Programme de colle 10

Classe de MPI

Semaine du lundi 23 au vendredi 27 novembre

Liste des questions de cours

- Montrer que $f \mapsto \|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$ est une norme sur $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{K})$.
- Notations ci-dessus : $\exists C > 0,\ \forall f \in E,\ \|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$, mais $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
  - $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leqslant 1\right\}$ est convexe. Les boules sont des convexes (preuve pour $B(a,r)$).
- La boule ouverte $B(0,\rho)$ est ouverte.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Norme et distance

Norme, distance. Exemple des normes 1, 2 et ∞ usuelles dans $\mathbb{K}^n$, $E \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Norme relative à une base. Norme produit sur $E_1 \times \cdots \times E_k$.
Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Parties bornées. Convexes.

1.2 Suites

Limite, opérations sur les limites. Suites extraites. Valeur d'adhérence.
Composantes : dans un espace produit, et suites coordonnées associées à une base en dimension finie.

1.3 Parties d'un espace vectoriel normé

1.3.1 Topologie

1.3.1.1 Ouverts : définition, stabilité par union et intersection finie, $\emptyset$, E et les boules ouvertes sont des ouverts. Stabilité par produit.

1.3.2 Normes équivalentes

Relation d'équivalence. Géométrie : inclusion de boules. Méthode : montrer la non-équivalence à l'aide de suites. Équivalence des normes en dimension finie.
Invariance par changement de norme équivalente : parties bornées, convergence d'une suite et valeur de la limite.