Lycée d'Alzon
Classe de MPI

Samedi 21 novembre 2026

Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on admettra la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{u^n}{n!}$ et l'égalité $e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

1) Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

2) On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.

3) Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.

4) Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.

5) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I.

6) On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.
On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.

8) On pose $J = \int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a : $J = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

9) Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2

Notations :
Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.
$\mathscr{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Étant donné $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$), alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Partie I - Étude d'un exemple

Soit f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

2) Déterminer sous-espaces propres de f.

3) Montrer que f est diagonalisable. Donner la matrice D de f dans une base de vecteurs propres, ainsi que la matrice de passage P vers cette base, et la formule liant A, P et D.

4) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de f.

5) Calculer par récurrence J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

6) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

7) **a)** À l'aide de la question 6, trouver des endomorphismes p et q tels que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q \tag{1}$$

b) Montrer que ce couple (p, q) est unique : $\exists!(p, q) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant (1).

c) Montrer que (p, q) forme une famille libre.

d) Calculer p^2 et q^2. Quelle est la nature des endomorphismes p et q ? Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

Partie II - Généralisation : cas de deux valeurs propres

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que

$$\lambda \neq \mu \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{id} & = & p + q \\ f & = & \lambda p + \mu q \\ f^2 & = & \lambda^2 p + \mu^2 q \end{array}$$

1) En exprimant f^2, f et id à l'aide de p et q, calculer $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id})$, puis en déduire que f est diagonalisable.

2) En déduire le spectre de f.

3) Exprimer $f - \lambda\,\mathrm{id}$ et $f - \mu\,\mathrm{id}$ à l'aide de p et q.

4) Calculer $p \circ q$, $q \circ p$, p^2 et q^2. Donner la nature de p et q. Montrer que $\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p$.

5) Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

6) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$. Montrer que f est un isomorphisme, et écrire f^{-1} combinaison linéaire de p et q.

7) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

8) Soit $F = \mathrm{Vect}\,(p, q)$. Déterminer la dimension de F.

Partie III - Cas général

Soit $p_1, \ldots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, m nombres réels deux à deux distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$

2) En déduire que f est diagonalisable.

3) On considère les polynômes de Lagrange $L_1, \ldots, L_m$ associés aux reels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
Montrer que pour tout $\ell \in [\![1, m]\!]$, $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell\,\mathrm{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}.$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i.

6) On suppose que $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(q_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k q_j.$$

Exercice 3

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5. On rappelle que $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients complexes.
- Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
- Pour tout endomorphisme v de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et tout entier naturel m, on rappelle que : $v^0 = \mathrm{Id}$ où Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et lorsque m est non nul, $v^m = v \circ v^{m-1}$.
- On considère l'application u définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], u(P) = Q \text{ où } Q(X) = P(X+1).$$

1) Étude de u.

a) Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

b) Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ la base canonique ordonnée de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire :

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], P_j(X) = X^j.$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer l'expression de $u(P_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer alors la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.
On fera clairement apparaître sur la copie les deux premières colonnes ainsi que la k-ième colonne de la matrice M pour un entier naturel $k \in [\![3, n-2]\!]$.

d) Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de l'endomorphisme u.

e) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

f) Justifier que l'endomorphisme u est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et préciser u^{-1}.

g) Déterminer M^{-1}.

h) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer u^k.

2) On note $\Delta = u - \mathrm{Id}$.

a) Montrer que Δ est nilpotent avec : $\Delta^n = 0$.

b) L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

3) Démontrer qu'il existe des entiers relatifs $(a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in \mathbb{Z}^n$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \ P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

FIN DE L'ÉPREUVE