Programme de colle 8

Classe de MPI

Semaine du lundi 9 au vendredi 13 novembre

Liste des questions de cours
• Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable (5 propositions). ◦ Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, calculer $P(D)$. ◦ Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

1 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

1.0.1 Définition, exemples

Morphisme d'algèbre $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathscr{L}(E)$ d'évaluation. Idéal Ker φ des polynômes annulateurs.
En dimension finie, Ker φ est engendré par π_u le polynôme minimal. Lemme des noyaux.

2 Réduction

2.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est directe.
Si P est un polynôme annulateur de u, alors $\operatorname{Sp}(u) \subset Z(P)$.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

2.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre.
CNS de diagonalisation (4 propositions, y compris la définition). Avec des polynômes : u diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur (ou minimal) scindé à racines simples.
Théorème de Cayley-Hamilton.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes).

2.3 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.