mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie. $J^2 = 3J$, donc $J^{m+1} = 3^{m-1}JJ = 3^m J$, donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall m \geqslant 1 \quad J^m = 3^{m-1}J}$

6) En termes d'applications linéaires, la question précédente s'écrit $j^m = 3^{m-1}j$ pour tout $m \geqslant 1$. Ainsi, puisque $f = \text{id} + j$ et que j et id commutent, la formule du binôme nous donne, pour $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
f^m &= (\text{id} + j)^m \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} j^k \,\text{id}^{\,n-k} \\
&= \text{id} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1} j \\
&= \text{id} + \frac{1}{3}\left(-1 + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k\right) j \quad \textit{Factoriser par } \tfrac{1}{3} \textit{ et rajouter le terme en } k=0 \textit{ : le binôme réapparaît.} \\
&= \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j
\end{aligned}$$

Cette relation est encore vérifiée en 0, ainsi

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j}$$

On peut aussi prouver cette relation par récurrence.

7) **a)** D'après la question 6, pour tout $m \geqslant 1$, $f^m = \left(\mathrm{id} - \frac{1}{3}j\right) + 4^m\left(\frac{1}{3}j\right)$, donc les p et q suivant conviennent :

$$\boxed{p = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j \text{ et } q = \frac{1}{3}j}$$

b) *Ceci est une preuve typique d'unicité. On ne peut pas conclure immédiatement à partir de $(p_1 - p_2) + 4^m(q_1 - q_2) = 0$ sans arguments.*
Soit (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux couples d'endomorphismes vérifiant $\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = p_i + 4^m q_i$.
Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N} \quad (p_1 - p_2) + 4^m(q_1 - q_2) = 0$, et en particulier pour $m = 0$ et $m = 1$:

$$\begin{cases} (p_1 - p_2) & + & (q_1 - q_2) & = & 0 \\ (p_1 - p_2) & + & 4(q_1 - q_2) & = & 0 \end{cases}$$

Et en résolvant ce système, on trouve $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. Donc

$$\boxed{\text{Ce couple est unique}}$$

c) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha p + \beta q = 0$. D'après d)i., il vient

$$0 = \alpha p + \beta q = \alpha\left(\mathrm{id} - \frac{1}{3}j\right) + \beta\left(\frac{1}{3}j\right) = \alpha\,\mathrm{id} + (\beta - \alpha)\frac{1}{3}j$$

Or, vu leurs matrices, id et j ne sont pas colinéaires, donc $\alpha = 0$ et $\beta = \alpha = 0$.
Conclusion : $\boxed{(p, q) \text{ forme une famille libre}}$

d) $p^2 = \mathrm{id} - \frac{2}{3}j + \frac{1}{9}(3j) = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j = p$ et $q^2 = \frac{1}{9}(3j) = q$. Donc

$$\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs}}$$

$p \circ q = (\mathrm{id} - \frac{1}{3}j) \circ (\frac{1}{3}j) \quad = \frac{1}{j} - \frac{1}{9}(3j) = 0$
Et p et q commutent comme polynômes en j :

$$\boxed{q \circ p = q \circ p = 0}$$

Partie II - Généralisation : cas de deux valeurs propres

1) $$\begin{aligned}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}) &= f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu\,\mathrm{id} \\ &= \lambda^2 p + \mu^2 q - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ annule f :

$$\boxed{(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}) = 0}$$

Or P est un polynôme scindé à racines simples : $\lambda \neq \mu$. Donc, par théorème de diagonalisation,

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

2) Comme $P(f) = 0$, les valeurs propres sont des racines de P : $\mathrm{Sp}\,(f) \subset \{\lambda, \mu\}$.
Si μ n'est pas une valeur propre de f, comme f est diagonalisable, on a $f = \lambda\,\mathrm{id}$.
De plus $f = \lambda(\mathrm{id} - q) + \mu q = \lambda\,\mathrm{id} + (\mu - \lambda)q$. Donc $(\mu - \lambda)q = 0$. Or $\mu - \lambda \neq 0$, donc $q = 0$.
Ce qui est exclu : « q non nul ». C'est donc absurde.
Donc μ est une valeur propre de f.
De même, par symétrie des rôles joués par (p, λ) et (q, μ), λ est valeur propre de f. Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda, \mu\}}$$

3) $\boxed{f - \lambda\,\mathrm{id} = \lambda p + \mu q - \lambda p - \lambda q = (\mu - \lambda)q.}$ De même $\boxed{f - \mu\,\mathrm{id} = (\lambda - \mu)p.}$

4) $0 = (f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p = -(\mu - \lambda)^2 q \circ p$. Or $\lambda \neq \mu$, donc $\boxed{q \circ p = 0.}$
De même, $\boxed{p \circ q = 0}$.

Par définition, $p = \mathrm{id} - q$, donc $0 = p \circ q = (\mathrm{id} - q) \circ q = q - q^2$. Ainsi, $\boxed{q^2 = q}$. De même, $\boxed{p^2 = p}$

$$\boxed{p \text{ et } q = \mathrm{id} - p \text{ sont des projecteurs, } pq = qp = 0}$$

Montrons que $\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p$:

$\boxed{\subset}$ $x \in \mathrm{Ker}\ q \implies q(x) = 0$
$\implies x - p(x) = 0 \qquad (\text{car } q = \mathrm{id} - p)$
$\implies x = p(x)$
$\implies x \in \mathrm{Im}\ p$
Donc $\mathrm{Ker}\ q \subset \mathrm{Im}\ p$.

$\boxed{\supset}$ $x \in \mathrm{Im}\ p \implies \exists y \in E\ x = p(y)$
$\implies \exists y \in E\ q(x) = q \circ p(y) = 0 \qquad (\text{car } q \circ p = 0)$
$\implies q(x) = 0$
$\implies x \in \mathrm{Ker}\ q$
Donc $\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Ker}\ q$.

En conclusion $\boxed{\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p}$

5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : \quad f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

est vraie pour tout $m \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse : $\mathrm{id} = p + q$.
- $\underline{\mathcal{H}_m \implies \mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie.

$$f^{m+1} = (\lambda^m p + \mu^m q)(\lambda p + \mu q) = \lambda^{m+1} p + \mu^{m+1} q$$

Donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall m \geqslant 0 \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q}$

6) *f est inversible $\iff$ f est injectif $\iff$ $E_0 = \mathrm{Ker}\ f = \{0\}$ $\iff$ $0 \notin \mathrm{Sp}\,(f)$.*
Donc λ et μ non nuls permet de conclure immédiatement. Mais, comme on nous demande f^{-1}, calculons le.

Soit $g = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q$.

$$\begin{aligned} f \circ g &= (\lambda p + \mu q)\left(\frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q\right) \\ &= \lambda\frac{1}{\lambda}p^2 + \mu\frac{1}{\mu}q^2 && \text{Car } pq = qp = 0 \\ &= p + q = \mathrm{id} \end{aligned}$$

Donc, comme f est un endomorphisme, g est un inverse de f :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme, et } f^{-1} = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q}$$

7) Le résultat que l'on vient de prouver appliqué à $f^{-1} = \lambda' p + \mu' q$, avec $\lambda' = 1/\lambda$ et $\mu' = 1/\mu$ s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad (f^{-1})^m = \lambda'^m p + \mu'^m q = \lambda^{-m} p + \mu^{-m} q$$

En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{Z},\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q.}$

8) La famille (p, q) est libre : supposons la famille liée. si $p = \alpha q$, alors

$$0 = p \circ q = \alpha q^2 = \alpha q = p$$

Ce qui est exclus car $p \neq 0$. Si $q = 0 \times p = 0$, c'est immédiatement exclus. Donc la famille (p, q) est libre et

$$\boxed{\dim \mathrm{Vect}\,(p, q) = 2}$$

Partie III - Cas général

1) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$, donc en sommant sur k

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$$

(Lorsqu'on a une double somme (finie !) et qu'on ne sait pas quoi faire, dans le doute, intervertir.)

Conclusion : $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i}$

2) Soit

$$P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$$

Le polynôme P est scindé, à racines simples car les λ_i sont 2 à 2 distincts.

De plus, $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^{m} 0 \times p_i = 0$ Ainsi, f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

3) Soit $\ell \in \{1, \dots m\}$. L_ℓ est un polynôme d'interpolation de Lagrange : $L_\ell(\lambda_i) = 1$ si $i = \ell$ et 0 sinon.
La propriété montrée au 1 s'écrit donc

$$\boxed{L_\ell(f) = \sum_{i=0}^{m} L_\ell(\lambda_i) p_i = p_\ell}$$

D'après 2),

$$\begin{aligned}(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ L_\ell(f) &= (f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_j} (f - \lambda_j \,\mathrm{id}\,) \\ &= \alpha \left[(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} (f - \lambda_j \,\mathrm{id}\,) \right] \qquad \text{Avec } \alpha = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_j} \in \mathbb{R} \\ &= \alpha P(f) = 0 \qquad \text{Où } P \text{ est le polynôme annulateur de la question 2}\end{aligned}$$

Ainsi, d'après ci-dessus, $(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ p_\ell = 0$. En particulier, pour tout $x \in E$, $(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,)(p_\ell(x)) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,)}$$

Détermination du spectre de f :
Le polynôme de la question 2) annule f, donc les valeurs propres sont parmi ses racines.
Réciproquement, pour tout $\ell \in \{1, \dots, \ell\}$, $p_\ell \neq 0$ par hypothèse, donc Im $p_\ell \neq \{0\}$, et donc

$$\mathrm{Im}\ p_\ell \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) = E_{\lambda_\ell} \neq \{0\}$$

Donc λ_ℓ est valeur propre. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.}$$

4) Si $i \neq j$,

$$p_i p_j = L_i(f) L_j(f) = P(f) Q(f) = 0$$

Avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.
Si $i = j$, de même qu'en partie 2, on utilise le résultat ci-dessus et $\mathrm{id} = \sum_{k=1}^{m} p_k$:

$$p_i = \sum_{k=1}^{m} p_i p_k = p_i^2$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, m]\!], \quad p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}}$$

5) Comme $\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ et f diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \,\mathrm{id}\,) = E}$$

Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Dans une base adaptée à cette somme directe, notons D la matrice de f.
La matrice $P_i = L_i(D)$ de $p_i = L_i(f)$ est diagonale (polynôme en une matrice diagonale) et a des 0 sur la diagonale pour les colonnes correspondants à des vecteurs $e_k \notin E_{\lambda_i}$, et 1 si $e_k \in E_{\lambda_i}$.
Donc p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_j$.

6) Dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
Soit $(q_1, \ldots, q_m)$ les projecteurs associés à cette somme directe : q_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_j$.
La matrice A de u dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette somme directe est diagonale : la base sera une base de vecteurs propres. Si on note Q_i les matrices de q_i dans $\mathscr{B}$, elles seront aussi diagonales, avec des 1 ou des 0 sur la diagonale (selon que les $e_k \in E_i$ ou non).
Ainsi, $A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Q_j$, et plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k Q_j$$

Ce qui s'écrit, en terme d'endomorphismes,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k q_j}$$

Autre méthode : u agit comme une homothétie sur chaque E_i donc la formule est vraie pour $k = 1$ (ou via les matrices). Puis on utilise $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$, et $p_i^2 = p_i$, pour montrer la formule ci-dessus par récurrence à partir de la formule en $k = 1$. Vous choisissez ce qui vous semble le plus clair.

Exercice 3 (E3A MP 2026)

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5. On rappelle que $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients complexes.
- Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
- Pour tout endomorphisme v de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et tout entier naturel m, on rappelle que : $v^0 = \mathrm{Id}$ où Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et lorsque m est non nul, $v^m = v \circ v^{m-1}$.
- On considère l'application u définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u(P) = Q \text{ où } Q(X) = P(X+1).$$

1) Étude de u.

a) Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Solution.

- Montrons que u est à **valeurs dans** $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On a alors $u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+1)^k$. Ceci est bien un **polynôme**.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, selon la formule du binôme de Newton, $(X+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j$.

Ainsi, $(X+1)^k$ est de degré k et donc $\deg(X+1)^k \leqslant n-1$. Par **propriété du degré de la somme**, on a donc $\deg u(P) \leqslant n-1$ et ainsi $u(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

- Montrons que u est **linéaire**. Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1)$ ce qui est bien $\lambda u(P) + u(Q)$.

□

b) Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ la base canonique ordonnée de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire :

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], P_j(X) = X^j.$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer l'expression de $u(P_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution. D'après la formule du binôme de Newton, $(X+1)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} X^k$. Ainsi

$$u(P_j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} P_k$$

□

c) Déterminer alors la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.
On fera clairement apparaître sur la copie les deux premières colonnes ainsi que la k-ième colonne de la matrice M pour un entier naturel $k \in [\![3, n-2]\!]$.

Solution.
Selon l'expression trouvée dans la question précédente, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{k}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{k}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{k}{k} & \cdots & \binom{n-1}{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$$

□

d) Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de l'endomorphisme u.

Solution. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ étant triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux égaux à 1, on a $\chi_u = (X-1)^n$.

□

e) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution. Comme $\chi_u = (X-1)^n$, si u était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle la matrice de u serait I_n et ainsi u serait Id ce qui n'est pas le cas.
Ainsi, u **n'est pas diagonalisable**. □

f) Justifier que l'endomorphisme u est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et préciser u^{-1}.

Solution. Soit $v : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto P(X-1)$.
Prenons $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a $u \circ v(P) = u(P(X-1)) = P$ et $v \circ u(P) = v(P(X+1)) = P$.
Ainsi, $u \circ v = v \circ u = Id$.
Cela montre que u est bijectif (et est donc un automorphisme) et qu'on a $u^{-1} = v$.

□

g) Déterminer M^{-1}.

Solution. On sait que M^{-1} est la matrice de v dans $\mathcal{B}$.

Or, si $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a, selon la formule du binôme de Newton : $v(P_j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} P_k$.

Ainsi,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^k\binom{k}{0} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{k-1}\binom{k}{1} & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & (-1)^{k-2}\binom{k}{2} & \dots & (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{k}{k} & \dots & (-1)^{n-1-k}\binom{n-1}{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & .. & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$$

□

h) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer u^k.

Solution. On raisonne par **récurrence**. Pour cela, pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$ la proposition :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u^k(P) = P(X+k)$$

- On a bien $\mathcal{P}(0)$ puisque si $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, alors $u^0(P) = Id(P) = P(X)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$.
  Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a $u^{k+1}(P) = u(u^k(P)) = u(P(X+k)) = P(X+k+1)$.
  Cela valide bien $\mathcal{P}(k+1)$.

Finalement, on obtient bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u^k(P) = P(X+k)$$

□

2) On note $\Delta = u -$ Id.

a) Montrer que Δ est nilpotent avec : $\Delta^n = 0$.

Solution. La matrice de Δ dans $\mathcal{B}$ est $M - I_n$: elle est **triangulaire supérieure stricte**. Ainsi, selon le cours, Δ est nilpotent. Comme $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est de dimension n, on a alors, selon le cours, $\Delta^n = 0$.

□

b) L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

Solution. Comme Δ est nilpotente, son spectre est $\{0\}$.

Si Δ était diagonalisable, il existerait donc une base dans laquelle sa matrice serait la matrice nulle et Δ serait donc nulle ce qui n'est pas le cas.

Ainsi : Δ **n'est donc pas diagonalisable**. □

3) Démontrer qu'il existe des entiers relatifs $(a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in \mathbb{Z}^n$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Solution. Comme $u \circ Id = Id \circ u$, selon la formule du binôme de Newton, on a $\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-Id)^{n-k} u^k$ c'est-à-dire

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u^k$$

Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. En évaluant l'égalité précédente en P, on obtient :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u^k(P)$$

En isolant le terme pour $k = n$, cela s'écrit :

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k) = 0$$

Il ne reste plus qu'à poser, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$. □

FIN DE L'ÉPREUVE