

Programme de colle 2

Classe de MPI

Semaine du lundi 14 au vendredi 18 septembre

Liste des questions de cours

- Expression de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Soit A un anneau. Montrer que, si $x \in A$ est nilpotent, $1 - x$ est inversible.
- Théorème de Cesàro, avec preuve.
- Limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$; équivalent de $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$.
- Les dix DL usuels : famille exponentielle ($\exp$, $\cos$, $\sin$), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\text{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.
- Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

1 Révisions de trigonométrie circulaire et hyperbolique

2 Complexes

Révisions MP2I.

3 Combinatoire

- Soit $f : E \rightarrow F$. Si $\text{Card } E = \text{Card } F < \infty$, alors f bijective $\iff f$ injective $\iff f$ surjective.
- Formule du binôme, $\binom{n}{k}$.
- Manipulation du symbole Sigma : sommes telescopiques et changements d'indices.

4 Suites et séries numériques

4.1 Inégalités usuelles et techniques de majoration

Inégalités triangulaire, de convexité, des accroissements finis, de Cauchy-Schwarz, étude de fonctions, opérations sur les inégalités.

4.2 Situations classiques

Définition de la convergence d'une suite, avec des ε . Suites croissantes majorée et décroissantes minorées.

Suite et série géométrique : limites, expression de $\sum_{k=0}^n q^k$.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Sommes de Riemann. Théorème de Cesàro.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, en particulier le cas f monotone ou f contractante ($\sup_I |f'| < 1$). Obtention d'équivalents.

4.3 Relations de comparaison

Grand O , petit o , équivalents.

Les dix DL usuels : famille exponentielle ($\exp$, $\cos$, $\sin$), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\text{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.

4.4 Séries numériques

Révisions de MP2I : définition de la convergence, de la convergence absolue.

Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comparaison de séries à termes positifs : $\leq$, grand O , petit o , équivalent.

Sommation des relations de comparaison.

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste. Comparaison série/intégrale.

5 Fonctions d'une variable réelle

5.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle. Fonctions convexes.

Théorème des bornes atteintes.

Théorème des valeurs intermédiaires ; corollaire : théorème de la bijection.

5.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée.

5.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de MP2I : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand O , petit o , équivalents.

Calculs et propriétés des DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;