Programme de colle 9

Classe de MPI

Semaine du lundi 16 au vendredi 20 novembre

Liste des questions de cours
• Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit trigonalisable (3 propositions). • Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(A)$ est la somme des valeurs propres complexes de A avec multiplicité. • Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$ (méthode au choix de l'élève) ◦ Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in GL(E)$, Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 est diagonalisable.

1 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

1.0.1 Définition, exemples

Morphisme d'algèbre $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathscr{L}(E)$ d'évaluation. Idéal Ker φ des polynômes annulateurs.
En dimension finie, Ker φ est engendré par π_u le polynôme minimal. Lemme des noyaux.

2 Réduction

2.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est directe.
Si P est un polynôme annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}\,(u) \subset Z(P)$.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

2.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre (preuve exigible).
CNS de diagonalisation (4 propositions, y compris la définition). Avec des polynômes : u diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur (ou minimal) scindé à racines simples.
Théorème de Cayley-Hamilton.
CS de diagonalisation : cas de $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.
CNS de trigonalisation : définition, et théorème avec polynômes (minimal, caractéristique ou annulateur).
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).
Sous-espaces caractéristiques N_λ : définition, décomposition de E si χ_u scindé, $\dim N_\lambda = m_\lambda$. Matrice de u dans une base compatible avec la somme directe.

2.3 Endomorphismes nilpotents

Définition, caractérisation par le polynôme caractéristique, par la forme de la matrice dans une bonne base.

2.4 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant. Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires.