

Thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur

---

# Courbes rationnelles et hypersurfaces de l'espace projectif

---

Présentée par **Denis Conduché**  
Soutenue le 30 novembre 2006

Composition du jury :

M. Olivier DEBARRE (Université Louis Pasteur), *Directeur de thèse*

M. Jean-François BOUTOT (Université Louis Pasteur), *Rapporteur interne*

M. Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE (Université Paris XI), *Rapporteur externe*

M. Yves LASZLO (École Polytechnique), *Rapporteur externe*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Principales notations et définitions</b>	<b>11</b>
1.1 Notations . . . . .	11
1.2 Variétés $\mathbf{k}$ -rationnelles, $\mathbf{k}$ -unirationnelles, $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelles . . . . .	11
1.3 Espaces de modules de courbes rationnelles . . . . .	13
1.3.1 Définitions . . . . .	13
1.3.2 Étude locale . . . . .	14
1.3.3 Le cas des droites . . . . .	14
1.4 Courbes rationnelles libres et très libres . . . . .	16
1.5 Variétés uniréglées, séparablement uniréglées . . . . .	17
1.6 Variétés rationnellement connexes, séparablement rationnellement connexes . . . . .	19
<b>2 Unirationalité séparable</b>	<b>23</b>
2.1 Unirationalité séparable en très petit degré . . . . .	23
2.2 Cubiques contenant une droite . . . . .	29
2.3 Cubiques contenant un point rationnel . . . . .	37
<b>3 Les hypersurfaces de Fermat</b>	<b>51</b>
3.1 Droites standard . . . . .	52
3.2 Les Fermat de degré divisant $p^r + 1$ . . . . .	55
3.2.1 Cas des surfaces . . . . .	55
3.2.2 Description de $F(X_N^{p^r+1})$ . . . . .	57
3.2.3 Unirationalité de $X_N^d$ pour $d \mid p^r + 1$ . . . . .	59
3.3 Courbes rationnelles sur les Fermat . . . . .	64
3.3.1 Courbes rationnelles sur $X_N^{p^r+1}$ . . . . .	65

3.3.2	Courbes rationnelles (très) libres sur $X_N^{p^r+1}$ . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Annexe : séparabilité</b>	<b>79</b>
4.1	Applications dominantes . . . . .	79
4.2	Schémas et applications séparables . . . . .	80
4.2.1	Schémas et morphismes . . . . .	80
4.2.2	Applications rationnelles . . . . .	81
4.2.3	Séparabilité et lissité . . . . .	82
	Références . . . . .	85

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier grandement mon directeur de thèse, Olivier Debarre, sans qui rien n'aurait été possible. Je le remercie pour sa très grande patience, sa gentillesse, sa disponibilité et ses explications toujours lumineuses.

Je suis très heureux et très honoré que Jean-François Boutot, Jean-Louis Colliot-Thélène et Yves Laszlo aient accepté de rapporter ma thèse, et je les en remercie.

Ma gratitude va aussi à mes camarades de bureau, pour leurs encouragements chaleureux et salutaires pendant ces années de thèse. Je remercie également les différents relecteurs de ce manuscrit de leur dévouement, et les contributeurs du forum des élèves de l'ENS pour leur aide précieuse, tant en mathématiques qu'en informatique.

Je souhaite enfin saluer ici tous ceux, amis et collègues, avec qui j'ai passé d'excellents moments à Strasbourg.



# Introduction

Une  $\mathbf{k}$ -variété, c'est-à-dire un schéma séparé de type fini géométriquement intègre  $X$  de dimension  $n$  défini sur un corps  $\mathbf{k}$ , est dite  $\mathbf{k}$ -unirationnelle s'il existe un  $\mathbf{k}$ -morphisme dominant  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n \dashrightarrow X$ . Elle est dite  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelle s'il existe un  $\mathbf{k}$ -morphisme dominant  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n \dashrightarrow X$  qui soit *séparable* (c'est-à-dire qui fasse de  $\mathbf{k}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n) = \mathbf{k}(T_1, \dots, T_n)$  une extension séparable de  $\mathbf{k}(X)$ ). En caractéristique nulle, ces deux propriétés sont équivalentes, mais pas en général : une variété projective lisse séparablement unirationnelle n'a aucune forme holomorphe pluricanonique non nulle, mais il existe (en caractéristique  $p > 0$ ) des  $\mathbf{k}$ -variétés de type général qui sont  $\mathbf{k}$ -unirationnelles (comme par exemple les hypersurfaces de Fermat, d'équation  $x_0^{p^r+1} + \dots + x_N^{p^r+1} = 0$  dans  $\mathbb{P}^N$ , étudiées dans le chapitre 3).

L'expérience a montré que des versions plus faibles de ces deux propriétés étaient aussi plus maniables. On dira qu'une  $\mathbf{k}$ -variété projective lisse  $X$  est *rationnellement connexe* si deux points généraux de  $X(\bar{\mathbf{k}})$  peuvent être joints par une courbe rationnelle (définie sur  $\bar{\mathbf{k}}$ , une clôture algébrique de  $\mathbf{k}$ ), c'est-à-dire par un  $\bar{\mathbf{k}}$ -morphisme  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ . Une  $\mathbf{k}$ -variété projective lisse  $\mathbf{k}$ -unirationnelle est évidemment rationnellement connexe.

La  $\bar{\mathbf{k}}$ -variété (projective lisse)  $X$  est dite *séparablement rationnellement connexe* s'il existe une telle courbe rationnelle *très libre*, c'est-à-dire telle que le fibré vectoriel  $f^*T_X$  soit *ample* sur  $\mathbb{P}^1$ . Elle est alors rationnellement connexe. Une  $\mathbf{k}$ -variété projective lisse  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelle est séparablement rationnellement connexe. La notion de connexité rationnelle est une notion géométrique, on se placera donc toujours sur la clôture algébrique.

Toute  $\mathbf{k}$ -variété projective lisse rationnellement connexe est aussi séparablement rationnellement connexe *si  $\mathbf{k}$  est de caractéristique nulle*, mais pas en général : s'il résulte des travaux de Kollár, Miyaoka et Mori ([KMM92]) et aussi, indépendamment, de Campana ([Cam92]), qu'une variété de Fano, c'est-à-dire une  $\mathbf{k}$ -variété projective lisse  $X$  dont le fibré anticanonique  $-K_X$

est ample, est toujours rationnellement connexe, Kollár a construit ([Kol99], Theorem V.5.11 et Lemma V.5.1), pour chaque entier premier  $p$ , des exemples explicites de variétés de Fano définies sur  $\mathbb{F}_p$  qui ne sont pas séparablement rationnellement connexes, c'est-à-dire qu'elles n'ont aucune courbe rationnelle très libre.

Le but de cette thèse est d'étudier la connexité rationnelle séparable de certaines  $\mathbf{k}$ -variétés de Fano (vu le résultat de Kollár, Miyaoka, Mori et Campana mentionné ci-dessus, cela n'a d'intérêt qu'au-dessus d'un corps de caractéristique non nulle), à savoir les hypersurfaces lisses de degré au plus  $N$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}^N$ . En particulier, nous testons la conjecture que *toutes* les hypersurfaces lisses de degré  $\leq N$  dans  $\mathbb{P}^N$  sont séparablement rationnellement connexes. Le résultat dans le cas des hypersurfaces cubiques a été démontré par Madore ([Mad04]).

Après un premier chapitre consacré à la mise au point des diverses définitions et notations, nous étudions dans le deuxième chapitre l'unirationalité séparable des hypersurfaces. Le fait qu'une hypersurface générale de  $\mathbb{P}^N$  de degré  $d$  très petit devant sa dimension  $N - 1$  est unirationnelle est connu depuis longtemps ([Mor40] et [Pre49]). En exposant la démonstration de Paranjape et Srinivas ([PS92]), *nous remarquons qu'elle montre en fait l'unirationalité séparable* (théorème 2.3).

Les bornes données par le théorème de Morin et Predonzan ne sont pas toujours très bonnes : lorsque  $d = 3$ , celui-ci s'applique pour  $N \geq 4$ , ce qui n'est pas si mal, mais lorsque  $d = 4$ , il faut déjà  $N \geq 39$ . Ce résultat n'est aussi valable que sur un corps algébriquement clos et pour des hypersurfaces générales.

Nous nous intéressons dans les paragraphes 2.2 et 2.3 aux cas particuliers des hypersurfaces cubiques, pour lesquelles il existe des constructions *ad hoc* classiques qui montrent l'unirationalité.

Si l'hypersurface cubique  $X$  est lisse, définie au-dessus d'un corps algébriquement clos  $\bar{\mathbf{k}}$ , et de dimension  $\geq 2$ , elle contient une droite  $\ell$ . l'hypersurface cubique est alors  $\bar{\mathbf{k}}$ -unirationnelle via le morphisme  $\pi_\ell : \mathbb{P}(T_X|_\ell) \dashrightarrow X$  qui à une droite  $\ell_x$  tangente à  $X$  en un point  $x$  de  $\ell$  associe le troisième point d'intersection de  $\ell_x$  avec  $X$ . Ce morphisme est de degré 2, donc est séparable en caractéristique différente de 2.

Nous montrons (propositions 2.7 et 2.16) que, pour une droite  $\ell$  générale, *ce morphisme  $\pi_\ell$  n'est pas séparable si et seulement si la caractéristique de  $\mathbf{k}$  est 2 et  $X$  est projectivement équivalente à la hypersurface cubique de Fermat,*

d'équation  $x_0^3 + \cdots + x_N^3 = 0$ .

Nous étudions ensuite une seconde construction classique d'unirationalité, dont la dernière version a été donnée par Kollár ([Kol02]), pour laquelle nous supposons seulement que le corps  $\mathbf{k}$  est infini et que l'hypersurface  $X$  est irréductible sans point géométrique triple et contient un point rationnel.

*En caractéristique différente de 2, dès que la dimension de  $X$  est plus grande que 3, l'hypersurface est  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelle par cette construction (proposition 2.34). Dans le cas des surfaces, il existe des exceptions (propositions 2.28, 2.29 et 2.30). En caractéristique 2, il existe aussi des exceptions, qui sont des hypersurfaces singulières (proposition 2.35).*

Dans le troisième chapitre, nous étudions, sur un corps  $\mathbf{k}$  de caractéristique  $p > 0$ , les hypersurfaces de Fermat, d'équation

$$x_0^d + \cdots + x_N^d = 0$$

dans  $\mathbb{P}^N$ . Elles sont de Fano pour  $d \leq N$ . L'idée de départ était que ces hypersurfaces semblent manifester le plus de pathologies vis-à-vis des questions qui nous intéressent, en particulier lorsque  $d = p^r + 1$  : elles sont alors toujours  $\bar{\mathbf{k}}$ -unirationnelles (th. 3.8, qui généralise les résultats de [Shi79]), bien qu'elles soient de type général pour  $p^r > N$ .

Pour la connexité rationnelle séparable, il s'agit d'étudier les courbes rationnelles sur ces hypersurfaces. En suivant la démarche de [Deb01] (§ 2.14), nous décrivons le schéma des droites contenues dans ces hypersurfaces (corollaire 3.4, proposition 3.5).

Lorsque  $d = p^r + 1$ , les droites recouvrent l'hypersurface de Fermat, mais aucune n'est (très) libre (remarque 3.7). *Cependant, nous montrons que pour  $N \geq 2p^r - 1$ , l'hypersurface de Fermat de degré  $p^r + 1$  contient une courbe rationnelle très libre définie sur  $\mathbb{F}_p$  ; elle est donc séparablement rationnellement connexe (corollaire 3.17).*



# Chapitre 1

## Principales notations et définitions

### 1.1 Notations

Une  $\mathbf{k}$ -variété est un schéma géométriquement intègre de type fini au-dessus d'un corps. Un sous-schéma est toujours fermé, sauf mention contraire.

Si  $X$  est un schéma, pour tout point  $x$  de  $X$ , on note  $T_{X,x}$  l'espace tangent de Zariski à  $X$  en  $x$ . Si  $X$  est une sous-variété d'un espace projectif  $\mathbb{P}^N$ , on note aussi  $\mathbb{T}_{X,x} \subset \mathbb{P}^N$  son projectifié; c'est un sous-espace linéaire de  $\mathbb{P}^N$ .

Enfin, si  $S_1, \dots, S_r$  sont des parties de  $\mathbb{P}^N$ , on note  $\langle S_1, \dots, S_r \rangle$  le sous-espace linéaire de  $\mathbb{P}^N$  engendré par  $S_1 \cup \dots \cup S_r$ .

### 1.2 Variétés $\mathbf{k}$ -rationnelles, $\mathbf{k}$ -unirationnelles, $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelles

**Définition 1.1.** Une  $\mathbf{k}$ -variété  $X$  de dimension  $n$  sur un corps  $\mathbf{k}$  est dite  *$\mathbf{k}$ -rationnelle* s'il existe une application birationnelle  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n \dashrightarrow X$  définie sur  $\mathbf{k}$ .

**Remarque 1.2.** Il revient au même de dire que le corps de fonctions de  $X$  est une extension transcendante pure de  $\mathbf{k}$ .

**Définition 1.3.** Une  $\mathbf{k}$ -variété  $X$  de dimension  $n$  est dite  *$\mathbf{k}$ -unirationnelle* (resp. *séparablement  $\mathbf{k}$ -unirationnelle*) s'il existe une application rationnelle dominante (resp. dominante séparable)  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n \dashrightarrow X$  définie sur  $\mathbf{k}$ .

**Notation 1.4.** On dira simplement rationnelle, unirationnelle, séparablement unirationnelle lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Une  $\mathbf{k}$ -variété  $\mathbf{k}$ -unirationnelle est donc une  $\mathbf{k}$ -variété dominée par une  $\mathbf{k}$ -variété  $\mathbf{k}$ -rationnelle de même dimension. Sur un corps infini, une telle  $\mathbf{k}$ -variété a un ouvert dense de points rationnels.

**Remarque 1.5.** Cette propriété dépend du corps de base : si  $X_{\mathbf{k}}$  est une  $\mathbf{k}$ -variété définie sur un corps  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{K}$  une extension de  $\mathbf{k}$ , la  $\mathbf{k}$ -variété  $X_{\mathbf{K}}$  peut être  $\mathbf{K}$ -unirationnelle sans que  $X_{\mathbf{k}}$  soit  $\mathbf{k}$ -unirationnelle.

**Exemple 1.6.** Soit  $X_{\mathbb{R}}$  la conique d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Cette courbe n'a aucun point rationnel, donc elle n'est ni  $\mathbb{R}$ -rationnelle ni  $\mathbb{R}$ -unirationnelle. En revanche,  $X_{\mathbb{C}}$  est rationnelle : l'application qui à  $(x, y, z) \in X_{\mathbb{C}} - \{(1, i, 0)\}$  associe la droite  $\langle (1, i, 0), (x, y, z) \rangle$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  induit une application birationnelle (en fait un isomorphisme)  $X_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

L'application dominante n'a, en fait, pas besoin d'être génériquement finie.

**Proposition 1.7.** *Une  $\mathbf{k}$ -variété  $X$  de dimension  $n$  est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle s'il existe une  $\mathbf{k}$ -application rationnelle dominante  $\mathbb{P}^m \dashrightarrow X$  pour un certain  $m$  (nécessairement supérieur à  $n$ ).*

*Une  $\mathbf{k}$ -variété  $X$  de dimension  $n$  sur un corps  $\mathbf{k}$  infini est  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelle s'il existe une  $\mathbf{k}$ -application rationnelle dominante séparable  $\mathbb{P}^m \dashrightarrow X$  pour un certain  $m$  (nécessairement supérieur à  $n$ ).*

**Démonstration.** Montrons le cas séparable : Soient  $X$  une  $\mathbf{k}$ -variété de dimension  $n$  et  $f : \mathbb{P}^m \dashrightarrow X$  une application rationnelle dominante séparable, avec  $m > n$ . Notons  $V$  un ouvert de  $\mathbb{P}^m$  sur lequel  $f$  est définie. D'après le théorème de Chevalley ([Har83], II ex 3.22), il existe un ouvert dense  $U$  de  $X$  en tout point duquel la fibre de  $f|_V : V \rightarrow X$  soit de dimension  $m - n \geq 1$ .

Dans le cas d'un corps infini, il existe un point rationnel  $u$  de l'ouvert  $U$  et, par Bertini, un hyperplan  $H$  de  $\mathbb{P}^m$  qui ne contient pas la fibre de  $f$  en  $u$  et tel que  $H \cap f^{-1}(u)$  soit géométriquement réduit (cf. [Jou83], cor. 6.11.2). En raison du même théorème de Chevalley, la fonction  $\tilde{f} : V \cap H \rightarrow X$  est dominante ; de plus la fibre  $\tilde{f}^{-1}(u)$  est géométriquement réduite, de sorte que  $\tilde{f}$  est séparable (cf. Annexe, prop 4.10). Nous pouvons continuer le processus aussi longtemps que  $m > n$ , donc il existe une application  $\mathbf{k}$ -rationnelle dominante séparable  $\mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ .

Dans le cas d'un corps fini, voir [Kol02] Lemma 11.  $\square$

## 1.3 Espaces de modules de courbes rationnelles

Dans tout ce numéro,  $X$  est un sous-schéma de  $\mathbb{P}^N$  défini au-dessus d'un corps  $\mathbf{k}$ . Nous suivons dans toute cette partie l'exposition de [Deb01].

### 1.3.1 Définitions

Les morphismes  $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$  de degré  $d$  (c'est-à-dire tels que  $\deg f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = d$ ) sont paramétrés par une  $\mathbf{k}$ -variété quasi-projective notée  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ . Les morphismes de  $\mathbb{P}^1$  dans  $X$  sont donc paramétrés par l'union disjointe de ces variétés :

$$\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X) = \coprod_{d \geq 0} \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$$

On note

$$\text{ev} : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X$$

le morphisme universel associé. Pour tout  $\mathbf{k}$ -schéma  $T$ , et pour toute famille de morphismes  $f_T : \mathbb{P}^1 \times T \longrightarrow X$ , il existe un unique  $\mathbf{k}$ -morphisme  $\varphi : T \longrightarrow \text{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$  tel que  $f_T = \text{ev} \circ (\text{Id} \times \varphi)$ .

**Remarque 1.8.** 1. La restriction de  $\text{ev}$  à  $X \times \{t\}$ , où  $t \in \text{Mor}(\mathbb{P}^1, X)(\mathbf{k})$ , induit un  $\mathbf{k}$ -morphisme  $f_t : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ . Réciproquement on notera  $[f]$  le  $\mathbf{k}$ -point de  $\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$  correspondant à un  $\mathbf{k}$ -morphisme  $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ .

2. On note

$$\text{ev}_d : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X$$

le morphisme induit par  $\text{ev}$  par restriction.

**Remarque 1.9.** D'après le Lemma 3.7 de [Deb01], lorsque  $\mathbf{k}$  est algébriquement clos, l'image de  $\overline{\text{ev}}_d : \mathbb{P}^1 \times \coprod_{0 < d' \leq d} \text{Mor}_{d'}(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X$  — c'est-à-dire l'ensemble des points de  $X$  par lesquels passe une courbe rationnelle contenue dans  $X$  de degré au plus  $d$  — est fermée.

### 1.3.2 Étude locale

Si  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est un morphisme le long de l'image duquel  $X$  est lisse, de dimension  $n$ , on a ([Deb01], Proposition 2.4)

$$T_{[f]} \text{Mor}(\mathbb{P}^1, X) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$$

De plus ([Deb01], Theorem 2.6), localement autour de  $[f]$ , le schéma  $\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$  peut être défini par  $h^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$  équations dans un schéma lisse de dimension  $h^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$ .

Soit  $x$  le point  $f(0)$ . Les morphismes de  $\mathbb{P}^1$  dans  $X$  qui envoient 0 sur  $x$  sont paramétrés par un sous-schéma  $\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x)$  de  $\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X)$  défini par au plus  $n$  équations. On a ([Deb01], 2.9)

$$T_{[f]} \text{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, (f^*T_X)(-1))$$

### 1.3.3 Le cas des droites

Nous aurons besoin de la proposition générale suivante :

**Proposition 1.10.** *Si  $Z$  est une  $\mathbf{k}$ -variété lisse,  $Y$  est une sous-variété lisse de  $Z$  et  $X$  est une sous-variété lisse de  $Y$ , on a une suite exacte de fibrés normaux :*

$$0 \longrightarrow N_{X/Y} \longrightarrow N_{X/Z} \longrightarrow (N_{Y/Z})|_X \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

**Démonstration.** On applique la proposition 19.1.5 (iii) de [Gro67c].

Si  $f : Y \rightarrow Z$  et  $g : X \rightarrow Y$  sont des immersions régulières de schémas localement noethériens, alors  $f \circ g : X \rightarrow Z$  est une immersion régulière. De plus la suite d'homomorphismes canoniques entre fibrés conormaux

$$0 \longrightarrow (\tilde{N}_{Y/Z})|_X \longrightarrow \tilde{N}_{X/Z} \longrightarrow \tilde{N}_{X/Y} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Les sous-variétés que l'on considère sont lisses, donc les hypothèses sont vérifiées. De plus les faisceaux sont localement libres de type fini. On peut donc prendre le dual de la suite exacte, ce qui nous donne le résultat voulu.  $\square$

En associant à toute courbe rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X \subset \mathbb{P}^N$  de degré 1 son image dans  $\mathbb{P}^N$ , on définit un morphisme

$$\text{Mor}_1(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow G(1, \mathbb{P}^N)$$

où  $G(1, \mathbb{P}^N)$  est la grassmannienne des droites dans  $\mathbb{P}^N$ . Son image paramètre les droites contenues dans  $X$ . Elle a une structure naturelle de schéma, que nous noterons  $F(X)$ .

L'application induite  $\rho : \text{Mor}_1(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow F(X)$  est le quotient ensembliste par l'action du groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^1$  (pour un quotient schématique, voir [Deb01] p.47). Soit  $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$  un paramétrage bijectif d'une droite  $\ell$ . Supposons  $X$  lisse de dimension  $n$  le long de  $\ell$ ; la différentielle de  $\rho$  au point  $[f]$  s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, T_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X) \xrightarrow{T_{[f]}\rho} H^0(\mathbb{P}^1, f^*N_{\ell/X}) \longrightarrow 0 \quad (1.2)$$

Puisque  $f$  induit un isomorphisme sur son image, nous pouvons considérer la même suite exacte sur  $\ell$ . L'espace tangent à  $F(X)$  en  $[f]$  est alors  $H^0(\ell, N_{\ell/X})$ .

De façon analogue, si  $x$  est un point de  $X$  fixé et  $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$  un paramétrage bijectif d'une droite contenue dans  $X$ , avec  $f(0) = x$ , le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^1$  qui fixent 0 opère sur le

$$\text{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x)$$

Le quotient est  $F(X, x)$ , sous-schéma de  $F(X)$  des droites passant par  $x$  et contenues dans  $X$  (pour une construction schématique, voir [Deb01] p.47). Les droites de  $\mathbb{P}^N$  passant par  $x$  sont paramétrées par un hyperplan de  $\mathbb{P}^N$ , dont  $F(X, x)$  est donc un sous-schéma. L'espace tangent à  $F(X, x)$  en  $[f]$  est isomorphe à  $H^0(\ell, N_{\ell/X}(-1))$ .

D'après la proposition 1.10 Il y a une suite exacte de fibrés normaux :

$$0 \longrightarrow N_{\ell/X} \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(1)^{\oplus(N-1)} \longrightarrow (N_{X/\mathbb{P}^N})|_\ell \longrightarrow 0 \quad (1.3)$$

et  $N_{\ell/X}$  est un fibré sur  $\mathbb{P}^1$ , qui donc peut s'écrire (théorème de Grothendieck, [Har83], V, exercice 2.6) :

$$N_{\ell/X} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_\ell(b_i) \quad (1.4)$$

avec  $b_1 \geq \dots \geq b_{n-1}$ . Par (1.3), nous obtenons  $b_1 \leq 1$ . Si  $b_{n-1} \geq -1$ , le schéma  $F(X)$  est lisse en  $[f]$  (le critère de [DM98] lemme 2.2 (ou [BVdV79]) est vérifié si  $H^1(\ell, N_{\ell/X}) = 0$ ). Si  $b_{n-1} \geq 0$ , le schéma  $F(X, x)$  est lisse en  $[f]$  pour tout point  $x$  de  $\ell$  (cf. [Deb01] p.48 :  $T_{[f]}F(X, x) \simeq H^0(N_{\ell/X}(-1))$ ).

## 1.4 Courbes rationnelles libres et très libres

**Définition 1.11.** Soient  $X$  une  $\mathbf{k}$ -variété lisse et  $s$  un entier positif. Une courbe rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est dite  $s$ -libre si  $f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-s)$  est engendré par ses sections globales.

**Notation 1.12.** Une courbe rationnelle 0-libre est dite *libre*. Une courbe rationnelle 1-libre est dite *très libre*.

**Remarque 1.13.** Soient  $X$  une  $\mathbf{k}$ -variété lisse de dimension  $n$  et  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  une courbe rationnelle. Le fibré  $f^*T_X$  se décompose en une somme de fibrés en droites :

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_n)$$

avec  $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ . La courbe  $f$  est  $s$ -libre si et seulement si  $a_n \geq s$ .

On obtient donc une caractérisation cohomologique en terme d'annulation d'un  $H^1$ .

**Corollaire 1.14.** Soient  $X$  une  $\mathbf{k}$ -variété lisse de dimension  $n$  et  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  une courbe rationnelle.

La courbe  $f$  est  $s$ -libre si et seulement si  $H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-s-1)) = 0$ .

**Remarque 1.15.** Avec les notations du § 1.3.3, dans le cas où  $X$  est contenue dans  $\mathbb{P}^N$  et que l'image de  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est une droite, on a

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i)$$

Cela résulte du fait que les  $b_i$  sont tous  $\leq 1$ . Le  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$  provient de  $T_{\mathbb{P}^1}$ , cf. la suite exacte (1.2).

Le résultat suivant est une adaptation de la proposition 1 de [Mad04].

**Proposition 1.16.** Soient  $X$  une  $\mathbf{k}$ -variété projective lisse sur un corps  $\mathbf{k}$ , et  $D$  une sous-variété lisse de codimension 1 qui, vue en tant que diviseur sur  $X$ , est ample. Si  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow D$  est une courbe rationnelle  $s$ -libre telle que  $\deg \tilde{f}^*D \geq s$ , alors  $\tilde{f} : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est encore  $s$ -libre, vue comme une courbe sur  $X$ .

Nous avons aussi un résultat dans le cas des morphismes surjectifs, qui nous servira pour l'application (3.2).

**Proposition 1.17.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux  $\mathbf{k}$ -variétés projectives lisses sur un corps  $\mathbf{k}$ . Si  $\pi : Y \rightarrow X$  est un morphisme génériquement fini, surjectif et génériquement lisse, et que  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow Y$  est une courbe  $s$ -libre passant par un point de  $Y$  en lequel  $\pi$  est lisse, alors la courbe  $\pi \circ f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est  $s$ -libre.*

**Démonstration.** En effet, le morphisme  $\alpha : f^*T_Y \rightarrow f^*\pi^*T_X$  est génériquement injectif. Son noyau, étant sans torsion, est nul, donc  $\alpha$  est un morphisme injectif entre fibrés vectoriels de même rang. Si tous les facteurs de  $f^*T_Y$  sont de degré  $\geq s$ , il en est de même pour ceux de  $f^*\pi^*T_X$ .  $\square$

## 1.5 Variétés uniréglées, séparablement uniréglées

Dans toute cette partie, le corps  $\mathbf{k}$  est supposé algébriquement clos. Pour étudier une variété définie sur un corps non algébriquement clos, on commencera par se placer sur la clôture algébrique.

**Définition 1.18.** Une  $\mathbf{k}$ -variété projective  $X$  de dimension  $n$  est dite *uniréglée* (resp. *séparablement uniréglée*) sur  $\mathbf{k}$  algébriquement clos s'il existe une  $\mathbf{k}$ -variété  $Y$  de dimension  $n - 1$  et une application rationnelle  $\mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$  dominante (resp. dominante séparable) définie sur  $\mathbf{k}$ .

Dans la définition précédente, nous pouvons supposer que l'application rationnelle est un morphisme (cf. [Deb01], Remarks 4.2 (3)). De la même façon qu'une variété  $\mathbf{k}$ -unirationnelle était dominée par une  $\mathbf{k}$ -variété  $\mathbf{k}$ -rationnelle, une  $\mathbf{k}$ -variété uniréglée est dominée par une  $\mathbf{k}$ -variété réglée. L'espace projectif étant uniréglé, une  $\mathbf{k}$ -variété  $\mathbf{k}$ -unirationnelle (ou  $\bar{\mathbf{k}}$ -unirationnelle) est uniréglée.

**Proposition 1.19.** *Une  $\mathbf{k}$ -variété projective lisse  $X$  sur un corps  $\mathbf{k}$  algébriquement clos est séparablement uniréglée si et seulement s'il existe une courbe rationnelle libre  $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ .*

**Démonstration.** Si  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est une courbe rationnelle de degré  $d$ , le morphisme  $\text{ev}_d : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \rightarrow X$  est lisse en un point de  $\mathbb{P}^1 \times \{[f]\}$  si et seulement si  $f$  est libre (Propositions 4.8 et 4.9 de [Deb01]).

S'il existe une courbe libre de degré  $d$  telle que  $X$  est lisse le long de  $f$ , le morphisme  $ev_d$  est génériquement lisse, car c'est une propriété ouverte, et est donc un morphisme dominant (pour des raisons de dimension). La variété  $X$  étant irréductible et réduite, le morphisme  $ev_d : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X$  se factorise : il existe une composante irréductible  $Y$  de  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)_{\text{réd}}$  telle que  $ev_{d|\mathbb{P}^1 \times Y}$  soit dominante, et génériquement lisse. Donc  $ev_{d|\mathbb{P}^1 \times Y}$  est séparable (proposition 4.10).

Réciproquement, supposons que  $X$  est séparablement uniréglée : il existe une  $\mathbf{k}$ -variété  $Y$  de dimension  $\dim X - 1$  telle que l'application  $\mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$  soit dominante séparable. La  $\mathbf{k}$ -variété  $X$  est projective, donc on peut trouver  $Y$  telle que l'application précédente soit un vrai morphisme.

Il se factorise alors par  $ev_d$  pour un certain  $d > 0$  (on utilise la propriété universelle de  $ev$  et la propriété de  $X$ , cf. [Deb01] Remarks 4.2 (3)) :

$$\mathbb{P}^1 \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \xrightarrow{ev_d} X$$

L'application  $ev_d : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X$  est donc dominante. La variété  $X$  étant irréductible et réduite, le morphisme  $ev_d : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X$  se factorise : il existe une composante irréductible  $Y'$  de  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)_{\text{réd}}$  telle que  $ev_{d|\mathbb{P}^1 \times Y'}$  soit dominante :

$$\mathbb{P}^1 \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times Y' \xrightarrow{ev_d} X$$

L'application de départ est de plus séparable donc l'application  $ev_{d|\mathbb{P}^1 \times Y'}$  est séparable par la proposition 4.14, c'est-à-dire génériquement lisse par la proposition 4.10. L'application  $ev_d$  est donc lisse en un point  $(t, [f])$  général de  $\mathbb{P}^1 \times Y'$ . La courbe  $f$  est alors une courbe libre.  $\square$

On dit qu'un point général d'une variété  $X$  vérifie une propriété si l'ensemble des points de  $X$  vérifiant cette propriété contient un ouvert dense. De même, une hypersurface de  $\mathbb{P}^N$  générale de degré  $d$  vérifie une propriété si l'ensemble des équations  $P \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d))$  des hypersurfaces vérifiant cette propriété contient un ouvert dense.

**Proposition 1.20.** *Soit  $\mathbf{k}$  un corps algébriquement clos. Une hypersurface de  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^N$  générale de degré  $d \leq N - 1$  est séparablement uniréglée par des droites.*

**Démonstration.** Il suffit de trouver une droite rationnelle libre, puis d'utiliser la démonstration de la proposition 1.19. Lorsque  $d \leq N - 1$ , c'est la

Proposition 2.13 de [Deb01] (qui donne aussi le résultat pour les intersections complètes) : pour une droite  $\ell$  générale contenue dans  $X$  on a

$$N_{\ell/X} \simeq \mathcal{O}_{\ell}(1)^{N-1-d} \oplus \mathcal{O}_{\ell}^{d-1}$$

Cette droite est donc libre :  $X$  est séparablement uniréglée par des droites.  $\square$

## 1.6 Variétés rationnellement connexes, séparablement rationnellement connexes

Dans toute cette partie, le corps  $\mathbf{k}$  est supposé algébriquement clos. Les notions étudiées sont géométriques.

**Définition 1.21.** Une  $\mathbf{k}$ -variété projective  $X$  de dimension  $n$  est dite *rationnellement connexe* (resp. *séparablement rationnellement connexe*) sur  $\mathbf{k}$  algébriquement clos s'il existe une  $\mathbf{k}$ -variété  $M$  et une application rationnelle  $e : \mathbb{P}^1 \times M \dashrightarrow X$  telle que l'application rationnelle

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M &\dashrightarrow X \times X \\ (t, t', z) &\longmapsto (e(t, z), e(t', z)) \end{aligned}$$

soit dominante (resp. dominante séparable).

Dans la définition précédente, nous pouvons supposer que l'application rationnelle  $e$  est un morphisme (cf. [Deb01], Remarks 4.4 (2)). Si une  $\mathbf{k}$ -variété est séparablement unirationnelle, elle est séparablement rationnellement connexe. Si une  $\mathbf{k}$ -variété est séparablement rationnellement connexe, elle est séparablement uniréglée.

**Remarque 1.22.** Si  $X$  est une  $\mathbf{k}$ -variété projective rationnellement connexe sur un corps algébriquement clos  $\mathbf{k}$ , l'évaluation

$$\mathbb{P}^1 \times \text{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x) \longrightarrow X$$

est dominante pour un  $x$  général dans  $X(\mathbf{k})$  (cf. [Deb01] Remarks 4.4(2)).

**Proposition 1.23.** Une variété projective  $X$  lisse sur un corps  $\mathbf{k}$  est séparablement rationnellement connexe si et seulement s'il existe une courbe rationnelle  $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$  très libre dans  $X$ .

**Démonstration.** Si  $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$  est une courbe rationnelle de degré  $d$ , le morphisme  $\varepsilon_d : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X \times X$  qui à  $(t, t', [f])$  associe  $(\text{ev}_d(t, [f]), \text{ev}_d(t', [f]))$  est lisse en un point de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \{[f]\}$  si et seulement si  $f$  est très libre (Propositions 4.8 et 4.9 de [Deb01]).

S'il existe une courbe très libre de degré  $d$  telle que  $X$  est lisse le long de  $f$ , le morphisme  $\varepsilon_d$  est donc génériquement lisse, car c'est une propriété ouverte, et est donc un morphisme dominant. La variété  $X \times X$  étant irréductible et réduite, ce morphisme se factorise : il existe une composante irréductible  $M$  de  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)_{\text{réd}}$  telle que  $\varepsilon_d|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M}$  soit dominante, et génériquement lisse. Donc  $\varepsilon_d|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times Y}$  est séparable (proposition 4.10).

Réciproquement, supposons que  $X$  est séparablement rationnellement connexe : il existe une  $\mathbf{k}$ -variété  $M$  telle que l'application  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M \dashrightarrow X \times X$  soit dominante séparable. La  $\mathbf{k}$ -variété  $X$  est projective, donc on peut trouver  $M$  telle que l'application précédente soit un morphisme.

Il se factorise alors par  $\varepsilon_d$  pour un certain  $d > 0$  (on utilise la propriété universelle de  $\text{ev}$  et la propriété de  $X$ , cf. [Deb01] Remarks 4.2 (3)) :

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \xrightarrow{\varepsilon_d} X \times X$$

L'application  $\varepsilon_d$  est donc dominante. Le schéma  $X \times X$  étant intègre, le morphisme  $\varepsilon_d : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow X \times X$  se factorise : il existe une composante irréductible  $M'$  de  $\text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)_{\text{réd}}$  telle que  $\varepsilon_d|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M'}$  soit dominante :

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M' \xrightarrow{\varepsilon_d} X \times X$$

L'application de départ est de plus séparable donc l'application  $\varepsilon_d|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times M'}$  est séparable par la proposition 4.14, c'est-à-dire génériquement lisse par la proposition 4.10. L'application  $\varepsilon_d$  est donc lisse en un point  $(t_1, t_2, [f])$  général. La courbe  $f$  est alors une courbe très libre.  $\square$

Toute  $\mathbf{k}$ -variété de Fano est rationnellement connexe par chaînes (cf. [KMM92], [Cam92]). Ce résultat s'obtient grâce au bend and break au-dessus d'un corps de caractéristique positive. Sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, elle contient donc une courbe rationnelle très libre, et est séparablement rationnellement connexe. Mais en caractéristique  $p$  ce n'est pas forcément le cas.

Pour chaque entier premier  $p$ , Kollár a construit des exemples explicites de  $\mathbb{F}_p$ -variétés de Fano qui ne sont pas séparablement uniréglées, c'est-à-dire

qu'elles n'ont aucune courbe rationnelle libre (définie sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ )<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Voir [Kol99], Theorem V.5.11 et Theorem V.5.13 ; ce sont des revêtements cycliques de  $\mathbb{P}^{2n}$  de degré  $p$  ramifiés le long d'une hypersurface de degré  $p(d+1)$ , avec  $\frac{2n}{p} > d > \frac{2n+1}{p-1} - 1$ .



# Chapitre 2

## Unirationalité séparable des hypersurfaces de très petit degré

Soit  $X$  une hypersurface lisse de degré  $d$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^N$ , définie sur un corps  $\mathbf{k}$ .

Si  $X$  est *générale* et que son degré  $d$  est très petit devant  $N$ , il est classique que  $X$  est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle. Nous reprenons en 2.1 la belle adaptation moderne de Paranjape et Srinivas de la démonstration originale de Morin et Predonzan ([Mor40] et [Pre49]), en remarquant qu'elle montre en fait que  $X$  est  $\mathbf{k}$ -séparablement unirational (cf. th. 2.3).

Toujours pour  $N \gg d$ , on sait aussi qu'en caractéristique nulle, toute hypersurface lisse  $X$  de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^N$  est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle ([HMP98]). On ne sait pas si ce résultat subsiste en caractéristique non nulle.

On étudie ensuite la séparabilité des paramétrages unirationnels classiques des hypersurfaces cubiques.

### 2.1 Unirationalité séparable des hypersurfaces de très petit degré

On se limite ici au cas des hypersurfaces pour garder des notations raisonnables, mais le même argument s'applique aux intersections complètes.

Soient  $\mathbf{k}$  un corps algébriquement clos et  $V$  un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel de dimension  $N + 1$ . Soit  $X$  une hypersurface de degré  $d > 1$  dans  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ ,

définie sur  $\mathbf{k}$ . On suppose qu'elle contient un  $\mathbf{k}$ -espace linéaire  $L$  de dimension  $r > 0$  le long duquel elle est lisse.

La construction suivante est classique. Soit  $\varepsilon : \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}$  l'éclatement de  $L$ . Si on choisit un  $\mathbf{k}$ -espace linéaire  $M$  dans  $\mathbb{P}$ , de dimension  $N - r - 1$  et disjoint de  $L$ , on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}} = \{(x, m) \in \mathbb{P} \times M \mid x \in \langle m, L \rangle\} & \xrightarrow{q} & M \\ \varepsilon \downarrow & & \\ \mathbb{P} & & \end{array}$$

où  $q^{-1}(m) = \langle m, L \rangle \times \{m\}$ .

Le diviseur exceptionnel  $E$  de  $\varepsilon$  est isomorphe à  $L \times M$  et la fibre générique  $\tilde{\mathbb{P}}_{\mathbf{k}(M)}$  de  $q$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}(M)}^{r+1}$ . Si  $\tilde{X}$  est le transformé strict de  $X$  par  $\varepsilon$ , la fibre générique  $\tilde{X}_{\mathbf{k}(M)}$  de  $q|_{\tilde{X}}$  est une hypersurface de degré  $d - 1$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}(M)}^{r+1}$ .

Remarquons que  $\tilde{X} \cap E$  est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de  $L$  dans  $X$ . Il domine  $M$  et est isomorphe à  $\mathbb{P}(N_{L/X})$ ; il est donc  $\mathbf{k}$ -rationnel.

**Calculs en coordonnées.** Si on prend des coordonnées  $(x_0, \dots, x_N)$  telles que  $L$  a pour équations  $x_{r+1} = \dots = x_N = 0$  et  $M$  pour équations  $x_0 = \dots = x_r = 0$ , une équation de  $X$  peut s'écrire

$$P = x_{r+1}P_{r+1} + \dots + x_N P_N$$

La lissité de  $X$  le long de  $L$  est équivalente au fait que les polynômes  $P_j|_L = \frac{\partial P}{\partial x_j}|_L$ , pour  $j$  décrivant  $\{r+1, \dots, N\}$ , n'ont pas de zéro commun (géométrique) dans  $L$ . On a

$$\tilde{\mathbb{P}} = \{((x_0, \dots, x_N), (m_{r+1}, \dots, m_N)) \mid x_i m_j = x_j m_i \text{ pour } r+1 \leq i, j \leq N\}$$

et

$$\mathbf{k}(M) = \mathbf{k}(m_{r+2}, \dots, m_N)$$

avec  $m_j = \frac{x_j}{x_{r+1}}$ . L'isomorphisme  $\tilde{\mathbb{P}}_{\mathbf{k}(M)} \simeq \mathbb{P}_{\mathbf{k}(M)}^{r+1}$  est donné par

$$(x_0, \dots, x_N) \longmapsto (x_0, \dots, x_{r+1})$$

d'inverse

$$(x_0, \dots, x_{r+1}) \longmapsto (x_0, \dots, x_{r+1}, x_{r+1}m_{r+2}, \dots, x_{r+1}m_N)$$

Le transformé total de  $X$  dans  $\tilde{\mathbb{P}}$  est donc défini par

$$x_{r+1}P_{r+1} + \cdots + x_N P_N = 0$$

et sa fibre générique est le  $\mathbf{k}(M)$ -schéma défini par

$$x_{r+1}P_{r+1} + x_{r+1}m_{r+2}P_{r+2} + \cdots + x_{r+1}m_N P_N = 0$$

dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}(M)}^{r+1}$ . Il est réunion de  $L \times_{\mathbf{k}(M)} \mathbf{k}(M)$  (défini par  $x_{r+1} = 0$ ) et de la fibre générique  $\tilde{X}_{\mathbf{k}(M)}$ , définie par l'équation

$$(P_{r+1} + m_{r+2}P_{r+2} + \cdots + m_N P_N)(x_0, \dots, x_{r+1}, x_{r+1}m_{r+2}, \dots, x_{r+1}m_N) = 0$$

de degré  $d - 1$  à coefficients dans  $\mathbf{k}(M)$ .

**Exemple 2.1** (Cas des cubiques). Lorsque  $X$  est une hypersurface cubique qui contient une droite  $\ell$  le long de laquelle elle est lisse, la construction précédente exprime  $\tilde{X}$  comme une fibration au-dessus de  $M \simeq \mathbb{P}^{N-2}$  dont la fibre générique est une conique. La  $\mathbf{k}$ -variété  $\mathbf{k}$ -rationnelle  $\tilde{X} \cap E = \mathbb{P}(N_{\ell/X})$  en est une bisection rationnelle. Le changement de base  $\tilde{X} \cap E \rightarrow M$  donne un revêtement génériquement fini de  $\tilde{X}$  de degré 2, qui est rationnel. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(T_X|_{\ell}) & \xrightarrow{\pi_{\ell}} & X \\ \varepsilon' \uparrow & & \uparrow \varepsilon \\ (\tilde{X} \cap E) \times_M X & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow q|_{\tilde{X}} \\ \tilde{X} \cap E = \mathbb{P}(N_{\ell/X}) & \longrightarrow & M \end{array}$$

où  $\varepsilon'$  est birationnel et où  $\pi_{\ell}$  est une application rationnelle dominante de degré 2 qui sera construite et étudiée plus en détails en 2.2.

L'exemple suivant montre que l'hypersurface  $\tilde{X}_{\mathbf{k}(M)}$  peut n'être pas *lisse* le long de  $L \times_{\mathbf{k}(M)} \mathbf{k}(M)$ .

**Exemple 2.2.** Soit  $X \subset \mathbb{P}^N$  l'hypersurface cubique de Fermat (lisse) sur un corps  $\mathbf{k}$  de caractéristique 2, définie par

$$y_0^3 + \cdots + y_N^3 = 0$$

Posons, pour  $r \leq N/2 - 1$ ,

$$\begin{aligned} x_j &= y_j && \text{pour } j \in \{0, \dots, r, 2r+2, \dots, N\} \\ x_j &= y_{j-r-1} + y_j && \text{pour } j \in \{r+1, \dots, 2r+1\} \end{aligned}$$

et notons  $L$  le sous-espace projectif de dimension  $r$  contenu dans  $X$  défini par  $x_{r+1} = \dots = x_N = 0$ . On a

$$\begin{aligned} P_j &= y_{j-r-1}^2 + y_{j-r-1}^2 y_j + y_j^2 \\ &= x_{j-r-1}^2 + x_{j-r-1}^2 x_j + x_j^2 && \text{pour } j \in \{r+1, \dots, 2r+1\} \\ P_j &= y_j^2 = x_j^2 && \text{pour } j \in \{2r+2, \dots, N\} \end{aligned}$$

La fibre générique  $\tilde{X}_{\mathbf{k}(M)}$  est définie par l'équation (où  $m_{r+1} = 1$ )

$$\sum_{j=0}^r m_{r+1+j} (x_j^2 + m_{r+1+j} x_j x_{r+1} + m_{r+1+j}^2 x_{r+1}^2) + \sum_{j=2r+2}^N m_j^3 x_{r+1}^2 = 0$$

On vérifie que cette quadrique est singulière le long de

$$x_{r+1} = \sum_{j=0}^r m_{r+1+j}^2 x_j = 0$$

Pour  $r \geq 2$ , elle n'est pas lisse.

En revanche, si on fait l'hypothèse que  $P_{r+1}|_L, \dots, P_N|_L$  engendrent l'espace des polynômes de degré  $d-1$  sur  $L$ , le schéma  $\tilde{X}_{\mathbf{k}(M)}$  est bien lisse le long de  $L \times_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(M)$ , car c'est le cas au-dessus d'un point général de  $M$ .

On définit maintenant, pour tout entier  $d > 0$ , des entiers  $r(d)$  de la façon suivante : on pose  $r(1) = 0$  puis, pour  $d > 0$ ,

$$r(d+1) = r(d) + \binom{d+r(d)}{r(d)}$$

On a par exemple

$$r(2) = 1, \quad r(3) = 4, \quad r(4) = 39$$

**Théorème 2.3.** *Soit  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^N$  une hypersurface de degré  $d$  définie sur un corps  $\mathbf{k}$  quelconque par une équation  $P \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d))$ . On suppose que  $X$  contient un  $\mathbf{k}$ -sous-espace linéaire  $L$  de dimension  $r \geq r(d-1)$  et que les polynômes*

$$\frac{\partial P}{\partial x_0} \Big|_L, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_N} \Big|_L$$

*engendrent  $H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1))$ . Alors  $X$  est  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelle.*

Sous les hypothèses du théorème, l'application  $\mathbf{k}$ -linéaire

$$\begin{aligned} \phi_{X,L} : \quad \mathbf{k}^{N+1} &\longrightarrow H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1)) \\ (a_0, \dots, a_N) &\longmapsto \sum_{j=0}^N a_j \frac{\partial P}{\partial x_j} \Big|_L \end{aligned}$$

est donc *surjective*. Nous utiliserons aussi la transformation projective associée

$$\tilde{\phi}_{X,L} : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1))$$

qui est donc dominante.

Avec les notations précédentes,  $\frac{\partial P}{\partial x_j} \Big|_L$  est nul pour  $j \in \{0, \dots, r\}$ , de sorte que l'on peut aussi considérer  $\tilde{\phi}_{X,L}$  comme une application de  $M = \mathbb{P}^{N-r-1}$  dans  $\mathbb{P}H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1))$ .

**Corollaire 2.4.** *Soit  $\mathbf{k}$  un corps algébriquement clos. Si  $N \geq r(d)$ , une hypersurface de  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^N$  générale<sup>1</sup> de degré  $d$  est  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelle.*

**Démonstration.** En effet, une telle hypersurface  $X$  contient un sous-espace linéaire  $L$  de dimension  $r(d-1)$  et l'application  $\phi_{X,L}$  est surjective ([DM98], théorème 2.1 et lemme 7.5).  $\square$

**Remarque 2.5.** La surjectivité de  $\phi_{X,L}$  entraîne que  $X$  est lisse le long de  $L$ . On a une suite exacte (proposition 1.10)

$$0 \longrightarrow N_{L/X} \longrightarrow \mathcal{O}_L(1)^{\oplus(N-r)} \longrightarrow \mathcal{O}_L(d) \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit que la surjectivité de  $\phi_{X,L}$  est équivalente à l'annulation de  $H^1(L, N_{L/X}(-1))$ . En particulier, lorsque  $L$  est une droite et  $X$  une cubique, cela correspond au cas où la droite  $L$  est de type I (cf. § 2.2).

---

<sup>1</sup>cf. § 1.5 pour une définition

Si  $\ell$  est une droite générale dans  $L$ , la surjectivité de  $\phi_{X,L}$  entraîne celle de  $\phi_{X,\ell}$ , donc l'annulation de  $H^1(\ell, N_{\ell/X}(-1))$ , de sorte que la droite  $\ell$  est *libre* dans  $X$ . La  $\mathbf{k}$ -variété  $X$  est donc séparablement uniréglée par des droites. En caractéristique non nulle, il existe des hypersurfaces lisses de degré  $\ll N$  qui n'ont pas cette propriété (*cf.* § 3.2, remarque 3.7).

**Démonstration du théorème 2.3.** On procède par récurrence sur  $d$ , le cas  $d = 2$  étant facile : une quadrique possédant un  $\mathbf{k}$ -point lisse est  $\mathbf{k}$ -rationnelle.

Supposons  $d \geq 3$ . Sous nos hypothèses, l'hypersurface  $\tilde{X}_{\mathbf{k}(M)} \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}(M)}^{r+1}$  de degré  $d-1$  est lisse (remarque 2.5). Lorsque  $r \gg h$ , une telle hypersurface, sur un corps algébriquement clos, contient un sous-espace linéaire de dimension  $h$  (*cf.* [DM98] théorème 2.1). On va s'arranger pour que ce soit le cas ici, après une extension judicieuse du corps de base  $\mathbf{k}(M)$ . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} J & \dashrightarrow & I & \xrightarrow{q} & G(h, L) \\ p_J \downarrow & \square & p_I \downarrow & & \\ M = \mathbb{P}^{N-r-1} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_{X,L}} & \mathbb{P}H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1)) & & \end{array}$$

où  $I$  est la variété d'incidence. Le morphisme  $q$  est un fibré vectoriel, de sorte que  $J$  est  $\mathbf{k}$ -rationnelle, et  $p_I$  (donc aussi  $p_J$ ) est surjective séparable lorsque<sup>2</sup>

$$(r-h)(h+1) \geq \binom{d+h-1}{h} \quad (2.1)$$

Au point générique de  $I$  correspondent une hypersurface  $V_I \subset L \times_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(I)$  de degré  $d$  et un  $\mathbf{k}(I)$ -espace linéaire  $\Lambda_I \subset V_I$  de dimension  $h$ . Notons  $V_J$  et  $\Lambda_J$  leur images inverses dans  $L \times_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(J)$ .

On a noté  $\tilde{X}$  le transformé strict de  $X$  dans l'éclatement de  $L$ . Son intersection avec le diviseur exceptionnel  $L \times M$  a pour équation

$$(m_{r+1}P_{r+1} + \cdots + m_N P_N)(x_0, \dots, x_r, 0, \dots, 0) = 0$$

C'est donc l'image inverse par  $\tilde{\phi}_{X,L}$  de l'hypersurface universelle sur  $\mathbb{P}H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1))$ . En d'autres termes, si on considère le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p_Y} & \tilde{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow q|_{\tilde{X}} \\ J & \xrightarrow{p_J} & M \end{array}$$

<sup>2</sup>Cela résulte par exemple de la démonstration du théorème 2.1 de [DM98], où il est montré que sous l'hypothèse (2.1), le lieu où la différentielle de  $p_I$  n'est pas surjective ne domine pas  $\mathbb{P}H^0(L, \mathcal{O}_L(d-1))$ .

la fibre générique  $Y_{\mathbf{k}(J)}$  est une hypersurface lisse de degré  $d - 1$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}(J)}^{r+1}$  dont l'intersection avec le  $r$ -plan  $L \times_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(J)$  est  $V_J$ . Elle contient donc le  $h$ -plan  $\Lambda_J$ .

Il reste à montrer que l'application

$$\phi_{Y_{\mathbf{k}(J)}, \Lambda_J} : \mathbf{k}(J)^{r+2} \longrightarrow H^0(\Lambda_J, \mathcal{O}_{\Lambda_J}(d-2))$$

est surjective. Posons

$$\Omega = \{(Z, \Lambda) \in I \mid \phi_{Z, \Lambda} \text{ est surjective}\}$$

C'est un ouvert de  $I$  dont on vérifie qu'il est non vide dès que les nombres le permettent, c'est-à-dire dès que

$$r - h \geq \binom{d + h - 2}{h}$$

Cette condition est réalisée avec  $h = r(d - 2)$ ; elle entraîne (2.1). L'ouvert  $\Omega$  contient alors le point générique de  $I$ , ce qui signifie que l'application  $\phi_{V_I, \Lambda_I}$  est surjective, et il en est de même pour  $\phi_{Y_{\mathbf{k}(J)}, \Lambda_J}$ .

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence : l'hypersurface  $Y_{\mathbf{k}(J)}$  est  $\mathbf{k}(J)$ -séparablement unirrationnelle. On a donc une application dominante séparable

$$\mathbb{A}_{\mathbf{k}(J)}^r \dashrightarrow Y_{\mathbf{k}(J)}$$

Comme  $p_J$  est dominante séparable, l'application  $Y_{\mathbf{k}(J)} \rightarrow \tilde{X}_{\mathbf{k}(M)}$  induite par  $p_Y$  l'est aussi. Comme  $J$  est  $\mathbf{k}$ -rationnel, on en déduit que  $X$  est  $\mathbf{k}$ -séparablement unirrationnelle.  $\square$

## 2.2 Unirationalité séparable des hypersurfaces cubiques contenant une droite

Il existe plusieurs constructions classiques qui prouvent l'unirationalité de toutes les hypersurfaces cubiques de dimension au moins 2; on en trouvera une description détaillée dans [Man86] et [Kol99]. Dans ce paragraphe, nous étudions le cas des hypersurfaces cubiques contenant au moins une droite  $\mathbf{k}$ -rationnelle puis, dans le paragraphe 2.3, le cas des hypersurfaces

cubiques contenant un point  $\mathbf{k}$ -rationnel. Ces deux conditions sont automatiques lorsque le corps  $\mathbf{k}$  est algébriquement clos.

Le théorème 2.3 montre qu'une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 3 contenant une droite de type I (voir plus bas la définition) est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle.

Soit  $X \subset \mathbb{P}^N$  une hypersurface cubique lisse définie sur un corps  $\mathbf{k}$ . On suppose que  $X$  contient une droite  $\ell$  aussi définie sur  $\mathbf{k}$ . La construction qui suit est une variante de la précédente (§ 2.1). C'est une construction classique. Les résultats nouveaux concernent uniquement les questions de séparabilité.

### Construction de l'application $\pi_\ell$

La  $\mathbf{k}$ -variété  $\mathbb{P}(T_X|_\ell)$  est l'espace total du projectifié d'un fibré vectoriel au-dessus d'un  $\mathbb{P}^1$ . Elle est donc  $\mathbf{k}$ -rationnelle. On construit une application rationnelle

$$\pi_\ell : \mathbb{P}(T_X|_\ell) \dashrightarrow X$$

de degré 2 de la façon suivante.

Un point de  $\mathbb{P}(T_X|_\ell)$  est un couple  $(x, \ell_x)$ , où  $x$  est un point de  $\ell$  et  $\ell_x$  une droite projective dans  $\mathbb{T}_{X,x}$ . La droite  $\ell_x$  a contact d'ordre au moins 2 avec  $X$  en  $x$ , donc recoupe  $X$  en un troisième point qui est  $y = \pi_\ell(x, \ell_x)$ .

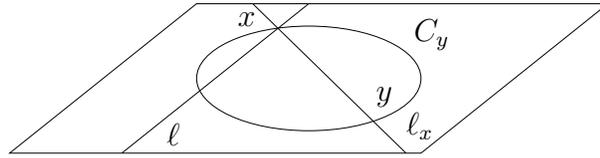


FIG. 2.1 – Section de  $X$  dans le plan  $\langle \ell, \ell_x \rangle$

L'hypersurface cubique  $X$  étant lisse en  $x$ , il existe toujours une telle droite  $\ell_x$  qui n'est pas contenue dans  $X$  (on aurait sinon  $\mathbb{T}_{X,x} \subset X$ ); on définit donc bien ainsi une *application rationnelle*. L'ouvert de définition est  $\{(x, \ell_x) \in \mathbb{P}(T_X|_\ell) \mid \ell_x \not\subset \mathbb{T}_{X,x}\}$ . Lorsqu'on parlera de fibre de  $\pi_\ell$ , ce sera en tant qu'application définie sur cet ouvert.

Pour un point  $y$  de  $X$  pour lequel le 2-plan  $\Pi_y = \langle \ell, y \rangle$  n'est pas contenu dans  $X$  (c'est le cas pour  $y$  général dans  $X$ , puisque  $X$  serait sinon un cône de sommet  $\ell$ ), l'intersection  $\Pi_y \cap X$  est réunion de  $\ell$  et d'une conique  $C_y$  passant par  $y$ . Tout point  $x \in \ell \cap C_y$  est singulier sur  $\Pi_y \cap X$ , donc  $\Pi_y \subset \mathbb{T}_{X,x}$  et  $y = \pi_\ell(x, \langle x, y \rangle)$ . L'application  $\pi_\ell$  est donc *dominante*.

**Lemme 2.6.** *Pour un point général  $y$  de  $X$ , la conique  $C_y$  est lisse et  $\pi_\ell^{-1}(y) = \ell \cap C_y$  (schématiquement). En particulier  $\pi_\ell : \mathbb{P}(T_X|_\ell) \dashrightarrow X$  est une paramétrisation  $\mathbf{k}$ -rationnelle de degré 2.*

**Démonstration.** Considérons l'application

$$\begin{aligned} X - \ell &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \langle \ell, x \rangle \cap M \end{aligned}$$

où  $M$  est un sous-espace linéaire de codimension 2 de  $\mathbb{P}^N$  qui ne rencontre pas  $\ell$ , et qui paramètre donc les 2-plans de  $\mathbb{P}^N$  contenant  $\ell$ . La fibre d'un tel 2-plan  $\Pi$  non contenu dans  $X$  (et il en existe !) est la courbe  $(\Pi \cap X) - \ell$ . Elle est connexe.

Comme  $X - \ell$  est lisse et que  $M$  est irréductible, une fibre générale est irréductible ([Deb01], p. 116). Il nous reste à montrer que pour  $\Pi$  général, l'intersection  $\Pi \cap X$  ne contient pas de droite double.

Si  $y$  est dans l'image par  $\pi_\ell$  de l'ouvert  $\{(x, \ell_x) \in \mathbb{P}(T_X|_\ell) \mid \ell_x \not\subset \mathbb{T}_{X,x}\}$ , le point  $x$  est singulier sur  $\Pi_y \cap X$  mais  $\ell_x$  n'est pas contenue dans cette intersection. En particulier, la conique  $C_y$  n'est pas une droite double dans  $\Pi_y \cap X$ .

Si  $\ell$  est une droite double dans  $\Pi \cap X$ , cette intersection est singulière le long de  $\ell$ , c'est-à-dire que  $\Pi$  est contenu dans  $\mathbb{T}_{X,x}$  pour tout  $x$  dans  $\ell$ , ce qui n'est pas le cas pour  $\Pi$  général, puisque l'on aurait sinon  $\mathbb{P}^N \subset \mathbb{T}_{X,x}$ .  $\square$

Nous allons obtenir le résultat suivant, qui concerne la séparabilité de l'application  $\pi_\ell$ .

**Proposition 2.7.** *Supposons  $N \geq 3$ . Soit  $X \subset \mathbb{P}^N$  une hypersurface cubique lisse définie sur un corps  $\mathbf{k}$  algébriquement clos. Si, pour aucune droite  $\ell$  contenue dans  $X$ , l'application rationnelle  $\pi_\ell : \mathbb{P}(T_X|_\ell) \dashrightarrow X$  définie en (2.2) n'est séparable, la caractéristique de  $\mathbf{k}$  est 2 et  $X$  est projectivement équivalente à l'hypersurface cubique de Fermat.*

**Remarque 2.8.** Si  $N \geq 4$  et  $X \subset \mathbb{P}^N$  est une hypersurface cubique lisse contenant un point  $\mathbf{k}$ -rationnel (par exemple si elle est définie sur un corps algébriquement clos), on montrera (§ 2.3, proposition 2.34) que l'application rationnelle fournie par la construction de Segre-Kollár est toujours séparable, donc que  $X$  est toujours séparablement  $\mathbf{k}$ -unirationnelle.

**Remarque 2.9.** Si  $X \subset \mathbb{P}^3$  est une surface cubique lisse définie sur un corps algébriquement clos, on sait qu'elle est toujours rationnelle. En revanche, si le corps est arbitraire, même si  $X(\mathbf{k}) \neq \emptyset$ , ce n'est pas le cas en général (cf. [Man86]). En ce qui concerne la dimension supérieure, Clemens et Griffiths montrent dans [CG72] qu'une hypersurface cubique lisse dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$  est unirationnelle mais pas rationnelle.

L'application  $\pi_\ell$  est de degré 2. Si l'hypersurface cubique  $X$  n'est pas  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelle, la caractéristique du corps  $\mathbf{k}$  est donc 2, aucune des applications  $\pi_\ell$  définies ci-dessus n'est séparable, quel que soit le choix de la droite  $\ell$ . Cela signifie que si  $y$  est un point de  $X$  tel que dans le plan  $\Pi_y$ , la conique résiduelle  $C_y$  est lisse (cas général), alors elle est tangente à  $\ell$ . On a le dessin suivant :

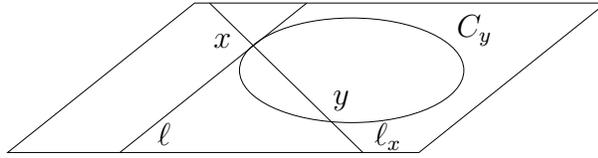


FIG. 2.2 – Section de  $X$  dans le plan  $\langle \ell, \ell_x \rangle$

### Fibré normal aux droites

On rappelle ([CG72]) que l'on a les possibilités suivantes de décompositions pour le fibré normal  $N_{\ell/X}$  à  $\ell$  dans  $X$  :

- soit

$$N_{\ell/X} \simeq \mathcal{O}_\ell^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_\ell(1)^{\oplus (N-4)}$$

et la droite  $\ell$  est dite *de type I*,

- soit

$$N_{\ell/X} \simeq \mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)^{\oplus (N-3)}$$

et la droite  $\ell$  est dite *de type II*.

On a noté (cf. § 1.3.3)  $F(X)$  le schéma des droites contenues dans  $X$  et  $F(X, x)$  le schéma des droites contenues dans  $X$  et qui passent par un point  $x$  de  $X$ . Ce dernier peut être vu comme un sous-schéma d'un hyperplan de  $\mathbb{P}^N$  ne contenant pas  $x$ . On a

$$T_{F(X), [\ell]} \simeq H^0(\ell, N_{\ell/X}) \quad \text{et} \quad T_{F(X, x), [\ell]} \simeq H^0(\ell, N_{\ell/X}(-1))$$

Pour une hypersurface  $X$  de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^N$ , un calcul dans des coordonnées locales de  $G(1, \mathbb{P}^N)$  nous donne  $d+1$  équations explicites définissant  $F(X)$  dans un espace de dimension  $2N-2$  (cf. [BVdV79]). Donc le schéma  $F(X)$  est toujours au moins de la dimension attendue  $2N-d-3$ .

Donc en particulier, pour  $N \geq 3$ , la dimension de  $F(X)$  en  $[\ell]$  est toujours la dimension attendue  $2N-6$  et le schéma  $F(X)$  est lisse de dimension  $2N-6$ . La dimension de  $F(X, x)$  est donc  $\geq N-4$  en tout point.

En revanche, pour  $N \geq 4$ , la dimension de l'espace tangent à  $F(X, x)$  en  $[\ell]$  est  $N-4$  si  $\ell$  est de type I, et  $N-3$  si  $\ell$  est de type II.

La suite exacte des fibrés normaux (proposition 1.10) s'écrit

$$0 \rightarrow N_{\ell/X} \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell}(1)^{N-1} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{\ell}(3) \rightarrow 0$$

On se place dans des coordonnées  $(x_0, \dots, x_N)$  telles que  $\ell$  ait pour équations  $x_2 = \dots = x_N = 0$ , tandis que le sous-espace  $M$  a pour équations  $x_0 = x_1 = 0$ . Une équation  $P$  de  $X$  peut s'écrire

$$P = x_2 P_2 + \dots + x_N P_N$$

et  $P_i|_{\ell} = \frac{\partial P}{\partial x_i}|_{\ell}$ . L'application

$$H^0(u(-1)) : H^0(\ell, \mathcal{O}_{\ell})^{N-1} \longrightarrow H^0(\ell, \mathcal{O}_{\ell}(2))$$

est alors donnée par

$$(\lambda_2, \dots, \lambda_N) \longmapsto \lambda_2 \frac{\partial P}{\partial x_2}|_{\ell} + \dots + \lambda_N \frac{\partial P}{\partial x_N}|_{\ell}$$

Pour les détails des calculs précédents, voir [BVdV79] proposition 3. La droite  $\ell$  est de type I si et seulement si  $H^1(\ell, N_{\ell/X}(-1)) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si cette application est surjective<sup>3</sup>.

Un point  $y$  de  $M$  a pour coordonnées  $(0, 0, y_2, \dots, y_N)$ . Le plan  $\Pi_y$  engendré par  $\ell$  et  $y$  s'écrit

$$\Pi_y = \{(\alpha, \beta, \gamma y) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{P}^2\}$$

L'équation de l'intersection  $\Pi_y \cap X$  dans  $\Pi_y$  s'écrit donc

$$\begin{aligned} P|_{\Pi_y} &= \gamma y_2 P_2(\alpha, \beta, \gamma y) + \dots + \gamma y_N P_N(\alpha, \beta, \gamma y) \\ &= \gamma (y_2 P_2(\alpha, \beta, \gamma y) + \dots + y_N P_N(\alpha, \beta, \gamma y)) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Puisque  $\frac{\partial P}{\partial x_0}|_{\ell}$  et  $\frac{\partial P}{\partial x_1}|_{\ell}$  sont nuls, cette application est essentiellement l'application  $\phi_{X, \ell}$  définie après le théorème 2.3. Plus précisément, ces deux applications ont même image.

et l'on reconnaît la droite  $\ell$  (d'équation  $\gamma = 0$ ) et la conique  $C_y$  (d'équation l'autre facteur). L'équation de  $\ell \cap C_y$  dans ce repère est donc  $y_2 P_2(\alpha, \beta, 0) + \dots + y_N P_N(\alpha, \beta, 0) = 0$ .

**Proposition 2.10.** *Si l'application  $\pi_\ell$  n'est pas séparable, le polynôme  $P_i|_\ell = \frac{\partial P}{\partial x_i}|_\ell$  est un carré pour chaque  $i$ . En particulier,  $\ell$  est de type II.*

**Démonstration.** Si l'application  $\pi_\ell$  n'est pas séparable, l'intersection  $\ell \cap C_y$  n'est pas réduite pour  $y$  général dans  $M$ , c'est-à-dire que  $\sum_{i=2}^N y_i P_i(\alpha, \beta, 0)$  est le carré d'une forme linéaire. Comme l'ensemble des carrés est un fermé, c'est vrai pour tout  $y$ . L'image de l'application  $H^0(u(-1))$  est donc contenue dans l'ensemble des carrés. Elle lui est en fait égale puisque son conoyau est de dimension  $h^1(\ell, N_{\ell/X}(-1)) = 1$  pour une droite de type II.  $\square$

On a le lemme central suivant :

**Lemme 2.11.** *Si l'application  $\pi_\ell$  n'est pas séparable, et si la conique  $C_y$  se décompose en la réunion de deux droites  $\ell'$  et  $\ell''$ , les droites  $\ell$ ,  $\ell'$  et  $\ell''$  sont concourantes.*

**Démonstration.** D'après la proposition 2.10, les polynômes  $P_i|_\ell$  sont des carrés pour tout  $i$  donc l'intersection  $\ell \cap C_y$  n'est réduite pour aucun point  $y$ . Les deux droites  $\ell'$  et  $\ell''$  se coupent donc sur  $\ell$ .  $\square$

**Définition 2.12.** Un point d'Eckardt sur une surface cubique lisse  $X$  est un point par lequel passent trois droites contenues dans  $X$ .

**Lemme 2.13.** *Si  $N = 3$ , et si aucune application  $\pi_\ell$  n'est séparable, tout point d'intersection entre deux droites distinctes de la surface cubique  $X$  est un point d'Eckardt.*

**Démonstration.** Montrons que par tout point d'intersection entre deux droites de  $X$ , il passe toujours une troisième droite contenue dans  $X$ . Dans le plan engendré par deux droites, la trace de la cubique  $X$  dégénère pour des raisons de degré en une réunion de trois droites. Nous distinguons une des droites, et nous la notons  $\ell$ . Comme l'application  $\pi_\ell$  n'est pas séparable, ces trois droites sont concourantes (lemme 2.11).  $\square$

**Lemme 2.14.** *Supposons  $\mathbf{k}$  algébriquement clos. Si  $N = 3$  et qu'aucune application  $\pi_\ell$  n'est séparable, la caractéristique de  $\mathbf{k}$  est 2 et la surface  $X$  est projectivement équivalente à la cubique de Fermat.*

La démonstration de ce lemme apparaît dans l'article [Mad04], note p. 5.

**Démonstration.** Soient  $\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_5$  des droites deux à deux disjointes sur  $X$ . La surface  $X$  peut être vue comme l'éclaté du plan projectif  $\mathbb{P}^2$  en 6 points  $p_0, \dots, p_5$  dont 3 quelconques ne sont pas alignés, avec pour diviseurs exceptionnels les 6 droites qui précèdent ([Har83], Chap V. § 4).

Choisissons pour base projective du plan

$$p_0 = (1, 0, 0) , p_1 = (0, 1, 0) , p_2 = (0, 0, 1) , p_3 = (1, 1, 1)$$

La projection de  $X$  sur  $\mathbb{P}^2$  envoie les 27 droites de la surface cubique  $X$  sur : les 6 points  $p_i$ , les 6 coniques passant par 5 de ces 6 points et les 15 droites passant par 2 de ces points. Notons  $\ell_{i,j}$  la droite  $\langle p_i, p_j \rangle$  et  $C_i$  la conique passant par les points  $p_j$  pour tout  $j$  différent de  $i$ . Nous noterons avec des tildes les droites correspondantes sur  $X$ .

Sur la surface  $X$ , la seule droite qui puisse passer par le point d'intersection des droites  $\tilde{p}_i$  et  $\tilde{\ell}_{i,j}$  est  $\tilde{C}_j$ . Dans le plan projectif, la conique  $C_i$  est donc tangente à la droite  $\ell_{i,j}$  au point  $p_j$ , pour tout  $j$  différent de  $i$ . Nous allons calculer les équations de  $C_0$  et  $C_1$ , pour déterminer les coordonnées des points  $p_4$  et  $p_5$ .

La conique  $C_0$  contient  $p_1$  et  $p_2$ . Elle n'a donc pas de terme en  $x_1^2$  ou  $x_2^2$ . Elle est tangente à la droite  $\ell_{0,1}$  (d'équation  $x_2 = 0$ ) en  $p_1$ , donc n'a pas de terme en  $x_0x_1$ . Elle est aussi tangente à la droite  $\ell_{0,2}$  (d'équation  $x_1 = 0$ ) en  $p_2$ , donc n'a pas de terme en  $x_0x_2$ . Son équation est donc du type  $ax_0^2 + bx_1x_2 = 0$ . Or le point  $p_3$  est sur la conique, donc  $C_0$  a pour équation :

$$x_0^2 + x_1x_2 = 0 \tag{2.2}$$

De même, la conique  $C_1$  contient  $p_0, p_2$  et  $p_3$ . Elle est tangente aux droites  $\ell_{0,1}$  et  $\ell_{1,2}$  aux points  $p_0$  et  $p_2$ . Son équation est donc :

$$x_1^2 + x_0x_2 = 0 \tag{2.3}$$

Considérons l'intersection  $C_0 \cap C_1$  de ces deux coniques. Par construction, elle est constituée exactement des 4 points  $p_2, p_3, p_4$  et  $p_5$ . Soit  $\omega$  une

racine primitive cubique de l'unité. À l'aide des équations (2.2) et (2.3) ci-dessus, on vérifie que les quatre points  $p_2, p_3, (1, \omega, \omega^2)$  et  $(1, \omega^2, \omega)$  sont dans l'intersection. Donc les coordonnées de  $p_4$  et  $p_5$  sont déterminées :

$$p_4 = (1, \omega, \omega^2), p_5 = (1, \omega^2, \omega)$$

À un changement de coordonnées projectives près, nous avons donc entièrement déterminé les positions des 6 points dans le plan projectif : la surface  $X$  est *unique*. Dans la proposition 2.16, nous démontrerons que, pour toute droite  $\ell$  contenue dans la cubique de Fermat, l'application  $\pi_\ell$  n'est pas séparable. La surface cubique de Fermat, en caractéristique 2, vérifie donc les hypothèses du lemme. Par unicité, la surface  $X$  est donc projectivement équivalente à l'hypersurface de Fermat.  $\square$

**Remarque 2.15.** Dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_4}^2$ , il n'y a qu'une seule configuration de 6 points rationnels en position générale (c'est-à-dire que trois quelconques ne sont pas alignés), à changement de coordonnées près : ceux dont nous venons de calculer les coordonnées. Il n'y a donc, dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_4}^3$ , à changement de coordonnées près, qu'une seule surface cubique définie sur  $\mathbb{F}_4$  et contenant 27 droites définies sur  $\mathbb{F}_4$ .

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2.7.

**Démonstration de la proposition 2.7.** Soit  $H$  un sous-espace linéaire général de dimension 3 de  $\mathbb{P}^N$  tel que la section  $X \cap H$  soit une surface lisse. Il contient une droite  $\ell$  contenue dans  $X$ . Si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts tels que  $\pi_\ell : U \rightarrow V$  soit un morphisme et que  $H \not\subseteq V$ , alors l'image réciproque  $\pi_\ell^{-1}(V)$  est dense dans  $\mathbb{P}(T_{X \cap H}|\ell)$ . On peut donc restreindre l'application  $\pi_\ell$  en une application  $\pi_\ell|_{X \cap H} : \mathbb{P}(T_{X \cap H}|\ell) \dashrightarrow X \cap H$  qui n'est pas séparable, comme restriction d'une application non séparable (*cf.* annexe, proposition 4.10). D'après le lemme 2.14, la caractéristique de  $\mathbf{k}$  est 2 et la section  $X \cap H$  est donc isomorphe à l'hypersurface de Fermat. En particulier, les sections de  $X$  par des sous-espaces linéaires généraux de dimension 3 sont isomorphes entre elles. D'après le théorème principal de Beauville ([Bea90]), l'hypersurface  $X$  est isomorphe à l'hypersurface de Fermat de degré  $q + 1$  où  $q$  est une puissance de la caractéristique.  $\square$

**Proposition 2.16.** *Soit  $X \subset \mathbb{P}^N$  une hypersurface cubique lisse définie sur un corps de caractéristique 2, projectivement équivalente à l'hypersurface cubique de Fermat, et soit  $\ell$  une droite contenue dans  $X$ . Alors l'application rationnelle  $\pi_\ell : \mathbb{P}(T_X|_\ell) \dashrightarrow X$  définie en (2.2) n'est pas séparable.*

Nous montrerons dans la proposition 3.11 l'analogie pour d'autres hypersurfaces de Fermat.

**Démonstration.** On peut supposer le corps algébriquement clos (proposition 4.12). On se place dans des coordonnées  $(x_0, \dots, x_N)$  telles que  $\ell$  ait pour équations  $x_2 = \dots = x_N = 0$ . Une équation  $P$  de  $X$  s'écrit

$$P = x_2 P_2 + \dots + x_N P_N$$

où  $P_i|_\ell = \frac{\partial P}{\partial x_i}|_\ell$ . Comme  $X$  est projectivement équivalente à l'hypersurface cubique de Fermat, toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial P}{\partial x_i}$  sont des carrés de formes linéaires. D'après les calculs de 2.2, pour un point général  $y$  de  $X$ , la fibre  $\pi_\ell^{-1}(y) = \ell \cap C_y$  a pour équation  $y_2 P_2(\alpha, \beta, 0) + \dots + y_N P_N(\alpha, \beta, 0) = 0$ , qui est une combinaison linéaire de carrés et donc un carré. L'application  $\pi_\ell$  est donc inséparable.  $\square$

## 2.3 Séparabilité de la paramétrisation de Segre-Kollár des hypersurfaces cubiques contenant un point rationnel

Kollár montre dans son article [Kol02] que la plupart des hypersurfaces cubiques  $X$  de  $\mathbb{P}_k^N$ , où  $N \geq 3$ , avec un  $\mathbf{k}$ -point sont  $\mathbf{k}$ -unirationnelles.

L'idée de la construction est la suivante : pour un point  $p \in X(\mathbf{k})$  bien choisi, la  $\mathbf{k}$ -variété  $C_p$ , intersection de  $X$  avec  $\mathbb{T}_{X,p}$ , est une hypersurface cubique irréductible avec un point double (pas nécessairement ordinaire) en  $p$ . Elle est donc  $\mathbf{k}$ -rationnelle. En choisissant convenablement deux  $\mathbf{k}$ -points  $p \in X$  et  $q \in X$ , on construit l'application rationnelle dominante « troisième point d'intersection ».

$$\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$$

Pour une surface,  $C_p \times C_q$  est de dimension 2, donc cette application dominante est génériquement finie. Dans ce cas on verra plus loin qu'elle est de degré 6 (corollaire 2.25).

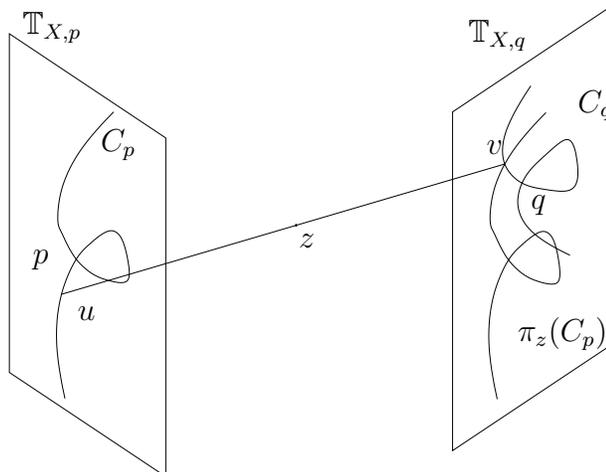


FIG. 2.3 – Section de  $X$  par les hyperplans  $\mathbb{T}_{X,p}$  et  $\mathbb{T}_{X,q}$

Dans l'article [Kol02], Kollár obtient le résultat suivant (Theorems 1 et 2) :

**Théorème 2.17** (Kollár). *Une hypersurface  $X$  de  $\mathbb{P}^N$  ayant un point rationnel est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

1.  $X$  est lisse,
2.  $X$  est irréductible,  $X$  n'est pas un cône et le corps  $\mathbf{k}$  est parfait.

Par contre, si le corps n'est pas parfait et si l'hypersurface cubique n'est que régulière, il y a des contre-exemples à une généralisation du théorème 2.17 sans les hypothèses lisse ou  $\mathbf{k}$  parfait ([Kol02] Exemple 17) :

**Exemple 2.18** (Kollár). Soient  $\mathbf{k}$  un corps de caractéristique 3 et  $\mathbf{K} = \mathbf{k}(t_2, \dots, t_N)$  le corps des fractions rationnelles en  $N - 1$  indéterminées sur le corps  $\mathbf{k}$ . Considérons l'hypersurface  $X$  de  $\mathbb{P}_{\mathbf{K}}^N$  d'équation :

$$x_0^3 - x_0x_1^2 = \sum_{i=2}^N t_i x_i^3$$

Cette hypersurface est régulière, possède des  $\mathbf{K}$ -points, mais n'est pas  $\mathbf{K}$ -unirationnelle : elle possède seulement trois points  $\mathbf{K}$ -rationnels. Elle n'est pas lisse : l'hypersurface  $X_{\mathbf{K}}$  est un cône au-dessus d'une courbe cubique cuspidale.

Kollár obtient en fait un résultat un peu plus fin que celui cité dans le théorème 2.17 ([Kol02] Proposition 13) :

**Proposition 2.19** (Kollár). *Soient  $N \geq 3$  et  $\mathbf{k}$  un corps non nécessairement parfait. Une hypersurface cubique irréductible  $X$  de  $\mathbb{P}^N$  définie sur  $\mathbf{k}$  ayant un point rationnel et qui de plus n'est pas un cône sur  $\mathbf{k}$  est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

1. *le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique plus grande que 5,*
2. *le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique 3 et  $X$  n'a pas de point triple sur  $\bar{\mathbf{k}}$ ,*
3. *le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique 2 et il y a un  $\mathbf{k}$ -point lisse  $x$  tel que la projection depuis  $x$  est séparable.*

La densité des points rationnels de  $X$  est un corollaire immédiat de l'unirationalité :

**Proposition 2.20.** *Soit  $X$  une hypersurface cubique irréductible dans  $\mathbb{P}^N$ , avec  $N \geq 3$ , définie sur un corps  $\mathbf{k}$  infini et possédant un  $\mathbf{k}$ -point. Si l'une au moins des trois conditions de la proposition 2.19 est vérifiée, l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points de  $X$  est dense dans  $X$ .*

Rappelons quelques résultats sur les points de type général sur une cubique.

**Définition 2.21.** Un point  $x$  d'une hypersurface cubique  $X$  est dit *de type général* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $x$  est un point lisse de  $X$  ;
- la cubique  $C_x = \mathbb{T}_{X,x} \cap X$  est géométriquement irréductible ;
- le point singulier  $x$  de  $C_x$  n'est pas conique sur  $C_x$ .

On remarque que le point  $x$  est de multiplicité 2 sur la cubique  $C_x$ , car celle-ci serait sinon un cône de sommet  $x$ . Ce point double n'est pas nécessairement un point double ordinaire ([Kol02], Proposition 14). Le résultat suivant est [Man86], p.52.

**Proposition 2.22** (Manin). *L'ensemble des points de type général d'une hypersurface cubique est un ouvert.*

Si  $X$  n'est pas normale, le lieu non normal  $L$  est de codimension 1 dans  $X$ , et lorsque  $\mathbf{k}$  est parfait, la projection depuis  $L$  transforme  $X - L$  en un fibré en  $\mathbb{P}^{N-2}$  au-dessus de  $\mathbb{P}^1$  : l'hypersurface  $X$  est alors  $\mathbf{k}$ -rationnelle. Sur

un corps parfait, pour les questions qui nous intéressent, nous pouvons donc supposer  $X$  normale, ce que nous ferons par la suite.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition 2.20 (qui est un corollaire de [Kol02]) et de la proposition 2.22 :

**Corollaire 2.23.** *Soit  $X$  une hypersurface cubique normale sur un corps  $\mathbf{k}$ , sans point géométrique triple, et ayant un point  $\mathbf{k}$ -rationnel. Alors l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points de type général de  $X$  est un ouvert non vide.*

**Démonstration.** Il suffit de montrer qu'il existe un point géométrique de type général. C'est ce que fait Kollár dans la Proposition 14 de [Kol02]. Donc l'ouvert des points rationnels de type général est non vide.  $\square$

**Proposition 2.24** (Kollár). *Soit  $X$  une hypersurface cubique normale sans point géométrique triple. Si  $p$  et  $q$  sont deux  $\mathbf{k}$ -points de  $X$  de type général, l'application  $\phi_{p,q}$  est dominante.*

**Démonstration.** L'ouvert

$$\Omega = \{(u, v) \in C_p \times C_q \mid u \neq v, \langle u, v \rangle \not\subset X\}$$

est non vide car  $(p, q) \in \Omega$ . Pour tout  $(u, v) \in \Omega$ , la droite  $\langle u, v \rangle$  recoupe  $X$  en un unique troisième point. L'application rationnelle  $\phi_{p,q}$  est donc bien définie sur  $\Omega$ . Notons  $\phi'_{p,q} : \Omega \rightarrow X$  sa restriction et montrons qu'elle est dominante, en exhibant une fibre de dimension  $N - 3$ .

Soit  $z$  un point de  $X$  hors de  $\mathbb{T}_{X,p} \cap \mathbb{T}_{X,q}$ . Notons

$$\pi_z : \mathbb{T}_{X,p} \rightarrow \mathbb{T}_{X,q}$$

la projection depuis  $z$ . C'est un isomorphisme. Un élément de la fibre de  $\phi'_{p,q}$  est de la forme  $(\pi_z^{-1}(v), v)$  avec  $v \in C_q$  et  $\pi_z^{-1}(v) \in C_p$ , donc

$$\phi'_{p,q}{}^{-1}(z) = \{(\pi_z^{-1}(v), v) \in \Omega \mid v \in \pi_z(C_p) \cap C_q\} \quad (2.4)$$

Les hypersurfaces  $C_q$  et  $\pi_z(C_p)$  de  $\mathbb{T}_{X,q}$  étant irréductibles, il suffit de trouver un  $z$  tel que  $C_q \neq \pi_z(C_p)$ . Comme  $(p, q) \in \Omega$ , un point lisse général  $v$  de  $C_q$  est tel que  $(p, v) \in \Omega$ . Si  $z = \phi_{p,q}(p, v)$ , l'hypersurface  $\pi_z(C_p)$  est singulière en  $\pi_z(p) = v$ , donc distincte de  $C_q$ .  $\square$

**Corollaire 2.25.** *Lorsque  $X$  est une surface, l'application rationnelle  $\phi_{p,q}$  est de degré 6.*

**Démonstration.** Soit  $\Gamma \subset C_p \times C_q \times X$  le graphe de  $\phi_{p,q}$ . La projection  $\Gamma \rightarrow C_p \times C_q$  est un isomorphisme au-dessus de  $\Omega$ , que l'on identifie ainsi à un ouvert de  $\Gamma$ . Son complémentaire est de dimension au plus 1, donc est envoyé sur un fermé propre de  $X$ . Le degré de l'application  $\phi_{p,q}$  est donc la longueur d'une fibre générale de  $\phi'_{p,q} : \Omega \rightarrow X$ . La fibre de  $z \in X$  général est donnée par (2.4), où le schéma  $\pi_z(C_p) \cap C_q$  est de longueur 9. Il contient le schéma  $\mathbb{T}_{X,p} \cap \mathbb{T}_{X,q} \cap X$ , qui est de longueur 3, mais donne lieu à des paires  $(v, v)$ , qui ne sont donc pas dans  $\Omega$ . Les autres paires sont bien dans  $\Omega$ , puisque  $z$  n'est sur aucune droite contenue dans  $X$ .  $\square$

### Cas d'une surface cubique dans $\mathbb{P}^3$

On suppose désormais que  $X$  est une surface cubique normale de  $\mathbb{P}^3$  sans point géométrique triple et qu'aucune application  $\phi_{p,q}$  n'est séparable. Le corps  $\mathbf{k}$  est supposé infini. L'application  $\phi_{p,q}$  est génériquement finie de degré 6. Donc la caractéristique est 2 ou 3, et la fibre  $\pi_z(C_p) \cap C_q$  n'est pas réduite pour  $z$  général; plus précisément, pour tout point  $(u, v) \in \phi_{p,q}^{-1}(z)$ , les cubiques  $\pi_z(C_p)$  et  $C_q$  sont tangentes en  $v$ . Les lemmes 2.26 et 2.27 sont valables en toute caractéristique.

**Lemme 2.26.** *Soit  $X$  est une surface cubique normale de  $\mathbb{P}^3$  sans point géométrique triple telle qu'aucune application  $\phi_{p,q}$  n'est séparable. Le corps  $\mathbf{k}$  est supposé infini.*

*Toutes les droites tangentes à  $C_p$  et  $C_q$  passent par un même point. En particulier, les singularités de  $C_p$  et  $C_q$  sont cuspidales.*

**Démonstration.** Prenons  $(u, v) \in \Omega \subset C_p \times C_q$  et notons  $z = \phi_{p,q}(u, v)$ . Pour un couple  $(u, v)$  général, les cubiques  $\pi_z(C_p)$  et  $C_q$  sont tangentes en  $v$ , donc sont tangentes : on a  $\pi_z(\mathbb{T}_{C_p,u}) = \mathbb{T}_{C_q,v}$ , ce qui entraîne :

$$\mathbb{T}_{C_p,u} \subset \langle z, \mathbb{T}_{C_q,v} \rangle = \langle u, \mathbb{T}_{C_q,v} \rangle$$

donc  $\mathbb{T}_{C_p,u} = \langle u, \mathbb{T}_{C_q,v} \rangle \cap \mathbb{T}_{X,p}$ . En particulier,  $\mathbb{T}_{C_p,u}$  contient le point  $O = \mathbb{T}_{C_q,v} \cap \mathbb{T}_{X,p}$  qui est sur la droite  $\mathbb{T}_{X,q} \cap \mathbb{T}_{X,p}$  et ne dépend pas du choix de  $u$ .

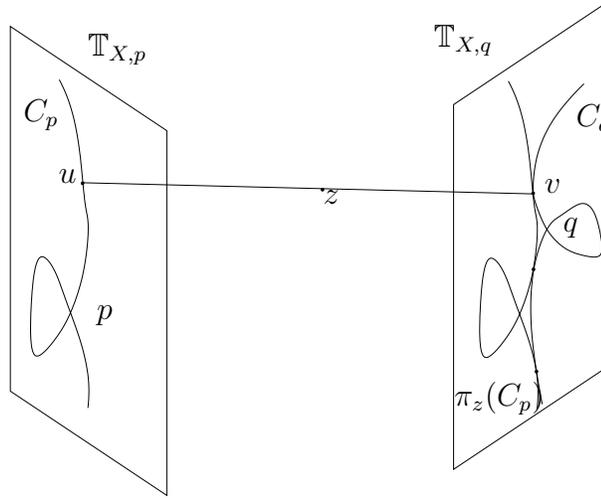


FIG. 2.4 – Section de  $X$  par les hyperplans  $\mathbb{T}_{X,p}$  et  $\mathbb{T}_{X,q}$ , cas inséparable.

Par symétrie,  $O$  ne dépend pas non plus du choix de  $v$  et, pour tout couple  $(u, v) \in \Omega$  général, les droites  $\mathbb{T}_{C_p,u}$  et  $\mathbb{T}_{C_q,v}$  passent par  $O$ . Comme  $\Omega$  est dense dans  $C_p \times C_q$ , le résultat subsiste pour toutes les tangentes à  $C_p$  et  $C_q$ . En particulier, les deux tangentes du point singulier  $p$  de  $C_p$  (resp.  $q$  de  $C_q$ ) sont confondues et égales à la droite  $\langle O, p \rangle$  (resp.  $\langle O, q \rangle$ ) : les singularités de  $C_p$  et  $C_q$  sont donc cuspidales.  $\square$

**Lemme 2.27.** *Soit  $X$  une hypersurface cubique irréductible de  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^N$ . Si tous les espaces tangents à  $X$  passent par le point  $O = (1, 0, \dots, 0)$ ,*

- *soit  $X$  est un cône de sommet  $O$ , sans condition sur la caractéristique du corps  $\mathbf{k}$  ;*
- *soit le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique 2 et  $X$  a pour équation  $x_0^2 L(x_1, \dots, x_N) + C(x_1, \dots, x_N) = 0$ , avec  $L$  forme linéaire et  $C$  forme cubique ;*
- *soit le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique 3 et  $X$  a pour équation  $x_0^3 + C(x_1, \dots, x_N) = 0$ , avec  $C$  forme cubique.*

**Démonstration.** On adapte la démonstration du lemme 5 de [Mad03]. Écrivons une équation de  $X$  sous la forme

$$a + L(x_1, \dots, x_N) + Q(x_1, \dots, x_N) + C(x_1, \dots, x_N) = 0$$

dans un système  $(x_1, \dots, x_N)$  de coordonnées affines d'origine  $O$ , avec  $L$  forme linéaire,  $Q$  forme quadratique et  $C$  forme cubique, cette dernière étant non nulle (car  $X$  est irréductible). Dire que l'hyperplan tangent à  $X$  en un point  $(x_1, \dots, x_N)$  de  $X$  passe par  $O$  signifie que

$$L(x_1, \dots, x_N) + 2Q(x_1, \dots, x_N) + 3C(x_1, \dots, x_N) = 0$$

Si c'est vrai pour tout point de  $X$ , c'est que  $a + L + Q + C$  divise  $L + 2Q + 3C$ .

- Si le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique différente de 3, nous avons  $L + 2Q + 3C = 3(a + L + Q + C)$ , de sorte que  $a$ ,  $2L$  et  $Q$  sont nuls et :
  - soit la caractéristique est différente de 2 et l'hypersurface  $X$  est un cône cubique de sommet  $O$ ,
  - soit la caractéristique du corps est 2 et  $X$  a pour équation homogène  $x_0^2 L(x_1, \dots, x_N) + C(x_1, \dots, x_N) = 0$ .
- Si le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique 3, la condition devient  $a + L + Q + C$  divise  $L + 2Q$ , ce qui implique que  $L$  et  $Q$  sont nuls. Si  $a = 0$ , l'hypersurface  $X$  est un cône cubique de sommet  $O$ . Sinon on peut supposer  $a = 1$ , et l'équation de  $X$  dans les coordonnées projectives  $(x_0, \dots, x_N)$  s'écrit  $x_0^3 + C(x_1, \dots, x_N) = 0$ .

□

**Proposition 2.28.** *Soit  $X$  une surface cubique normale, définie sur un corps infini  $\mathbf{k}$ , sans point géométrique triple et qui contient un  $\mathbf{k}$ -point. Si, pour tout couple de  $\mathbf{k}$ -points  $(p, q)$  qui définissent une application rationnelle  $\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$  dominante (construite en 2.3), celle-ci n'est pas séparable, alors*

- soit le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique 2 et il existe un polynôme homogène  $C$  de degré 3 et une forme linéaire  $L$  en 3 variables tel que la surface  $X$  ait pour équation  $x_0^2 L(x_1, x_2, x_3) + C(x_1, x_2, x_3) = 0$  dans des coordonnées  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  bien choisies.
- soit le corps  $\mathbf{k}$  est de caractéristique 3 et il existe un polynôme homogène  $C$  de degré 3 en 3 variables tel que la surface  $X$  ait pour équation  $x_0^3 + C(x_1, x_2, x_3) = 0$  dans des coordonnées  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  bien choisies ;

**Démonstration.** D'après le lemme 2.26, pour tout point  $u$  de  $C_p$ , la droite tangente  $\mathbb{T}_{C_p, u}$  passe par un même point  $O$ . L'hyperplan  $\mathbb{T}_{X, u}$  contient donc aussi le point  $O$ . Donc il en est de même de l'hyperplan  $\mathbb{T}_{X, p}$ .

L'ensemble des couples  $(p, q)$  qui définissent une application  $\phi_{p,q}$  dominante est dense dans  $X$  d'après le corollaire 2.23, donc tous les hyperplans tangents à  $X$  passent par un même point  $O$ . On applique le lemme 2.27 : le cas d'un cône étant exclu (il n'y a pas de point géométrique triple, donc *a fortiori* pas de point rationnel triple), l'équation de  $X$  dans les coordonnées projectives  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  s'écrit soit  $x_0^3 + C(x_1, x_2, x_3) = 0$ , soit  $x_0^2L(x_1, x_2, x_3) + C(x_1, x_2, x_3) = 0$ .  $\square$

Réciproquement, les exceptions de la proposition 2.28 sont de vraies exceptions, les applications  $\phi_{p,q}$  ne sont jamais séparable.

**Proposition 2.29.** *Soient  $\mathbf{k}$  un corps de caractéristique 2 et  $X$  une surface irréductible sans point géométrique triple d'équation  $x_0^2L(x_1, x_2, x_3) + C(x_1, x_2, x_3) = 0$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^3$  où  $C \in \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3]$  est un polynôme homogène de degré 3 et  $L \in \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3]$  est une forme linéaire. Alors l'application rationnelle  $\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$  définie au début du paragraphe 2.3 n'est séparable pour aucun couple  $(p, q)$ .*

**Démonstration.** Soient  $p$  et  $q$  deux points qui définissent une application  $\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$ . La cubique plane  $C_p$  est alors définie par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} p_0^2L(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial C}{\partial x_1}(p_1, p_2, p_3)x_1 + \frac{\partial C}{\partial x_2}(p_1, p_2, p_3)x_2 + \frac{\partial C}{\partial x_3}(p_1, p_2, p_3)x_3 &= 0 \\ x_0^2L(x_1, x_2, x_3) + C(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Notons  $O$  le point  $(1, 0, 0, 0)$  contenu dans tous les espaces tangents de  $X$ , et reprenons les notations de la figure 2.3. La tangente à  $C_p$  en  $u$  est la droite  $\langle O, u \rangle$  paramétrée par

$$(\alpha, \beta) \longmapsto (\alpha + \beta u_0, \beta u_1, \beta u_2, \beta u_3)$$

Lorsqu'on évalue en  $(\alpha + \beta u_0, \beta u_1, \beta u_2, \beta u_3)$  les équations définissant  $C_p$ , la première équation est nulle (la droite tangente est contenue dans  $\mathbb{T}_{X,p}$ ) et la deuxième s'écrit, puisque l'on est en caractéristique 2 :

$$\alpha^2L(\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3) + (\beta u_0)^2L(\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3) + C(\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3) = 0$$

C'est-à-dire  $\alpha^2\beta = 0$  puisque  $u \in X$ . L'équation  $\beta = 0$  correspond au point  $O$  qui n'est pas dans le domaine de définition de  $\phi_{p,q}$ . Donc  $C_p$  a un contact

d'ordre 2 avec  $\mathbb{T}_{C_p, u}$  en  $u$  et, lorsque l'on projette sur le plan  $\mathbb{T}_{X, q}$ , la cubique plane  $\pi_z(C_p)$  a un contact d'ordre 2 en  $v = \pi_z(u)$  avec  $\pi_z(\mathbb{T}_{C_p, u}) = \mathbb{T}_{C_q, v}$ , ce qui signifie que l'intersection  $\pi_z(C_p) \cap C_q$  est toujours constituée de 3 points de multiplicité 2. Ceci montre (cf. (2.4)) que la fibre  $\phi_{p, q}^{-1}(z)$  n'est pas réduite : l'application rationnelle  $\phi_{p, q}$  n'est pas séparable.  $\square$

**Proposition 2.30.** *Soient  $\mathbf{k}$  un corps de caractéristique 3 et  $X$  une surface irréductible sans point géométrique triple d'équation  $x_0^3 + C(x_1, x_2, x_3) = 0$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^3$  où  $C \in \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3]$  est un polynôme homogène de degré 3. Alors l'application rationnelle  $\phi_{p, q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$  définie au début du paragraphe 2.3 n'est séparable pour aucun couple  $(p, q)$ .*

**Démonstration.** La démonstration est essentiellement la même qu'à la proposition précédente.

Soient  $p$  et  $q$  deux points qui définissent une application  $\phi_{p, q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$ . La cubique plane  $C_p$  est alors définie par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_1}(p_1, p_2, p_3)x_1 + \frac{\partial C}{\partial x_2}(p_1, p_2, p_3)x_2 + \frac{\partial C}{\partial x_3}(p_1, p_2, p_3)x_3 &= 0 \\ x_0^3 + C(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Notons  $O$  le point  $(1, 0, 0, 0)$  contenu dans tous les espaces tangents de  $X$ , et reprenons les notations de la figure 2.3. La tangente à  $C_p$  en  $u$  est la droite  $\langle O, u \rangle$  paramétrée par

$$(\alpha, \beta) \longmapsto (\alpha + \beta u_0, \beta u_1, \beta u_2, \beta u_3)$$

Lorsqu'on évalue en  $(\alpha + \beta u_0, \beta u_1, \beta u_2, \beta u_3)$  les équations définissant  $C_p$ , la première équation est nulle (la droite tangente est contenue dans  $\mathbb{T}_{X, p}$ ) et la deuxième s'écrit, puisque l'on est en caractéristique 3 :

$$\alpha^3 + (\beta u_0)^3 + C(\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3) = 0$$

C'est-à-dire  $\alpha^3 = 0$  puisque  $u \in X$ . Donc  $C_p$  a un contact d'ordre 3 avec  $\mathbb{T}_{C_p, u}$  en  $u$  et, lorsque l'on projette sur le plan  $\mathbb{T}_{X, q}$ , la cubique plane  $\pi_z(C_p)$  a un contact d'ordre 3 en  $v = \pi_z(u)$  avec  $\pi_z(\mathbb{T}_{C_p, u}) = \mathbb{T}_{C_q, v}$ , ce qui signifie que l'intersection  $\pi_z(C_p) \cap C_q$  est toujours constituée de 2 points de multiplicité 3. Ceci montre (cf. (2.4)) que la fibre  $\phi_{p, q}^{-1}(z)$  n'est pas réduite : l'application rationnelle  $\phi_{p, q}$  n'est pas séparable.  $\square$

**Cas général (dans  $\mathbb{P}^N$ )**

La démarche est la même en dimension supérieure, mais la conclusion est différente : il y a toujours une application  $\phi_{p,q}$  séparable.

Soit  $X \subset \mathbb{P}^N$  une hypersurface cubique normale sans point géométrique triple sur un corps  $\mathbf{k}$  infini. Supposons qu'aucune application  $\phi_{p,q}$  n'est séparable.

**Lemme 2.31.** *Pour un point général  $z$  de  $X$ , la fibre  $\phi_{p,q}^{-1}(z)$  n'est lisse nulle part et, donc, l'intersection  $\pi_z(C_p) \cap C_q$  n'est pas transverse (la somme des espaces tangents  $\mathbb{T}_{\pi_z(C_p),x} + \mathbb{T}_{C_q,x}$  n'est de dimension maximale pour aucun point  $x$ ).*

**Démonstration.** C'est une conséquence de la proposition 4.10 qui définit la séparabilité en terme de lissité.  $\square$

**Lemme 2.32.** *Tous les espaces tangents à  $C_p$  et  $C_q$  contiennent un même  $(N - 3)$ -plan.*

**Démonstration.** La démonstration suit exactement la même démarche que celle du lemme 2.26.

Pour tout point  $(u, v) \in \Omega \subset C_p \times C_q$ , notons  $z = \phi_{p,q}(u, v)$ . Pour un point  $z$  général, les hypersurfaces cubiques  $\pi_z(C_p)$  et  $C_q$  ne sont pas transverses. Donc pour un couple  $(u, v)$  général, les espaces tangents  $\pi_z(\mathbb{T}_{C_p,u})$  et  $\mathbb{T}_{C_q,v}$  sont confondus :  $\pi_z(\mathbb{T}_{C_p,u}) = \mathbb{T}_{C_q,v}$ . Ceci entraîne :

$$\mathbb{T}_{C_p,u} \subset \langle z, \mathbb{T}_{C_q,v} \rangle = \langle u, \mathbb{T}_{C_q,v} \rangle$$

Donc  $\mathbb{T}_{C_p,u} = \langle u, \mathbb{T}_{C_q,v} \rangle \cap \mathbb{T}_{X,p}$ . En particulier  $\mathbb{T}_{C_p,u}$  contient le  $(N - 3)$ -plan  $P = \mathbb{T}_{C_q,v} \cap \mathbb{T}_{X,p}$  qui est contenu dans le  $(N - 2)$ -plan  $\mathbb{T}_{X,q} \cap \mathbb{T}_{X,p}$  et ne dépend pas du choix de  $u$ . Par symétrie,  $P$  ne dépend pas non plus du choix de  $v$ , et pour  $(u, v) \in \Omega$  général, les  $(N - 2)$ -plans  $\mathbb{T}_{C_p,u}$  et  $\mathbb{T}_{C_q,v}$  passent par  $O$ . Or, l'ensemble des couples  $(u, v)$  considéré est dense dans  $C_p \times C_q$ , donc, par continuité, le résultat est vrai pour tous les espaces tangents de  $C_p$  et  $C_q$ .  $\square$

**Remarque 2.33.** L'espace tangent à  $C_p$  en un point lisse  $u$  est exactement le  $(N - 2)$ -plan  $\langle P, u \rangle$ .

**Proposition 2.34.** *Soit  $\mathbf{k}$  un corps infini, et soit  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^N$  une hypersurface cubique définie sur  $\mathbf{k}$ , normale sans point géométrique triple et contenant un  $\mathbf{k}$ -point.*

*Si  $N \geq 4$  et si la caractéristique du corps est différente de 2, il existe un couple de  $\mathbf{k}$ -points  $(p, q)$  de type général tels que l'application  $\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$  associée (définie en 2.3) est séparable dominante.*

*Si la caractéristique du corps est 2, il existe un système de coordonnées sur  $\bar{\mathbf{k}}$  tel que l'équation de  $X$  s'écrive :*

$$\sum_{i=0}^{N-3} x_i^2 L_i(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) + C(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) = 0$$

où les  $L_i$  sont des formes linéaires en trois variables et  $C$  est une forme cubique en trois variables.

**Démonstration.** Raisonnons par l'absurde : on suppose qu'aucune des applications  $\phi_{p,q}$  construites en 2.3 n'est séparable. D'après le lemme 2.32 ci-dessus, les espaces tangents  $\mathbb{T}_{C_p,u}$  (resp.  $\mathbb{T}_{C_q,v}$ ) en tout point  $u$  de  $C_p$  (resp. tout point  $v$  de  $C_q$ ) contiennent un  $(N-3)$ -plan  $P$ . Donc, pour tout point  $x$  des hypersurfaces cubiques  $C_p$  ou  $C_q$ , l'hyperplan  $\mathbb{T}_{X,x}$  contient  $P$ .

L'ensemble des points  $p$  et  $q$  de type général est dense dans  $X$  d'après la proposition 2.23, donc tous les hyperplans tangents à  $X$  contiennent un même  $(N-3)$ -plan  $P$ . Si  $N \geq 4$ ,  $P$  et  $X$  sont d'intersection non vide.

Si le corps est de caractéristique 3, choisissons un point géométrique  $O \in P \cap X$ , le lemme 2.27 impose (en caractéristique 3) que  $X$  est un cône ou que  $X$  a pour équation homogène  $x_0^3 + C(x_1, \dots, x_N) = 0$ . De plus, le point  $O$  est sur la cubique, donc l'hypersurface  $X$  est nécessairement un cône, ce qui est exclu. Ainsi une des applications  $\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$  est séparable.

Si le corps est de caractéristique 2, choisissons un système de coordonnées projectives  $(x_0, \dots, x_N)$  telles que le  $(N-3)$ -plan  $P$  soit engendré par les points  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0)$ . En appliquant le lemme 2.27 en chacun de ces points, on obtient que  $x_i$  (pour  $0 \leq i \leq N-3$ ) n'intervient dans l'équation de  $X$  que sous la forme  $x_i^2$ , ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^{N-3} x_i^2 L_i(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) + C(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) = 0$$

avec  $L_i$  des formes linéaires en trois variables et  $C$  une forme cubique en trois variables.  $\square$

Les exceptions de la proposition 2.34 sont de vraies exceptions.

**Proposition 2.35.** *Soient  $\mathbf{k}$  un corps de caractéristique 2 et  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^N$ , où  $N \geq 4$ , une hypersurface cubique définie sur  $\mathbf{k}$ , normale sans point géométrique triple et contenant un  $\mathbf{k}$ -point. Supposons qu'il existe un système de coordonnées sur  $\bar{\mathbf{k}}$  tel que l'équation de  $X$  s'écrive :*

$$\sum_{i=0}^{N-3} x_i^2 L_i(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) + C(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) = 0$$

où les  $L_i$  sont des formes linéaires en trois variables et  $C$  est une forme cubique en trois variables.

Alors l'hypersurface  $X$  est singulière le long d'un  $(N-6)$ -plan défini sur  $\bar{\mathbf{k}}$  et l'application rationnelle  $\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$  définie au début du paragraphe 2.3 n'est séparable pour aucun couple  $(p, q)$ .

**Démonstration.** L'équation d'un espace tangent à  $X$  en un point  $p$  est la suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-3} p_i^2 L_i(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N) + \frac{\partial C}{\partial x_{N-2}}(p_{N-2}, p_{N-1}, p_N) x_{N-2} \\ & + \frac{\partial C}{\partial x_{N-1}}(p_{N-2}, p_{N-1}, p_N) x_{N-1} + \frac{\partial C}{\partial x_N}(p_{N-2}, p_{N-1}, p_N) x_N = 0 \end{aligned}$$

Notons  $P$  le  $(N-3)$ -plan des  $N-2$  premières coordonnées, et montrons qu'il existe un plan contenu dans  $P$ , et donc dans  $X$ , de codimension 3 dans  $P$  (et donc 6 dans  $\mathbb{P}^N$ ) le long duquel  $X$  est singulière, c'est-à-dire que l'équation ci-dessus est celle d'une forme linéaire en  $x$  identiquement nulle. Si nous nous restreignons aux  $p \in P$ , les trois derniers termes sont nuls dans l'équation de  $\mathbb{T}_{X,p}$ . L'ensemble des  $p \in P$  tels que  $\sum_{i=0}^{N-3} p_i^2 L_i$  soit identiquement nulle est de codimension  $\leq 3$  dans  $P$ . L'hypersurface  $X$  est donc singulière le long d'un  $(N-6)$ -plan.

Montrons qu'aucune des applications rationnelle  $\phi_{p,q} : C_p \times C_q \dashrightarrow X$  définie au début du paragraphe 2.3 n'est séparable. Nous reprenons les notations de la figure 2.3. Pour  $u$  lisse sur  $C_p$  le  $(N-2)$ -plan  $\mathbb{T}_{C_p,u}$  est égal à

$\mathbb{T}_{X,p} \cap \mathbb{T}_{X,u}$ , il contient donc  $P$ , de sorte que nous avons  $\mathbb{T}_{C_p,u} = \langle P, u \rangle$ . Si  $v = \pi_z(u)$  est la projection de  $u$  sur  $\mathbb{T}_{X,q}$ , nous en déduisons  $\pi_z(\mathbb{T}_{C_p,u}) = \langle P, v \rangle = \mathbb{T}_{C_q,v}$ , ce qui fait que  $\pi_z(C_p) \cap C_q$  est singulier en  $v$ . Ceci montre (cf. 2.4) que la fibre de  $\phi_{p,q}^{-1}(z)$  est partout singulière, donc que  $\phi_{p,q}$  n'est pas séparable.  $\square$

**Remarque 2.36.** Les hypersurfaces cubiques projectives lisses de dimension plus grande que 5 au-dessus d'un corps algébriquement clos sont donc  $\mathbf{k}$ -séparablement unirationnelles. Dans son article [Mad03] Madore montre ce résultat pour les corps de caractéristique plus grande que 5.

De plus les surfaces cubiques projectives lisses sur tout corps algébriquement clos sont rationnelles et donc séparablement unirationnelles.



# Chapitre 3

## Les hypersurfaces de Fermat

**Définition 3.1.** Soit  $\mathbf{k}$  un corps algébriquement clos. L'hypersurface de Fermat  $X_N^d$  sur  $\mathbf{k}$  est l'hypersurface de  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^N$  définie par l'équation

$$x_0^d + \cdots + x_N^d = 0$$

Elle est lisse si et seulement si la caractéristique  $p$  de  $\mathbf{k}$  est 0 ou ne divise pas  $d$ . On supposera désormais ces hypothèses vérifiées.

Nous étudions tout d'abord le schéma des droites contenues dans ces hypersurfaces. Plus précisément, nous identifions (th. 3.3) toutes ces droites dans le cas  $d \geq N$ , pourvu que l'on ait  $p = 0$  ou  $p > d$ .

À l'opposé, le cas où  $d - 1$  est une puissance de  $p$  est très intéressant, car les hypersurfaces en question ont des propriétés exotiques. Nous montrons par exemple que  $X_N^{p^r+1}$  est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle (bien qu'elle puisse être de type général), généralisant ainsi des résultats de [Shi79].

Nous étudions aussi la connexité rationnelle séparable (*cf.* définition 1.21) de  $X_N^{p^r+1}$ , c'est-à-dire la présence (ou non) de courbes rationnelles libres ou très libres. Le but est ici de tester sur un exemple pathologique la conjecture que *toutes* les hypersurfaces lisses de degré  $\leq N$  dans  $\mathbb{P}^N$  sont séparablement rationnellement connexes (comparer avec les explications de § 1.5 et § 1.6 (prop. 1.20)).

Les premières sections de ce chapitre (§ 3.1 et § 3.2) sont un développement des pages 47 à 55 du livre *Higher-Dimensional Algebraic Geometry* ([Deb01]), en particulier l'unirationalité de  $X_N^d$  pour  $d \mid p^r + 1$  (§ 3.2.3). Le dernier paragraphe (§ 3.3) est une contribution originale.

### 3.1 Droites standard

Nous appellerons ici partition admissible une partition  $I_1, \dots, I_r$  de l'ensemble  $\{0, \dots, N\}$  avec  $r \geq 2$  et où chaque  $I_j$  contient au moins deux éléments.

Soit  $I_1, \dots, I_r$  une telle partition. Pour chaque  $j$ , on se donne un point  $x_{I_j}$  de  $X$  dont la  $i$ -ième coordonnée homogène  $x_i$  vaut 0 si  $i$  n'appartient pas à  $I_j$ . À cette donnée correspond un  $(r-1)$ -plan

$$\{\lambda_1 x_{I_1} + \dots + \lambda_r x_{I_r} \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{P}^{r-1}\}$$

contenu dans  $X_N^d$ . La famille de ces  $(r-1)$ -plans est de dimension  $N+1-2r$ , paramétrée par  $\prod_{j=1}^r X_{\text{Card } I_j-1}^d$ .

**Définition 3.2.** On appelle *droite standard* de  $X_N^d$  une droite contenue dans un des  $(r-1)$ -plans construits ci-dessus.

Chacun de ces  $(r-1)$ -plans contient une famille de dimension  $2r-4$  de droites. Les droites standard forment donc une sous-variété (en général réductible) de  $F(X_N^d)$  de dimension pure  $(N+1-2r) + (2r-4) = N-3$ .

Le résultat suivant est énoncé en exercice dans [Deb01] p.54 (3.(c)).

**Théorème 3.3.** *Si  $k$  est de caractéristique nulle ou  $> d$  et que  $d \geq N$ , toutes les droites contenues dans  $X_N^d$  sont standard.*

**Démonstration.** On démontre le résultat par récurrence sur  $N$ .

Dans le cas  $N=2$ , l'hypersurface  $X_2^d$  est une courbe qui n'est pas une droite ( $d \geq 2$ ), donc ne contient aucune droite. En particulier, elles sont toutes standard.

On suppose la propriété vraie pour toutes les hypersurfaces  $X_M^d$  avec  $M < N$ . Soit  $\ell$  une droite contenue dans  $X_N^d$ .

Si  $\ell$  est contenue dans l'hyperplan  $H_i$  défini par  $x_i = 0$ , elle est contenue dans une hypersurface  $X_{N-1}^d$  donc est standard.

Supposons que  $\ell$  ne soit contenue dans aucun des  $H_i$ , mais contienne un point  $(a_0, \dots, a_{N-2}, 0, 0)$  avec deux coordonnées nulles. Comme  $\ell \not\subset H_N$ , on peut trouver un autre point de  $\ell$  de la forme  $(b_0, \dots, b_{N-1}, 1)$ . On a alors

$$\sum_{i=0}^{N-2} (ta_i + b_i)^d + b_{N-1}^d + 1 = 0$$

pour tout  $t \in \mathbf{k}$ . Soit  $\omega$  une racine  $d$ -ième de  $b_{N-1}^d + 1$ .

Supposons  $\omega = 0$ .

Le point  $(b_0, \dots, b_{N-2}, 0, 0)$  est dans  $X_N^d$ . S'il est égal à  $(a_0, \dots, a_{N-2}, 0, 0)$ , la droite  $\ell$  est standard pour la partition admissible  $\{0, \dots, N-2\}, \{N-1, N\}$  de  $\{0, \dots, N\}$ .

Si les points  $(a_0, \dots, a_{N-2}, 0, 0)$  et  $(b_0, \dots, b_{N-2}, 0, 0)$  sont distincts, la droite  $\ell'$  de  $\mathbb{P}^{N-1}$  qui les joint est contenue dans  $X_{N-2}^d$ . On applique l'hypothèse de récurrence à  $\ell'$  : elle est nécessairement standard, c'est-à-dire contenue dans un  $(r-1)$ -plan du type

$$\{\lambda_1 x_{I_1} + \dots + \lambda_r x_{I_r} \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{P}^{r-1}\}$$

où  $I_1, \dots, I_r$  est une partition admissible de  $\{0, \dots, N-2\}$ . Si on pose  $I_{r+1} = \{N-1, N\}$  et  $x_{I_{r+1}} = (0, \dots, 0, b_{N-1}, 1) \in X_N^d$ , la droite  $\ell$  est contenue dans le  $r$ -plan

$$\{\lambda_1 x_{I_1} + \dots + \lambda_r x_{I_r} + \lambda_{r+1} x_{I_{r+1}} \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}) \in \mathbb{P}^r\}$$

contenu dans  $X_N^d$ , donc est standard.

Supposons  $\omega \neq 0$ .

La droite de  $\mathbb{P}^{N-1}$  passant par les points  $(a_0, \dots, a_{N-2}, 0)$  et  $(b_0, \dots, b_{N-2}, \omega)$  est contenue dans  $X_{N-1}^d$ . Elle est donc standard par hypothèse de récurrence, c'est-à-dire de la forme

$$\{(t\lambda_1 + u\mu_1)x_{I_1} + \dots + (t\lambda_r + u\mu_r)x_{I_r} \mid (t, u) \in \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^1\}$$

où  $I_1, \dots, I_r$  est une partition admissible de  $\{0, \dots, N-1\}$  et où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_r)$  sont fixés dans  $\mathbb{P}^{r-1}$ . On peut supposer que  $N-1$  appartient à  $I_r$ , que  $\lambda_r = 0$  et que  $\mu_r x_{N-1} = \omega$ .

On définit un point  $x'$  de  $X_N^d$  en posant  $x'_i = x_i$  pour  $0 \leq i \leq N-2$ , puis  $x'_{N-1} = b_{N-1}/\mu_r$  et  $x'_N = 1/\mu_r$ . Si  $I'_r = I_r \cup \{N\}$ , la droite  $\ell$  est alors contenue dans le  $(r-1)$ -plan

$$\{\lambda_1 x_{I_1} + \dots + \lambda_{r-1} x_{I_{r-1}} + \lambda_r x_{I'_r} \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{P}^r\}$$

contenu dans  $X_N^d$ , donc est standard.

Si  $\ell$  n'est contenue dans aucun des  $H_i$  et ne contient aucun point avec deux coordonnées nulles, on choisit deux points  $(0, 1, a_2, \dots, a_N)$  et  $(1, 0, b_2, \dots, b_N)$  de  $\ell$ , où aucun des  $a_i$  et des  $b_i$  n'est nul, ainsi qu'aucun des  $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$  pour  $i \neq j$ .

Comme  $\ell$  est contenue dans  $X_N^d$ , le point  $(t, 1, a_2 + tb_2, \dots, a_N + tb_N)$  est dans  $X_N^d$  pour tout  $t$  dans  $\mathbf{k}$ . Comme  $\binom{d}{k} \neq 0$  pour  $1 \leq k \leq d$  (car  $d < p$  ou  $p = 0$ ), on obtient le système suivant en développant l'équation obtenue :

$$\begin{cases} 1 + a_2^d + \dots + a_N^d = 0 \\ b_2 a_2^{d-1} + \dots + b_N a_N^{d-1} = 0 \\ \vdots \\ b_2^{d-1} a_2 + \dots + b_N^{d-1} a_N = 0 \\ 1 + b_2^d + \dots + b_N^d = 0 \end{cases}$$

En prenant les  $N - 1$  premières équations parmi les  $d - 1$  équations centrales dans le système précédent ( $d \geq N$ ), on obtient

$$\begin{pmatrix} b_2/a_2 & \dots & b_N/a_N \\ \vdots & & \vdots \\ (b_2/a_2)^{N-1} & \dots & (b_N/a_N)^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^d \\ \vdots \\ a_N^d \end{pmatrix} = 0$$

Comme aucun des  $a_i$  n'est nul, le déterminant de cette matrice, qui vaut  $\prod (b_i/a_i) \prod_{i < j} (b_i/a_i - b_j/a_j)$ , est donc nul, ce qui contredit l'hypothèse. La droite  $\ell$  est donc nécessairement standard.  $\square$

**Corollaire 3.4.** *Supposons le corps  $\mathbf{k}$  de caractéristique  $> \max\{N, d\}$  ou nulle.*

- a) *Si  $d \geq N \geq 3$ , on a  $\dim F(X_N^d) = N - 3$  et toutes les droites contenues dans  $X_N^d$  sont standard.*
- b) *Si  $N > d \geq 3$ , on a  $\dim F(X_N^d) = 2N - 3 - d$  et  $X_N^d$  contient des droites non standard.*

**Démonstration.** Le point a) a déjà été démontré dans le théorème 3.3. Pour montrer b), on procède par récurrence sur  $N$ . On a  $\dim F(X_N^d) = N - 3$  par le théorème 3.3.

Si  $N > d$ , on coupe  $X_N^d$  par l'hyperplan  $H_0$  d'équation  $x_0 = 0$ , de sorte que  $X_N^d \cap H_0$  est une hypersurface de Fermat de  $H_0$ . On a alors

$$F(X_{N-1}^d) \simeq F(X_N^d \cap H_0) = F(X_N^d) \cap F(H_0)$$

Or  $F(H_0) \simeq \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^{N-1})$  est de codimension 2 dans  $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$ , lisse donc localement intersection complète. Comme  $N - 1 \geq d \geq 3$ , le schéma  $F(X_{N-1}^d)$

n'est pas vide (d'après le point a) ou l'hypothèse de récurrence, selon la valeur de  $N$ ), de codimension au plus 2 dans  $F(X_N^d)$ . On a donc

$$\dim F(X_N^d) \leq \dim F(X_{N-1}^d) + 2 \leq 2(N-1) - 3 - d + 2$$

par l'hypothèse de récurrence.

Rappelons que pour une hypersurface  $X$  de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^N$ , un calcul dans des coordonnées locales de  $G(1, \mathbb{P}^N)$  nous donne  $d + 1$  équations explicites définissant  $F(X)$  dans un espace de dimension  $2N - 2$  (cf. [BVdV79]). Donc le schéma  $F(X_N^d)$  est toujours au moins de la dimension attendue  $2N - d - 3$ , d'où l'égalité.  $\square$

## 3.2 Les hypersurfaces de Fermat de degré divisant $p^r + 1$ en caractéristique $p$

Dans toute cette section,  $\mathbf{k}$  est un corps de caractéristique  $p \neq 0$ . Nous noterons  $q = p^r$ . Nous commençons par étudier les droites contenues dans les hypersurfaces  $X_N^{q+1}$ .

### 3.2.1 Cas des surfaces

Le résultat suivant est énoncé en exercice dans [Deb01] (3.(a) p. 53).

**Proposition 3.5.** *Pour  $d = p^r + 1$ , il y a exactement  $d^3(d-3)$  droites non standard et  $3d^2$  droites standard sur la surface  $X_3^d$ .*

**Démonstration.** Soit  $\ell$  une droite contenue dans  $X_3^d$ . Elle n'est contenue dans aucun hyperplan de coordonnée car  $X_2^d$  est une courbe qui n'est pas une droite ( $d > 1$ ). Il existe donc des points du type

$$A = (0, 1, a_2, a_3) \quad \text{et} \quad B = (1, 0, b_2, b_3)$$

sur  $\ell$ . Le point  $(t, 1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3)$  est alors dans  $X_3^d$  pour tout  $t$  dans  $\mathbf{k}$ . On obtient le système suivant en développant l'équation obtenue :

$$\begin{cases} 1 + a_2^{q+1} + a_3^{q+1} = 0 \\ a_2^q b_2 + a_3^q b_3 = 0 \\ a_2 b_2^q + a_3 b_3^q = 0 \\ 1 + b_2^{q+1} + b_3^{q+1} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est équivalente à  $a_2^{q^2} b_2^q + a_3^{q^2} b_3^q = 0$ . On a donc le système suivant

$$\begin{pmatrix} a_2^{q^2} & a_3^{q^2} \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2^q \\ b_3^q \end{pmatrix} = 0$$

Si le déterminant de cette matrice est non nul, on a nécessairement  $b_2 = b_3 = 0$ , ce qui est impossible car  $(1, 0, 0, 0)$  n'appartient pas à  $X_3^d$ , donc

$$a_3 a_2^{q^2} = a_2 a_3^{q^2}$$

Lorsque  $a_2 a_3$  est nul, on obtient toutes les droites standard : si  $a_2$  (respectivement  $a_3$ ) est nul, alors la deuxième équation du système précédent montre que  $b_3$  (respectivement  $b_2$ ) l'est aussi. Il y a  $3d^2$  telles droites.

Dans le cas contraire,  $a_2 a_3 \neq 0$ , et l'on a  $a_2^{q^2-1} = a_3^{q^2-1}$  avec  $a_2$  (et donc  $a_3$ ) non nul. Donc  $a_2 = \omega a_3$ , où  $\omega$  est une racine  $(q^2 - 1)$ -ième de l'unité. Par symétrie des rôles joués par  $b_i$  et  $a_i$  dans le premier système, on trouve que l'on a de même  $b_2 = \omega' b_3$ . En remplaçant  $a_2$  et  $b_2$  dans ce même système, on obtient

$$\begin{aligned} \omega' \omega^q &= -1 \\ \omega \omega'^q &= -1 \end{aligned}$$

On remarque que ces deux équations sont équivalentes, et que le choix d'un  $\omega$  impose celui de  $\omega'$ .

Les points  $A$  et  $B$  sont donc nécessairement de la forme

$$A = (0, 1, \omega a, a) \quad \text{et} \quad B = (1, 0, -\frac{1}{\omega^q} b, b)$$

où  $\omega$  est une racine  $(q^2 - 1)$ -ième de l'unité. Le premier système montre que pour que la droite  $\langle A, B \rangle$  soit contenue dans  $X_3^d$ , il faut et il suffit que  $A$  et  $B$  soient dans  $X_3^d$ .

Étudions le cas de  $A$ , celui de  $B$  étant analogue. On a  $1 + a^d + \omega^d a^d = 0$ , c'est-à-dire  $\omega^d \neq -1$  et  $a^d = -1/(1 + \omega^d)$ . Or, comme  $\omega^{q+1} = \omega^d = -1$  implique  $\omega^{q^2-1} = 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \text{Card}\{\omega \in \mathbf{k} \mid \omega^{q^2-1} = 1 \text{ et } \omega^{q+1} \neq -1\} \\ &= \text{Card}\{\omega \in \mathbf{k} \mid \omega^{q^2-1} = 1\} - \text{Card}\{\omega \in \mathbf{k} \mid \omega^{q+1} = -1\} \\ &= q^2 - q - 2 \end{aligned}$$

On a donc  $d$  choix possibles pour  $a$ , de même pour  $b$ , et  $(d-1)^2 - d - 1$  choix pour  $\omega$ , tous ces choix étant indépendants en ce qui concerne la détermination de  $A$  (si  $\omega a = \omega' a$ , alors  $\omega = \omega'$ ) de même pour  $B$ . Il y a donc  $d^2((d-1)^2 - d - 1) = d^3(d-3)$  droites non standard sur  $X_3^d$ .  $\square$

### 3.2.2 Description de $F(X_N^{p^r+1})$

**Proposition 3.6.** *Soit  $N \geq 3$  Notons  $X$  l'hypersurface de Fermat  $X_N^{q+1} \subset \mathbb{P}^N$  définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ .*

- a) *Le schéma  $F(X)$  est lisse de dimension  $2N - 6$ .*
- b) *Si  $N \geq 4$ , pour  $x$  général dans  $X$ , le schéma  $F(X, x)$  est de dimension  $N - 4$  et n'est nulle part réduit.*

**Démonstration.** La droite  $\langle x, y \rangle$  joignant deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  est contenue dans  $X$  si et seulement si

$$\sum_{i=0}^N x_i^q y_i = \sum_{i=0}^N x_i y_i^q = 0$$

L'adhérence dans  $X \times X$  de

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x \neq y, \langle x, y \rangle \subset X\}$$

est donc partout de dimension au moins  $2N - 4$ , de sorte que le schéma  $F(X)$  est partout de dimension au moins  $2N - 6$ .

De plus, si l'on considère  $F(X, x)$  comme un sous-schéma de l'hyperplan  $H_N \simeq \mathbb{P}^{N-1}$  de  $\mathbb{P}^N$ , il est défini par les équations

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i^q y_i = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^q = \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{q+1} = 0$$

de sorte que  $\dim F(X, x) \geq N - 1 - 3 = N - 4$ . D'autre part, l'espace tangent  $\mathbb{T}_{F(X,x),[\ell]}$  est de dimension au moins  $N - 3$  car le rang de la jacobienne est inférieur ou égal à 2.

Soit  $\ell$  une droite contenue dans  $X$ . L'espace tangent  $\mathbb{T}_{F(X),[\ell]}$  est isomorphe à  $H^0(\ell, N_{\ell/X})$ . Or on a la suite exacte suivante entre fibrés normaux (cf. [BVDV79], proposition 3 rappelée au § 1.3.3)

$$0 \rightarrow N_{\ell/X} \rightarrow N_{\ell/\mathbb{P}^N} \xrightarrow{\alpha} (N_{X/\mathbb{P}^N})|_{\ell} \rightarrow 0$$

où les fibrés (sur  $\ell \simeq \mathbb{P}^1$ ) se décomposent ainsi (cf. [BVdV79], proposition 3) :

$$\begin{aligned} N_{\ell/\mathbb{P}^N} &\simeq \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{\ell}(1) \\ (N_{X/\mathbb{P}^N})|_{\ell} &\simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_{\ell}(d) \\ N_{\ell/X} &\simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_{\ell}(a_i) \end{aligned}$$

avec  $d = q + 1$  et  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{N-2}$  (pour cette dernière décomposition, cf. § 1.3.3, décomposition 1.4). En prenant les degrés, on obtient l'égalité

$$\sum_{i=1}^{N-2} a_i = N - 1 - d$$

et  $a_i \leq 1$ . Comme  $\mathbb{T}_{F(X,x),[\ell]} \simeq H^0(\ell, N_{\ell/X}(-1))$  est de dimension au moins  $N - 3$ , au moins  $N - 3$  des  $a_i$  sont égaux à 1. Donc

$$N_{\ell/X} \simeq \mathcal{O}_{\ell}(1)^{\oplus(N-3)} \oplus \mathcal{O}_{\ell}(2-d) \quad (3.1)$$

(avec  $2 - d < 0$ ) et  $h^0(\ell, N_{\ell/X}) = 2N - 6$ . On en déduit que  $F(X)$  est lisse de dimension  $2N - 6$ , ce qui montre a).

Le schéma  $F(X, x)$  est la fibre au dessus d'un point  $x$  de la première projection depuis la variété d'incidence :

$$\begin{array}{ccc} \{(x, \ell) \in X \times \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \mid x \in \ell \subset X\} & \longrightarrow & F(X) \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

Le schéma  $F(X)$  est partout de dimension  $2N - 6$  et les fibres de la deuxième projection sont exactement les droites  $\ell$ , donc de dimension 1. La variété d'incidence est donc partout de dimension  $2N - 5$ . Or l'hypersurface  $X$  est de dimension  $N - 1$ , donc la fibre  $F(X, x)$  de la première projection au-dessus d'un point général  $x$  de  $X$  est de dimension partout  $2N - 5 - (N - 1) = N - 4$ .

Comme  $\dim \mathbb{T}_{F(X,x),[\ell]} \geq N - 3 > \dim F(X, x)$ , le schéma  $F(X, x)$  n'est nulle part réduit, ce qui montre b).  $\square$

**Remarque 3.7.** Pour  $N \geq 4$ , l'hypersurface  $X_N^{q+1}$  est donc recouverte par des droites, mais aucune n'est libre à cause de (3.1).

### 3.2.3 Unirationalité de $X_N^d$ pour $d \mid p^r + 1$

C'est la généralisation d'un résultat donné dans [Shi95] pour certaines valeurs de  $N$ . On suit ici la démarche de [Deb01], p. 53. On peut affaiblir les hypothèses sur  $\mathbf{k}$ , et supposer uniquement que  $\mathbf{k}$  contient une racine  $(q+1)$ -ième de  $-1$  dans le théorème 3.8; ou que  $\mathbf{k}$  est parfait et contient une racine  $(q+1)$ -ième de  $-1$  dans la proposition 3.9.

**Théorème 3.8.** *Si  $N \geq 3$  et  $d \mid q+1$ , l'hypersurface  $X_N^d$  est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle.*

On montre plus précisément que  $X_N^{q+1}$  a un revêtement purement inséparable de degré  $q$  qui est rationnel.

**Démonstration.** Comme le morphisme

$$X_N^{q+1} \longrightarrow X_N^d \quad (3.2)$$

$$(x_0, \dots, x_N) \longmapsto (x_0^{(q+1)/d}, \dots, x_N^{(q+1)/d}) \quad (3.3)$$

est dominant, il suffit de montrer que l'hypersurface  $X = X_N^{q+1}$  est  $\mathbf{k}$ -unirationnelle. En d'autres termes, on peut supposer  $d = q + 1$ . On va construire une application rationnelle dominante explicite

$$\mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{N-1} \dashrightarrow X$$

Choisissons une racine  $d$ -ième de  $-1$  que l'on notera  $\omega$ . À chaque point  $x$  de l'ouvert affine dense  $U = X - H$  de  $X$ , où  $H$  est l'hyperplan d'équation  $x_1 = \omega x_0$ , on associe l'unique hyperplan

$$-t\omega x_0 + tx_1 - \omega x_2 + x_3 = 0$$

(avec  $t \in \mathbf{k}$ ) passant par  $x$ . On définit ainsi une application rationnelle  $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^1$ . Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbf{k}(u) & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^1 \\ u & \longmapsto & u^q \end{array}$$

Simplifions l'équation  $x_0^d + \dots + x_N^d = 0$ , en utilisant le fait que l'on s'autorise à prendre la racine  $q$ -ième  $u$  de  $t = \frac{\omega x_2 - x_3}{x_1 - \omega x_0}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N x_i^d &= x_0^d + x_1^d + x_2^d + (t\omega x_0 - tx_1 + \omega x_2)^d + \sum_{i=4}^N x_i^d \\ &= x_0^d + x_1^d + t^{q+1}(\omega x_0 - x_1)^{q+1} \\ &\quad + \omega x_2 t^q (\omega x_0 - x_1)^q + \omega^q x_2^q t (\omega x_0 - x_1) + \sum_{i=4}^N x_i^d \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 t^{1/q} - x_0 \\ y_2 &= -x_1 + \omega x_0 \\ y_3 &= \omega(x_2 t^q - x_0) + (1 - t^{q+1})(\omega x_0 - x_1) \\ y_i &= x_i \quad \text{pour } i \geq 4. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N x_i^d &= -\omega^q x_0^q y_2 - \omega x_0 y_2^q + y_2^{q+1} \\ &\quad + t^{q+1} y_2^{q+1} + \omega x_2 t^q y_2^q + \omega^q x_2^q t y_2 + \sum_{i=4}^N y_i^{q+1} \\ &= \omega^q (x_2^q t - x_0^q) y_2 + \omega (x_2 t^q - x_0) y_2^q + (1 + t^{q+1}) y_2^{q+1} + \sum_{i=4}^N y_i^{q+1} \\ &= y_1^q y_2 + y_3 y_2^q + \sum_{i=4}^N y_i^{q+1} \end{aligned}$$

Le  $\mathbf{k}(u)$ -schéma  $U'$  est donc birationnellement isomorphe à l'hypersurface affine  $V'$  d'équation

$$y_1^q + y_3 + y_4^{q+1} + \dots + y_N^{q+1} = 0$$

dans  $\mathbb{A}_{\mathbf{k}(u)}^{N-1}$ . L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\mathbf{k}(u)}^{N-1} &\longrightarrow V' \\ (y_1, y_4, \dots, y_N) &\longmapsto (y_1, -y_1^q - y_4^{q+1} - \dots - y_N^{q+1}, y_4, \dots, y_N) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, ce qui prouve que le  $\mathbf{k}$ -schéma  $U'$  est rationnel.  $\square$

### Intersection de $X_N^{p^r+1}$ avec des 2-plans contenant une droite $\ell$ particulière

Dans ce paragraphe nous allons montrer que l'hypersurface de Fermat  $X_N^{p^r+1}$  est birationnelle à une variété fibrée en courbes au-dessus du  $\mathbb{P}^{N-2}$  des 2-plans passant par une droite  $\ell$  particulière. C'est une autre façon de présenter la construction précédente. Posons  $d = q + 1$  et choisissons  $\omega$ , racine  $d$ -ième de  $-1$ . L'hypersurface  $X_N^d$  contient la droite

$$\ell = \langle (1, \omega, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, \omega, 0, \dots, 0) \rangle$$

paramétrée par

$$(\alpha, \beta) \longmapsto (\alpha, \alpha\omega, \beta, \beta\omega, 0, \dots, 0)$$

Nous avons considéré plus haut un pinceau d'hyperplans contenant  $\ell$ . Soit  $x = (x_0, \dots, x_N)$  un point de  $X - \ell$ . On regarde maintenant l'intersection du 2-plan  $\langle \ell, x \rangle$  avec  $X$ , lorsque celui-ci n'est pas inclus dans  $X$ .

**Proposition 3.9.** *L'intersection du 2-plan  $\langle \ell, x \rangle$  avec  $X_N^d$  est la réunion de la droite  $\ell$  et d'une courbe  $\Gamma$  de degré  $q$ , lorsque  $\langle \ell, x \rangle$  n'est pas inclus dans  $X_N^d$ . Cette courbe est soit une réunion de  $q$  droites concourantes en un point de  $\ell$ , soit une courbe rationnelle, lisse en dehors de son unique point d'intersection avec la droite  $\ell$ , qui est singulier de multiplicité  $q - 1$  sur cette courbe.*

**Démonstration.** Le 2-plan  $\Pi_x = \langle \ell, x \rangle$  s'écrit, dans les coordonnées de départ,

$$\Pi_x = \{ (\alpha, \alpha\omega, \beta, \beta\omega, 0, \dots, 0) + \gamma x \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{P}^2 \}$$

L'intersection de  $\Pi_x$  avec  $X$  a pour équation, dans des coordonnées  $(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha + \gamma x_0)^d + (\alpha\omega + \gamma x_1)^d + (\beta + \gamma x_2)^d + (\beta\omega + \gamma x_3)^d \\
&\quad + (\gamma x_4)^d + \cdots + (\gamma x_N)^d \\
&= (\alpha + \gamma x_0)(\alpha^q + \gamma^q x_0^q) + (\alpha\omega + \gamma x_1)(\alpha^q \omega^q + \gamma^q x_1^q) \\
&\quad + (\beta + \gamma x_2)(\beta^q + \gamma^q x_2^q) + (\beta\omega + \gamma x_3)(\beta^q \omega^q + \gamma^q x_3^q) \\
&\quad + (\gamma x_4)^d + \cdots + (\gamma x_N)^d \\
&= \alpha^d + \alpha\gamma^q x_0^q + \gamma x_0 \alpha^q + \gamma^d x_0^d - \alpha^d + \alpha\omega\gamma^q x_1^q + \gamma x_1 \alpha^q \omega^q + \gamma^d x_1^d \\
&\quad \beta^d + \beta\gamma^q x_2^q + \gamma x_2 \beta^q + \gamma^d x_2^d - \beta^d + \beta\omega\gamma^q x_3^q + \gamma x_3 \beta^q \omega^q + \gamma^d x_3^d \\
&\quad + (\gamma x_4)^d + \cdots + (\gamma x_N)^d \\
&= \alpha\gamma^q x_0^q + \gamma x_0 \alpha^q + \alpha\omega\gamma^q x_1^q + \gamma x_1 \alpha^q \omega^q \\
&\quad + \beta\gamma^q x_2^q + \gamma x_2 \beta^q + \beta\omega\gamma^q x_3^q + \gamma x_3 \beta^q \omega^q \\
&= \gamma \left( ((x_0^q + \omega x_1^q)\alpha + (x_2^q + \omega x_3^q)\beta) \gamma^{q-1} \right. \\
&\quad \left. + (x_0 + \omega^q x_1)\alpha^q + (x_2 + \omega^q x_3)\beta^q \right)
\end{aligned}$$

C'est donc la réunion de la droite  $\ell$  et d'une courbe plane de degré  $q$  dont une équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&((x_0^q + \omega x_1^q)\alpha + (x_2^q + \omega x_3^q)\beta) \gamma^{q-1} \\
&\quad + ((x_0^{1/q} + \omega x_1^{1/q})\alpha + (x_2^{1/q} + \omega x_3^{1/q})\beta)^q = 0
\end{aligned}$$

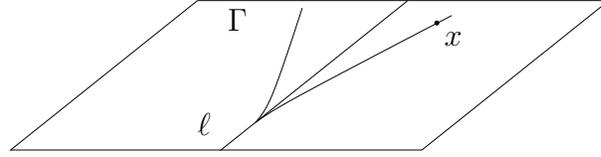
ou encore

$$L(\alpha, \beta) \gamma^{q-1} + L'(\alpha, \beta)^q = 0$$

où  $L$  et  $L'$  sont des formes linéaires (qui dépendent de  $x$ ). Si  $L$  et  $L'$  sont simultanément identiquement nulles, le 2-plan  $\langle \ell, x \rangle$  est inclu dans  $X$ , ce qui est exclu. Si  $L$  et  $L'$  sont proportionnelles, c'est une réunion de  $q$  droites concourantes en un point de  $\ell$ . Ces droites sont toutes confondues si  $L \equiv 0$ , ou bien  $\ell$  comptée avec une multiplicité  $q - 1$  et la droite  $L' = 0$  si  $L \equiv 0$ .

Si  $L$  et  $L'$  ne sont pas proportionnelles, c'est une courbe rationnelle, lisse en dehors de son unique point d'intersection avec la droite  $\ell$ , qui est de multiplicité  $q - 1$  sur cette courbe. □

**Remarque 3.10.** L'hypersurface de Fermat  $X_N^{q+1}$  est donc birationnelle à une variété fibrée en courbes au-dessus du  $\mathbb{P}^{N-2}$  des 2-plans passant par la

FIG. 3.1 – Section de  $X$  dans le 2-plan  $\langle \ell, x \rangle$ 

droite  $\ell$ . La courbe générique est une courbe plane de degré  $q + 1$ , qui après extraction des racines  $q$ -ièmes dans  $\mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbb{P}^{N-2})$ , ce qui fait passer à un corps  $\mathbf{L}$ , est  $\mathbf{L}$ -birationnelle à la droite projective. Si on paramètre les  $\Pi_x$  par  $(1, 0, x_2, 0, x_4, \dots, x_N)$ , le corps  $\mathbf{L}$  est  $\mathbf{k}(x_2^{1/q}, x_4, \dots, x_N)$ , qui est  $\mathbf{k}$ -rationnel.

Par un raisonnement analogue à celui de la proposition 2.16, cette construction reste en grande partie valable pour toute droite  $\ell$  contenue dans  $X$ .

**Proposition 3.11.** *Pour toute droite  $\ell$  contenue dans  $X_N^d$ , l'intersection du 2-plan  $\Pi_x = \langle \ell, x \rangle$  avec  $X_N^d$  est la réunion de la droite  $\ell$  et d'une courbe  $\Gamma$  de degré  $q$ , et cette dernière a un unique point d'intersection avec la droite  $\ell$ .*

**Démonstration.** On se place dans des coordonnées  $(y_0, \dots, y_N)$  telles que  $\ell$  ait pour équations  $y_2 = \dots = y_N = 0$ . L'équation  $P$  de  $X$  s'écrit

$$P = y_2 P_2 + \dots + y_N P_N$$

où  $P_i|_{\ell} = \frac{\partial P}{\partial y_i}|_{\ell}$ . Toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial P}{\partial y_i}$  sont des puissances  $q$ -ièmes de formes linéaires (définies sur  $\mathbf{k}^{1/q}$ ). Le 2-plan  $\Pi_x = \langle \ell, x \rangle$  s'écrit

$$\Pi_x = \{(\alpha, \beta, \gamma x) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{P}^2\}$$

L'équation de  $\Pi_x \cap X$  dans  $\Pi_x$  s'écrit donc

$$\begin{aligned} P|_{\Pi_x} &= \gamma x_2 P_2(\alpha, \beta, \gamma x) + \dots + \gamma x_N P_N(\alpha, \beta, \gamma x) \\ &= \gamma (x_2 P_2(\alpha, \beta, \gamma x) + \dots + x_N P_N(\alpha, \beta, \gamma x)) \end{aligned}$$

et l'on reconnaît la droite  $\ell$  (d'équation  $\gamma = 0$ ) et la courbe  $\Gamma$  (d'équation l'autre facteur). L'équation de  $\ell \cap \Gamma$  dans ce repère est donc  $x_2 P_2(\alpha, \beta, 0) + \dots + x_N P_N(\alpha, \beta, 0) = 0$ . C'est une combinaison linéaire de puissances  $q$ -ièmes, donc une puissance  $q$ -ième (dans  $\mathbf{k}^{1/q}$ ) : la courbe  $\Gamma$  a un unique point d'intersection avec  $\ell$ , et il est de multiplicité  $q$ . Par contre on ne connaît pas

la forme des polynômes  $P_i$  hors de  $\ell$  (elle dépend de l'équation de  $\ell$  dans la base canonique), donc on ne peut *a priori* rien dire de plus sur la courbe  $\Gamma$ .  $\square$

### 3.3 Courbes rationnelles sur $X_N^{p^r+1}$ en caractéristique $p$

Toute hypersurface lisse de degré  $d < N$  dans  $\mathbb{P}^N$  est recouverte par des droites. En caractéristique nulle, une telle droite générale est donc libre. En caractéristique  $p > 0$  en revanche, cela peut ne pas être le cas : aucune droite contenue dans l'hypersurface de Fermat  $X_N^{q+1} \subset \mathbb{P}^N$  n'est libre (rem. 3.7).

Il est donc intéressant de tester la présence de courbes rationnelles libres ou très libres sur les hypersurfaces de Fermat  $X_N^d \subset \mathbb{P}^N$  sur un corps de caractéristique  $p > 0$ , pour  $d \leq N$ .

Comme Madore le remarque ([Mad04]), toutes les hypersurfaces cubiques lisses de dimension  $\geq 2$  contiennent des courbes rationnelles très libres : on peut prendre par exemple des cubiques planes à point double, sauf sur l'hypersurface cubique de Fermat en caractéristique 2, qui n'en contient pas, mais sur laquelle une cubique rationnelle normale est très libre<sup>1</sup>.

Dans le cas particulier des hypersurfaces de Fermat, nous montrons, plus généralement que dans le cas  $p = 2$  et  $r = 1$ , que lorsque  $N \geq 2q - 1$ , l'hypersurface  $X_N^{q+1}$  contient une courbe rationnelle très libre de degré  $2q - 1$  définie sur  $\mathbb{F}_p$  (cor. 3.17). Inversement, une courbe rationnelle très libre dans  $X_N^{q+1}$  est nécessairement de degré  $\geq q$  (théorème 3.16.a)). Si elle est non dégénérée de degré  $> N$ , elle est même de degré  $\geq 2q + 1$  (prop. 3.19).

Nous utiliserons souvent le fait que *toute* section hyperplane lisse de  $X_N^{q+1}$  est isomorphe à  $X_{N-1}^{q+1}$  lorsque le corps est algébriquement clos (théorème démontré par Beauville, [Bea90]).

---

<sup>1</sup>Il donne même explicitement une telle courbe, définie sur  $\mathbb{F}_2$  :

$$u \longmapsto (u^3 + u^2, u^3 + u^2 + 1, u^2 + 1, u, 0, \dots, 0)$$

### 3.3.1 Courbes rationnelles sur $X_N^{p^r+1}$

On se place donc sur un corps  $\mathbf{k}$  de caractéristique  $p > 0$ . Une courbe rationnelle de degré  $d$  est l'image d'un morphisme  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^N$  de degré  $d$ . Nous allons chercher des courbes rationnelles sur l'hypersurface de Fermat  $X_N^{q+1} \subset \mathbb{P}^N$ .

On appellera *courbe rationnelle normale de degré  $e$  dans  $\mathbb{P}^N$*  toute courbe rationnelle  $C$  de degré  $e$  qui engendre un sous-espace linéaire  $\langle C \rangle$  de dimension  $e$ . Une telle courbe est nécessairement lisse et  $e \leq N$ . Une courbe non dégénérée est une courbe qui engendre  $\mathbb{P}^N$ .

**Proposition 3.12.** *Toute courbe rationnelle non dégénérée contenue dans l'hypersurface  $X_N^{q+1} \subset \mathbb{P}^N$  est de degré  $\geq \min\{q + \frac{1}{2}(N - 1), 2q - 1\}$  et supérieur ou égal à  $N$ .*

**Démonstration.** Considérons une courbe rationnelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ u &\longmapsto (s_0(u), \dots, s_N(u)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

de degré  $e$ , avec  $s_i(u) = \sum_{j=0}^e s_{ij} u^j$ . Pour qu'elle soit contenue dans  $X_N^{q+1}$ , il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^N \left( \sum_{j=0}^e s_{ij} u^j \right)^{q+1} \\ &= \sum_{i=0}^N \left( \sum_{j=0}^e s_{ij}^q u^{jq} \right) \left( \sum_{j=0}^e s_{ij} u^j \right) \\ &= \sum_{j,k=0}^e \left( \sum_{i=0}^N s_{ij}^q s_{ik} \right) u^{jq+k} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notons  $S$  la matrice  $(s_{ij})$ , de taille  $(N + 1) \times (e + 1)$ , et posons  $S^{(q)} = (s_{ij}^q)$  et  $T = {}^t S^{(q)} S = (t_{jk})$ , matrice carrée d'ordre  $e + 1$ .

Si  $e < q$ , chaque puissance de  $u$  n'est atteinte qu'au plus une fois dans la somme (3.5), et  $T = 0$ .

Si  $q \leq e \leq 2q - 2$ , pour chaque  $m \in \{0, \dots, e\}$ , les puissances

$$(m - 1)q + e + 1, \dots, (m + 1)q - 1$$

ne sont atteintes qu'une seule fois. On a donc

$$t_{m,e+1-q} = \cdots = t_{m,q-1} = 0$$

La matrice  $T$  possède donc  $2q - e - 1$  colonnes nulles, de sorte que son rang est au plus  $2e - 2q + 2$ .

Si la courbe  $f$  est non dégénérée, la matrice  $S$  est de rang  $N + 1$ . Si c'est le cas,  $T$  est aussi de rang  $N + 1$ . Donc  $N \leq e$ . De plus, si  $e \leq 2q - 2$ , le rang de  $T$  est au plus  $2e - 2q + 2$  on en déduit la proposition dans ce cas.  $\square$

**Remarque 3.13.** Avec les notations de la démonstration, on a  $\text{rang}({}^t S^{(q)} S) \geq 2 \text{rang}(S) - N - 1$ . On en déduit que pour toute courbe rationnelle  $C$  de degré  $e \leq 2q - 2$  contenue dans l'hypersurface  $X_N^{q+1}$ , on a

$$\dim\langle C \rangle \leq \frac{1}{2}(N - 1) + \max\{0, e - q + 1\}$$

Par exemple, si  $q = 3$ , la quartique de Fano  $X_4^4 \subset \mathbb{P}^4$  ne contient aucune conique lisse. Plus généralement, si  $N < 2q - 1$ , l'hypersurface  $X_N^{q+1}$  ne contient aucune courbe rationnelle normale de degré  $\geq q - 1$ .

**Proposition 3.14.** *Lorsque  $N \geq 2q - 1$ , l'hypersurface  $X_N^{q+1} \subset \mathbb{P}^N$  contient une courbe rationnelle normale de degré  $2q - 1$  définie sur  $\mathbb{F}_p$ .*

**Démonstration.** Quitte à prendre une section linéaire par l'espace linéaire  $x_{2q} = \cdots = x_N = 0$ , on peut supposer  $N = 2q - 1$ . On garde les notations de la démonstration précédente. On cherche une matrice  $S$  inversible d'ordre  $2q$  telle que la matrice  $T = {}^t S^{(q)} S$  vérifie l'égalité (3.5), c'est-à-dire

$$\sum_{j,k=0}^{2q-1} t_{jk} u^{jq+k} = 0$$

On remarque que les puissances  $0 \cdot q + k$  avec  $k \in \{0, \dots, q - 1\}$  ne sont atteintes qu'une fois, et de même pour les puissances de la forme  $e \cdot q + k$  avec  $k \in \{q, \dots, 2q - 1\}$  : la première moitié de la première ligne et la deuxième moitié de la dernière ligne sont nulles. De plus, une puissance  $m \in$







**Corollaire 3.18.** *Si  $d$  est un entier positif tel qu'il existe  $r > 0$  avec  $d \mid q+1$  et  $q \leq (N+1)/2$ , l'hypersurface de Fermat  $X_N^d \subset \mathbb{P}^N$  est séparablement rationnellement connexe.*

**Démonstration.** Le corollaire 3.17 montre que l'hypersurface  $X_N^{q+1}$  contient une courbe rationnelle très libre. La ramification de l'application (3.2) :

$$\begin{aligned} X_N^{q+1} &\longrightarrow X_N^d \\ (x_0, \dots, x_N) &\longmapsto (x_0^{(q+1)/d}, \dots, x_N^{(q+1)/d}) \end{aligned}$$

est contenue dans la réunion des hyperplans de coordonnées. Donc il existe certainement, par déformation, une courbe rationnelle sur  $X_N^{q+1}$  très libre définie sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  qui n'est pas contenue dans la ramification (en suivant la démarche de la démonstration de la proposition 1.23 l'application  $ev_e$  est dominante, et la Proposition 4.9 de [Deb01] permet de conclure). On peut donc utiliser la proposition 1.17 : l'image de cette courbe est encore très libre dans  $X_N^d$ .  $\square$

Peut-on trouver une courbe très libre définie sur  $\mathbb{F}_p$  ? Si  $N = 2q - 1$ , il existe une telle courbe rationnelle normale très libre de degré  $2q - 1$  définie sur  $\mathbb{F}_p$  ; elle engendre  $\mathbb{P}^N$  donc n'est pas contenue dans la ramification.

Si  $N > 2q - 1$  et que  $r$  est pair, l'intersection de  $X_N^{q+1}$  avec l'hyperplan  $x_N = ax_{N-1}$ , où  $a \in \mathbb{F}_p^*$  est quelconque, est isomorphe, via l'action de  $\mathrm{PGL}(N, \mathbb{F}_{p^2})$ , à  $X_{N-1}^{q+1}$ . Il existe donc une courbe rationnelle, très libre dans cette sous-variété, définie sur  $\mathbb{F}_{p^2}$ . Par un lemme de [Mad04] rappelé dans la proposition 1.16, la courbe est encore très libre dans  $X_N^{q+1}$ , et son image est donc très libre dans  $X_N^d$ .

**Démonstration du théorème 3.16.** Considérons une courbe rationnelle de degré  $e$ , en reprenant les notations de (3.4),

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ u &\longmapsto (s_0(u), \dots, s_N(u)) \end{aligned}$$

avec  $s_i(u) = \sum_{j=0}^e s_{ij}u^j$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & f^*T_X & \longrightarrow & f^*T_{\mathbb{P}^N} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e(q+1)) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{N+1} & \xrightarrow{g} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e(q+1)) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & = & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 
\end{array} \quad (3.8)$$

où le morphisme  $g$  est donné par

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{N+1} &\xrightarrow{g} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e(q+1)) \\
(p_0, \dots, p_N) &\longmapsto p_0s_0^q + \dots + p_Ns_N^q = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^e p_i s_{ij}^q u^{jq}
\end{aligned}$$

Ce diagramme provient, pour la première ligne et la deuxième colonne, du pullback par  $f$  de degré  $e$  des suites exactes respectivement du fibré normal de  $X$  dans  $\mathbb{P}^N$  et du fibré tangent de  $\mathbb{P}^N$  (cf. [Har83] II § 8 p.182).

Soit  $s$  un entier naturel. On note  $g_s$  l'application linéaire obtenue en tensorisant la suite exacte de faisceaux par  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1-s)$  puis en prenant les sections globales de l'application  $g$ . Elle est donnée par

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e-1-s))^{N+1} &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e(q+1)-1-s)) \\
(p_0, \dots, p_N) &\longmapsto \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^e \sum_{k=0}^{e-1-s} p_{ik} s_{ij}^q u^{jq+k} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

où  $p_i = \sum_{k=0}^{e-1-s} p_{ik} u^k$ .

**Supposons**  $s = e - q + 1$ . Nous avons alors  $e - 1 - s = q - 2 > -2$ , et la suite exacte longue de cohomologie de la deuxième ligne s'écrit

$$\begin{aligned}
&H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q-2))^{N+1} \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e(q+1)-1-(e-q+1))) \\
\longrightarrow &H^1(\mathbb{P}^1, K(-1-(e-q+1))) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q-2))^{N+1} = 0
\end{aligned}$$

Le conoyau de  $g_{e-q+1}$  est donc  $H^1(\mathbb{P}^1, K(-1-(e-q+1)))$ .

Puisque  $e - 1 - s = q - 2 < q - 1$ , le coefficient de  $u^{jq-1}$  est alors nécessairement nul dans la triple somme (3.9) pour chaque  $j \in \{1, \dots, e\}$ , donc  $h^1(\mathbb{P}^1, K(-1 - s)) \geq e$ . Comme

$$\begin{aligned} h^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X(-1 - s)) &\geq h^1(\mathbb{P}^1, K(-1 - s)) - h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1 - s)) \\ &= h^1(\mathbb{P}^1, K(-1 - s)) - (e - q + 1) \\ &\geq q - 1 \end{aligned}$$

la courbe n'est donc pas  $s$ -libre.

**Supposons maintenant**  $s = e - q$ . On peut décomposer l'application  $g_s$  matriciellement, en considérant la matrice  $P \in \mathcal{M}_{N+1, e-s}(\mathbf{k}) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e - 1 - s))^{N+1}$  des  $(p_{ik})_{ik}$ , et les applications  $g_s^{(1)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N+1, e-s}(\mathbf{k}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{e+1, e-s}(\mathbf{k}) \\ P &\longmapsto {}^t S^{(q)} P \end{aligned}$$

et  $g_s^{(2)}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{e+1, e-s}(k) &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e(q+1) - 1 - s)) \\ Q &\longmapsto \sum_{j=0}^e \sum_{k=0}^{e-1-s} q_{jk} u^{jq+k} \end{aligned}$$

L'application  $g_s$  sera la composée de  $g_s^{(1)}$  et  $g_s^{(2)}$ . L'application  $g_s^{(2)}$  est surjective.

Au vu de la formule (3.9), pour que l'application  $g_s$  soit surjective, il *suffit* que l'application  $g_s^{(1)}$  le soit. C'est le cas si  $S$  est de rang  $e + 1$ , c'est-à-dire si la courbe  $S$  est normale, propriété qui est vérifiée sous les hypothèses de b), qui se trouve ainsi démontré.  $\square$

Nous cherchons des courbes rationnelles  $s$ -libres non dégénérées de degré  $e \geq N$  dans  $X_N^{q+1}$ . Le théorème 3.16.a) entraîne  $e \geq q + s$ . On va montrer une meilleure minoration.

**Proposition 3.19.** *Soit  $s$  un entier naturel. Si une courbe rationnelle non dégénérée, de degré  $e \leq 2q + s$ , contenue dans l'hypersurface  $X_N^{q+1} \subset \mathbb{P}^N$ ,  $y$  est  $s$ -libre, on a*

- soit  $e = N \geq 2q - 1$  et

$$K \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N - q)^{\oplus N}$$

- soit  $e = 2q + s$  et

$$K \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s)^{\oplus(2q+s-N)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q + s)^{\oplus(2N-2q-s)}$$

où  $K$  est le fibré défini par les suites exactes (3.8) du début de la démonstration du théorème 3.16.

**Démonstration de la proposition 3.19.** Soit  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X_{q+1}^N$  une courbe rationnelle non dégénérée de degré  $e \geq N$ . Gardant les notations de la démonstration du théorème 3.16, on écrit  $K = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ , avec  $a_1 \leq \dots \leq a_N \leq e$  et

$$a_1 + \dots + a_N = \deg(K) = e(N - q)$$

Si  $(p_0, \dots, p_N) \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q-1))^{N+1}$  est dans le noyau  $H^0(\mathbb{P}^1, K(q-1-e))$  de  $g_{e-q}$ , on a  $\sum_{i=0}^N p_i s_{ij}^q = 0$  pour tout  $j \in \{0, \dots, e\}$ . La courbe  $f$  étant non dégénérée, la matrice  $S = (s_{ij})$  est de rang maximal  $N + 1$ . On en déduit  $H^0(\mathbb{P}^1, K(q-1-e)) = 0$ , c'est-à-dire

$$a_1 \leq \dots \leq a_N \leq e - q$$

(ceci renforce dans ce cas le théorème 3.16.a)).

Lorsque  $f$  est de degré maximal  $e = N$ , on a en particulier

$$a_1 + \dots + a_N = N(N - q) \quad , \quad a_1 \leq \dots \leq a_N \leq N - q$$

de sorte que  $K \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N - q)^{\oplus N}$ . On est dans le premier cas et la proposition 3.12 entraîne alors  $e = N \geq 2q - 1$ .

Supposons donc  $e > N$  et regardons le noyau  $H^0(\mathbb{P}^1, K(q - e))$  de

$$g_{e-q-1} : H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q))^{N+1} \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q(e + 1)))$$

dont la dimension est le nombre de  $a_i$  égaux à la valeur maximale  $e - q$ .

Notons  $S_0, \dots, S_e$  les lignes de  ${}^t S^{(q)}$ ; elles engendrent  $\mathbf{k}^{N+1}$ . Si  $(p_0, \dots, p_N)$  est dans le noyau, avec  $p_i = \sum_{k=0}^q p_{ik} u^k$ , on note  $P_k = \begin{pmatrix} p_{0k} \\ \vdots \\ p_{Nk} \end{pmatrix}$  pour  $k \in$

$\{0, \dots, q\}$ . On obtient

$$\begin{aligned}
0 &= S_0 \cdot P_0 = \dots = S_0 \cdot P_{q-1} \\
0 &= S_0 \cdot P_q + S_1 \cdot P_0 \\
0 &= S_1 \cdot P_1 = \dots = S_1 \cdot P_{q-1} \\
0 &= S_1 \cdot P_q + S_2 \cdot P_0 \\
&\vdots \\
0 &= S_{e-1} \cdot P_1 = \dots = S_{e-1} \cdot P_{q-1} \\
0 &= S_{e-1} \cdot P_q + S_e \cdot P_0 \\
0 &= S_e \cdot P_1 = \dots = S_e \cdot P_q
\end{aligned}$$

Les vecteurs  $P_1, \dots, P_{q-1}$  sont « orthogonaux » à tous les  $S_i$  donc sont nuls. Il reste  $e + 2$  conditions sur  $P_0$  et  $P_q$ , de sorte que

$$h^0(\mathbb{P}^1, K(q - e)) \geq 2(N + 1) - (e + 2) = 2N - e$$

Au moins  $2N - e$  des  $a_i$  sont donc égaux à  $e - q$ . Si la courbe  $f$  est  $s$ -libre, tous les  $a_i$  sont  $\geq s$ . On a donc  $e \geq q + s$  et

$$e(N - q) = \sum_{i=1}^N a_i \geq (e - q)(2N - e) + s(N - (2N - e))$$

Comme  $e > N$ , on en déduit  $s \leq e - 2q$ . S'il y a égalité,  $K$  est du type voulu.  $\square$

**Remarque 3.20.** Au vu du corollaire 3.17, Nous avons établi la rationalité connexe séparable des hypersurfaces de Fermat du type  $X_N^{q+1}$  sur un corps de caractéristique  $p$ , pour  $N \geq 2q - 1$ . Il reste à examiner le cas où  $q + 1 = d \leq N < 2q - 1$ .

La proposition 3.19 montre que les courbes rationnelles non dégénérées libres (resp. très libres) sur l'hypersurface de Fermat  $X_N^{q+1} \subset \mathbb{P}^N$ , pour  $q < N < 2q - 1$ , sont de degré  $\geq 2q$  (resp.  $\geq 2q + 1$ ). Je n'ai malheureusement pas réussi à construire de telles courbes en général. Dans le premier cas, à savoir  $p = q = 3$  et  $N = 4$ , on vérifie que la courbe

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^1 &\longrightarrow X_4^4 \\
u &\longmapsto (1 - u^4 + u^6, -1 + u - u^3 - u^4 + u^5 + u^6, \\
&\quad 1 + u - u^3 + u^4 + u^5 - u^6, u^2 - u^4, u^5)
\end{aligned}$$

de degré 6, est libre.

Expliquons pourquoi.

Notons  $S$  la matrice définissant la courbe  $f$ , de degré  $e = 6$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow X_4^4 \\ u &\longmapsto (1 - u^4 + u^6, -1 + u - u^3 - u^4 + u^5 + u^6, \\ &\quad 1 + u - u^3 + u^4 + u^5 - u^6, u^2 - u^4, u^5) \end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons dans un premier temps que cette courbe est dans l'hypersurface de Fermat. Il suffit de montrer que la matrice  $T = {}^tS^{[q]}S = {}^tSS$  est de la forme (3.7).

$$T = {}^tSS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice  $T$  est bien de la forme (3.7) avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans le cas général, la courbe sera  $s$ -libre si  $e > s - 1$  et si l'application linéaire  $g_s$  décrite en (3.9), est surjective : si on note  $\mathbf{k}[u]_m$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{k}$ , de degré  $\leq m$ , celle-ci s'identifie à l'application

$$\begin{aligned}
g_s : \mathbf{k}[v]_{e-1-s}^{N+1} &\longrightarrow \mathbf{k}[u]_{e(q+1)-1-s} \\
(p_0, \dots, p_N) &\longmapsto \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^e \sum_{k=0}^{e-1-s} p_{ik} S_{ij}^q u^{jq+k}
\end{aligned}$$

Supposons pour simplifier  $e - s = mq$ , avec  $m \in \mathbb{N}^*$ . En ordonnant convenablement les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée, on va montrer que la matrice de  $g_s$  est diagonale par blocs avec  $q$  blocs identiques  $G^{(q)}$  sur la diagonale, où

$$G = \left( \begin{array}{c|ccc|c} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \hline {}^tS & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & {}^tS & & \\ \hline 0 & & & {}^tS & 0 \\ & 0 & & & \hline \vdots & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & \cdots & & {}^tS \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{e+m, m(N+1)}(\mathbf{k})$$

Ici  $s = 0$ ,  $p = q = 3$  et  $N = 4$ , donc  $m = 2$ . La matrice  $G$ , de taille  $8 \times 10$ , est simplement formée de deux blocs :

$$G = \left( \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline {}^tS & \\ \hline 0 & \\ & {}^tS \end{array} \right)$$

Cette matrice est de rang maximal : le mineur où l'on a enlevé les colonnes 2 et 4 est de déterminant 1. Donc la courbe est libre.

Résumons la méthode employée pour trouver des courbes libres de degré  $2q$ . Nous cherchons une matrice  $T$  de taille  $(2q + 1) \times (2q + 1)$  qui soit

- de la forme (3.7), pour que la courbe soit incluse dans l'hypersurface,
- de rang  $N + 1$ ,
- de la forme  ${}^tSS$  (au vu de la condition précédente et de la symétrie de  $T$ , il suffit que le discriminant de la forme quadratique associée à  $T$  soit un carré),

- telle que l'application  $g_s$  soit surjective (c'est-à-dire que la matrice  $G$  soit de rang maximal).

Une fois la matrice  $T$  fixée, le choix de  $S$  n'a pas d'influence sur la liberté de la courbe.



# Chapitre 4

## Annexe : séparabilité

### 4.1 Applications dominantes

**Définition 4.1.** Une application  $f : X \dashrightarrow Y$  entre  $\mathbf{k}$ -schémas est dite dominante si son image est dense dans  $Y$ .

**Proposition 4.2.** Soient  $X$  et  $Y$  des  $\mathbf{k}$ -schémas intègres. Il y a une correspondance bijective entre les applications rationnelles dominantes  $X \dashrightarrow Y$  et les extensions de corps  $\mathbf{k}(X)/\mathbf{k}(Y)$ .

Pour une démonstration, voir le lemme II.12.2 de [Man86].

**Proposition 4.3.** Soit  $\mathbf{K}/\mathbf{k}$  une extension de corps. Une application rationnelle  $f : X \dashrightarrow Y$  entre  $\mathbf{k}$ -schémas intègres est dominante si et seulement si l'application  $X_{\mathbf{K}} \dashrightarrow Y_{\mathbf{K}}$  déduite de  $f$  par extension des scalaires est dominante.

**Démonstration.** Quitte à restreindre  $X$  et  $Y$ , on peut les supposer affines : notons  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$ . Si l'application déduite de  $f$  entre les algèbres réduites  $\varphi : A_{\text{réd}} \longrightarrow B_{\text{réd}}$  est injective, l'application  $f$  est dominante ([Har83] p. 81). Le théorème de constructibilité de Chevalley ([Har83], II ex 3.22) nous donne la réciproque. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K} & \longleftarrow & A_{\text{réd}} \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ B_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K} & \longleftarrow & B_{\text{réd}} \end{array}$$

Supposons  $\varphi$  injective. L'extension de corps  $\mathbf{K}/\mathbf{k}$  est plate donc  $A_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K} \longrightarrow B_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K}$  est injective, et  $(A_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K})_{\text{réd}} \longrightarrow (B_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K})_{\text{réd}}$  l'est aussi.

Réciproquement, supposons  $(A_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K})_{\text{réd}} \longrightarrow (B_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K})_{\text{réd}}$  injective. Les  $\mathbf{k}$ -algèbres  $A_{\text{réd}}$  et  $B_{\text{réd}}$  sont des  $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels, donc les flèches horizontales sont injectives. Soit  $a$  un élément de  $A_{\text{réd}}$  qui s'annule dans  $B_{\text{réd}}$ . Il reste nul dans  $B_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K}$  donc est nilpotent dans  $A_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K}$ . Or  $A_{\text{réd}} \longrightarrow A_{\text{réd}} \otimes \mathbf{K}$  est injective, donc il est déjà nilpotent dans  $A_{\text{réd}}$ , donc nul puisque  $A_{\text{réd}}$  est réduite.  $\square$

**Corollaire 4.4.** *Soient  $X$  et  $Y$  des  $\mathbf{k}$ -schémas de type fini. S'il existe une application  $f : X \dashrightarrow Y$  dominante, alors  $X$  géométriquement irréductible implique  $Y$  géométriquement irréductible.*

**Démonstration.** L'application  $\bar{f}$  déduite de  $f$  par extension des scalaires à la clôture algébrique est dominante, donc  $X$  géométriquement irréductible implique que  $Y_{\bar{\mathbf{k}}}$  a au plus une composante irréductible :  $Y$  est géométriquement irréductible.  $\square$

## 4.2 Schémas et applications séparables

### 4.2.1 Schémas et morphismes

**Définition 4.5.** Un schéma  $X$  sur un corps  $\mathbf{k}$  est dit *séparable*, ou *séparable sur  $\mathbf{k}$* , si pour toute extension  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{k}$ ,  $X \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{K}$  est réduit. Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de schémas, on dit que  $f$  est *séparable*, ou que  $X$  est *séparable sur  $Y$* , si  $X$  est plat sur  $Y$  et si pour tout  $y \in Y$ , la fibre  $X \otimes_Y \mathbf{k}(y)$  est séparable sur  $\mathbf{k}(y)$ .

Cette définition est celle de SGA1 exposé X. On remarquera qu'être séparable est exactement être géométriquement réduit. Si  $X$  est un schéma sur un corps  $\mathbf{k}$ , dire qu'il est séparable signifie aussi qu'il est *réduit*, et que tous les corps  $\mathbf{k}(x)$ , pour  $x$  point générique d'une composante irréductible de  $X$ , sont des extensions séparables de  $\mathbf{k}$ . Si  $\mathbf{k}$  est parfait, il revient donc au même de dire que  $X$  est réduit.

Notons que pour toute extension  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{k}$  le  $\mathbf{k}$ -schéma  $X$  est séparable sur  $\mathbf{k}$  si et seulement si le  $\mathbf{K}$ -schéma  $X_{\mathbf{K}}$  est séparable sur  $\mathbf{K}$  ([Gro67a],

proposition 4.6.5). Par conséquent, si  $X$  est séparable sur  $Y$ , alors pour tout changement de base  $Y' \rightarrow Y$ ,  $X' = X \times_Y Y'$  est séparable sur  $Y'$ .

Si  $\mathbf{k}'$  est une extension finie de  $\mathbf{k}$ , le morphisme  $\text{Spec } \mathbf{k}' \rightarrow \text{Spec } \mathbf{k}$  est séparable au sens de la définition 4.5 si et seulement si l'extension  $\mathbf{k}'/\mathbf{k}$  est séparable au sens classique de la théorie des corps.

Le théorème 3.3 de [Jou83] nous montre qu'une extension de corps  $\mathbf{k}'/\mathbf{k}$  est séparable (au sens précédent) si et seulement si elle se scinde en une extension transcendante pure suivie d'une extension finie séparable.

La proposition 4.6.1 de [Gro67a] nous montre qu'il suffit de se placer au-dessus d'une extension parfaite du corps de base :

**Proposition 4.6.** *Un schéma  $X$  sur un corps  $\mathbf{k}$  est séparable, si et seulement s'il existe une extension parfaite  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{k}$  telle que  $X \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{K}$  est réduit.*

C'est la proposition 4.6.1 de [Gro67a].

## 4.2.2 Applications rationnelles

**Définition 4.7.** Une application *rationnelle* dominante  $X \dashrightarrow Y$  entre  $\mathbf{k}$ -schémas intègres est dite séparable si l'extension de corps  $\mathbf{k}(X)/\mathbf{k}(Y)$  est séparable.

**Proposition 4.8.** *Pour qu'une application rationnelle dominante  $f : X \dashrightarrow Y$  entre  $\mathbf{k}$ -schémas intègres soit séparable il faut et il suffit qu'il existe un ouvert dense  $U$  de  $X$  tel que  $f|_U : U \rightarrow Y$  soit un morphisme séparable.*

**Démonstration.** Supposons l'extension de corps  $\mathbf{k}(X)/\mathbf{k}(Y)$  séparable : l'anneau  $\mathbf{k}(X) \otimes_{\mathbf{k}(Y)} \bar{\mathbf{k}}(Y)$  est réduit. Notons  $\varepsilon$  et  $\eta$  les points génériques respectifs de  $X$  et  $Y$ . Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$  tel que l'application  $f$  définisse un morphisme plat de  $U$  dans  $Y$ .

D'après [Gro67a] proposition 4.6.1, la fibre générique  $U_\eta$  est réduite et les corps des points génériques des composantes irréductibles de  $U_\eta$  (ici il n'y a qu'une composante irréductible, de corps  $\mathbf{k}(X)$ ) sont des extensions séparables de  $\mathbf{k}(\eta)$  si et seulement si  $U_\eta$  est géométriquement réduit. Le schéma  $U_\eta$  est donc séparable.

D'après [Gro67b] 9.7.7, l'ensemble  $E$  des  $y \in Y$  pour lesquels la fibre  $X_{\mathbf{k}(y)}$  est géométriquement réduite est localement constructible, ce qui implique ([Gro67b] 9.2.1) que la fibre générique  $X_\eta$  est géométriquement réduite si et

seulement si la fibre  $X_{\mathbf{k}(y)}$  est géométriquement réduite pour tout  $y$  dans un ouvert dense de  $Y$ . Quitte à restreindre  $U$ , la fibre  $X_{\mathbf{k}(y)}$  est donc séparable sur  $\mathbf{k}(y)$  pour tout  $y \in Y$ .

Réciproquement, supposons que le morphisme  $f|_U : U \rightarrow Y$  soit un morphisme séparable. D'après la définition 4.5, pour tout  $y \in \mathbf{k}(y)$ , la fibre  $U \otimes_Y \mathbf{k}(y)$  est séparable sur  $\mathbf{k}(y)$ . En particulier la fibre générique  $U \otimes_Y \mathbf{k}(Y)$  est séparable sur  $\mathbf{k}(Y)$ . Le schéma  $U \otimes_Y \mathbf{k}(Y)$  est irréductible de point générique  $\mathbf{k}(X)$ . D'après la remarque suivant la définition 4.5,  $\mathbf{k}(X)$  est donc une extension séparable de  $\mathbf{k}(Y)$ .  $\square$

Nous pouvons nous contenter de trouver un ouvert  $U'$  de  $X_{\bar{\mathbf{k}}}$  :

**Lemme 4.9.** *Soient  $X$  un  $\mathbf{k}$ -schéma de type fini et  $\mathbf{K}$  une extension algébrique de  $\mathbf{k}$ . Tout ouvert dense de  $X_{\mathbf{K}}$  contient un ouvert dense de la forme  $U_{\mathbf{K}}$ , où  $U$  est un ouvert de  $X$ .*

**Démonstration.** Soit  $F'$  le fermé complémentaire de  $U'$  dans  $X_{\mathbf{K}}$ . Soit  $\mathbf{k}_0$  l'extension de type fini de  $\mathbf{k}$  ([Gro67a] proposition 4.8.13) qui est le plus petit corps de définition de  $F'$ . Le corps  $\mathbf{k}_0$  est algébrique et de type fini sur  $\mathbf{k}$ , donc c'est une extension finie de  $\mathbf{k}$ . Par définition de  $\mathbf{k}_0$ , il existe un fermé  $F_0$  de  $X_{\mathbf{k}_0}$  tel que  $F' = (F_0)_{\mathbf{K}}$ . Décomposons l'extension  $\mathbf{k}_0/\mathbf{k}$  en une extension séparable finie  $\mathbf{k}^{\text{sep}}/\mathbf{k}$  suivie d'une extension purement inséparable  $\mathbf{k}'/\mathbf{k}^{\text{sep}}$ .

Soit  $p$  la caractéristique de  $\mathbf{k}$ . Quitte à considérer un  $q$  épaissement  $\tilde{F}_0$  de  $F_0$ , celui-ci s'obtient par extension des scalaires d'un sous-schéma fermé  $F_1$  de  $X_{\mathbf{k}^{\text{sep}}}$  :  $\tilde{F}_0 = (F_1)_{\mathbf{k}'}$ .

Soit  $U_1$  l'ouvert (dense) complémentaire de  $F_1$  dans  $X_{\mathbf{k}^{\text{sep}}}$ . Après extension à  $\mathbf{K}$ , nous avons  $(U_1)_{\mathbf{K}} \subset U'$ . L'ouvert  $U$  de  $X_{\tilde{\mathbf{k}}^{\text{sep}}}$  (où  $\tilde{\mathbf{k}}^{\text{sep}}$  est la clôture galoisienne de  $\mathbf{k}^{\text{sep}}$ ) intersection des images de  $U_1$  sous l'action de  $\text{Gal}(\tilde{\mathbf{k}}^{\text{sep}}/\mathbf{k})$  est dense, défini sur  $\mathbf{k}$  et convient :  $U_{\mathbf{K}} \subset U'$ .  $\square$

### 4.2.3 Séparabilité et lissité

Il y a des caractérisations en terme de lissité. Parler des fibres d'une application rationnelle n'a *a priori* pas de sens, car elles ne sont pas bien définies. Avant de parler des fibres, il faut choisir un ouvert dans l'espace de départ. Mais on peut parler directement de propriétés *génériques* des « fibres

d'une application rationnelle », ces propriétés étant indépendante du choix de l'ouvert.

**Proposition 4.10.** *Une application rationnelle dominante  $f : X \dashrightarrow Y$  entre  $\mathbf{k}$ -schémas intègres est séparable si et seulement si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. la fibre générique  $X_\eta$  est génériquement lisse sur  $\mathbf{k}(Y)$ ,
2. la fibre  $X_u$  est génériquement lisse sur  $\mathbf{k}(u)$  pour tout  $u$  dans un ouvert non vide de  $Y$ ,
3. il existe une fibre  $X_u$  génériquement lisse sur  $\mathbf{k}(u)$ .

**Démonstration.** L'application  $f$  est séparable si et seulement si l'extension de corps  $\mathbf{k}(X)/\mathbf{k}(Y)$  est séparable, c'est-à-dire, si  $\mathbf{k}(X)$  est une  $\mathbf{k}(Y)$ -algèbre formellement lisse sur  $\mathbf{k}(Y)$ . D'après [Gro67c] 17.5.1, la fibre  $X_\eta$  est génériquement lisse si et seulement si  $\mathbf{k}(X)$  est une  $\mathbf{k}(Y)$ -algèbre formellement lisse. Pour l'équivalence entre les deux propriétés, voir [Gro67b] 9.7.7 : la propriété « être géométriquement réduit » est localement constructible.  $\square$

**Remarque 4.11.** Si  $X$  est un schéma sur un corps  $\mathbf{k}$ , dire qu'il est génériquement lisse est équivalent à dire qu'il est génériquement géométriquement réduit, ou qu'il est génériquement réduit au-dessus d'une extension parfaite de  $\mathbf{k}$ .

**Proposition 4.12.** *Soit  $\bar{\mathbf{k}}$  une clôture algébrique de  $\mathbf{k}$ . Une application rationnelle dominante  $f : X \dashrightarrow Y$  entre  $\mathbf{k}$ -schémas géométriquement intègres est séparable si et seulement si l'application  $X \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}} \dashrightarrow Y \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$  déduite de  $f$  par extension des scalaires est séparable.*

**Démonstration.** Si  $X$  est séparable sur  $Y$ , alors pour tout changement de base  $Y' \rightarrow Y$ ,  $X' = X \times_Y Y'$  est séparable sur  $Y'$ , en particulier pour le changement de base  $Y \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}} \rightarrow Y$ .

Réciproquement, supposons  $\bar{f}$  séparable, et notons  $X_{\bar{\mathbf{k}}}$  et  $Y_{\bar{\mathbf{k}}}$  les extensions de  $X$  et  $Y$  à  $\bar{\mathbf{k}}$ . D'après la proposition 4.10 et la remarque qui suit, il suffit de prouver que la fibre générique de  $X_{\mathbf{k}(Y)}$  de  $f$  est génériquement réduite

au-dessus d'une extension parfaite de  $\mathbf{k}(Y)$ . Notons  $\eta = \text{Spec } \mathbf{k}(Y)$  le point générique de  $Y$  et  $\bar{\eta}$  celui de  $Y_{\bar{\mathbf{k}}}$ . Nous avons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (X_{\bar{\mathbf{k}}})_{\bar{\eta}} & \longrightarrow & X_{\bar{\mathbf{k}}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\ \bar{\eta} & \in & Y_{\bar{\mathbf{k}}} & \longrightarrow & Y \end{array}$$

L'application  $Y_{\bar{\mathbf{k}}} \longrightarrow Y$  est dominante donc  $\mathbf{k}(\bar{\eta})$  est une extension de  $\mathbf{k}(\eta)$ . Plus précisément,  $Y$  est géométriquement intègre, donc pour tout ouvert affine  $\text{Spec } A$  de  $Y$ , l'anneau  $A \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$  est intègre. Donc  $\mathbf{k}(\eta) \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$  est intègre, et son corps des fractions est  $\mathbf{k}(\bar{\eta})$ . Les deux extensions  $\mathbf{k}(\eta)$  et  $\bar{\mathbf{k}}$  de  $\mathbf{k}$  sont linéairement disjointes, et  $\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}$  est algébrique, donc  $\mathbf{k}(\eta) \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$  est déjà un corps :

$$\mathbf{k}(\bar{\eta}) = \mathbf{k}(\eta) \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$$

La fibre générique  $(X_{\bar{\mathbf{k}}})_{\bar{\eta}}$  de  $\bar{f}$  est l'extension du  $\mathbf{k}(\eta)$ -schéma  $X_{\eta}$  au-dessus de  $\mathbf{k}(\bar{\eta})$  :

$$\begin{aligned} (X_{\bar{\mathbf{k}}})_{\bar{\eta}} &= (X \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}) \otimes_{\bar{\mathbf{k}}} \mathbf{k}(\bar{\eta}) \\ &= X \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(\bar{\eta}) \\ &= (X_{\eta} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(\eta)) \otimes_{\mathbf{k}(\eta)} \mathbf{k}(\bar{\eta}) \\ &= X_{\eta} \otimes_{\mathbf{k}(\eta)} \mathbf{k}(\bar{\eta}) \end{aligned}$$

L'application  $\bar{f}$  est séparable, donc sa fibre générique est génériquement réduite au-dessus d'une extension parfaite  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{k}(\bar{\eta})$  : il existe un ouvert dense  $U$  du  $\mathbf{k}(\bar{\eta})$ -schéma  $(X_{\eta} \otimes_{\mathbf{k}(\eta)} \mathbf{k}(\bar{\eta}))$  qui est réduit au dessus de  $\mathbf{K}$ .

L'extension  $\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}$  est algébrique, donc  $\mathbf{k}(\bar{\eta}) = \mathbf{k}(\eta) \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$  est algébrique sur  $\mathbf{k}(\eta)$ , et nous pouvons appliquer le lemme 4.9 : il existe un ouvert dense  $U'$  de  $X_{\eta}$  tel que  $U'_{\mathbf{k}(\bar{\eta})} \subset U$ . En particulier, si nous étendons les scalaires à  $\mathbf{K}$ ,  $U'_{\mathbf{K}}$  est réduit comme ouvert d'un schéma réduit. Donc la fibre générique  $X_{\eta}$  de  $f$  est génériquement réduite au-dessus d'une extension parfaite  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{k}(\eta)$ .

La proposition 4.6 nous permet de conclure que  $f$  est séparable.  $\square$

**Remarque 4.13.** Le corollaire 4.4 montre qu'il suffit de supposer  $X$  géométriquement intègre. Nous nous intéresserons surtout au cas  $X = \mathbb{P}^N$  où cette hypothèse sera toujours vérifiée.

**Proposition 4.14.** *Soient  $f : X \dashrightarrow Y$  et  $g : Y \dashrightarrow Z$  des applications dominantes entre  $\mathbf{k}$ -schémas intègres. Si  $g \circ f$  est séparable, alors  $g$  est séparable.*

**Démonstration.** L'extension de corps  $\mathbf{k}(X)/\mathbf{k}(Z)$  est séparable, donc il existe une extension parfaite  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{k}(Z)$  telle que  $\mathbf{k}(X) \otimes_{\mathbf{k}(Z)} \mathbf{K}$  soit réduit. Par platitude de  $\mathbf{K}/\mathbf{k}(Z)$ , l'application  $\mathbf{k}(Y) \otimes_{\mathbf{k}(Z)} \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{k}(X) \otimes_{\mathbf{k}(Z)} \mathbf{K}$  est injective. Donc  $\mathbf{k}(Y) \otimes_{\mathbf{k}(Z)} \mathbf{K}$  est réduit : l'extension  $\mathbf{k}(Y)/\mathbf{k}(Z)$  est séparable.  $\square$



# Bibliographie

- [Bea90] A. Beauville, *Sur les hypersurfaces dont les sections hyperplanes sont à module constant*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, 1990, pp. 121–133.
- [BVdV79] W. Barth and A. Van de Ven, *Fano varieties of lines on hypersurfaces*, Arch. Math. (Basel) **31** (1978/79), 96–104.
- [Cam92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545.
- [CG72] H. Clemens and P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.
- [Deb01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Springer-Verlag, 2001.
- [DM98] O. Debarre and L. Manivel, *Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète*, Math. Ann. **312** (1998), 549–574.
- [Gro67a] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967).
- [Gro67b] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967).
- [Gro67c] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967).
- [Har83] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1983, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [HMP98] J. Harris, B. Mazur, and R. Pandharipande, *Hypersurfaces of low degree*, Duke Math. J. **95** (1998), no. 1, 125–160.

- [Jou83] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progr. in Math., vol. 42, Birkhäuser Boston Inc., 1983.
- [KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Diff. Geom. **36** (1992), 765–769.
- [Kol99] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, No. 32.
- [Kol02] ———, *Unirationality of cubic hypersurfaces*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 3, 467–476.
- [Mad03] D. Madore, *Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps  $p$ -adiques*, Manuscripta Math. **110** (2003), no. 2, 171–185.
- [Mad04] ———, *Les hypersurfaces cubiques sont séparablement rationnellement connexes*, <http://www.arxiv.org/abs/math.AG/0605662>, 2004.
- [Man86] Y. Manin, *Cubic forms*, Mathematical Library, vol. 4, North-Holland, 1986.
- [Mor40] U. Morin, *Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta*, Atti Congr. Un. Mat. Ital., Bologna (1940), 298–302.
- [Pre49] A. Predonzan, *Sull'unirazionalità della varietà intersezione completa di più forme*, Rend. Sem. Mat. Padova **18** (1949), 161–176.
- [PS92] K. Paranjape and V. Srinivas, *Unirationality of the general complete intersection of small multidegree*, Astérisque **211** (1992), 241–248, Flips and Abundance for Algebraic Threefolds.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.
- [Shi79] T. Shioda, T. ; Katsura, *On Fermat varieties*, Tôhoku Math. J. (**31**) (1979), no. 1, 97–115.
- [Shi95] I. Shimada, *A generalization of Morin-Predonzan's theorem on the unirationality of complete intersections*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 4, 597–638.

- [Ste68] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.