

MÉMOIRE DE MAGISTÈRE

DENIS CONDUCHÉ

16 octobre 2001

Ce mémoire de magistère comporte :

- mon curriculum vitæ,
- mon exposé de maîtrise fait avec Nicolas Ratazzi sous la direction de Hugues Randriambololona,
- mon exposé au cours de Y. Laszlo *Exemples de changement de corps de base*,
- mon mémoire de DEA sous la direction d'Olivier Debarre,
- une introduction à mon thème de recherche.

Table des matières

I Curriculum vitæ	4
II Mémoire de Maîtrise :	
Théorie de Galois différentielle	6
1 Introduction	7
2 Préliminaires	7
2.1 Dérivations et corps différentiels	7
2.2 Le groupe de Galois différentiel	8
3 Structure algébrique du groupe de Galois différentiel	8
3.1 La topologie de Zariski	8
3.2 Deux lemmes algébriques	9
3.3 La structure algébrique de $Gal_{\partial}(M/K)$	10
4 Outils d'algèbre différentielle	11
4.1 Extension d'idéaux premiers	11
4.2 Un lemme sur les anneaux de polynômes	12
4.3 Les isomorphismes admissibles	13
5 Le cœur de la théorie	14
5.1 Préliminaires et compléments	14
5.2 Normalité de l'extension de Picard-Vessiot	15
5.3 Complétion de la théorie de Galois différentielle	15
6 Résolution par quadrature des équations différentielles linéaires	16
6.1 Etude des extensions de Liouville	17
6.2 Deux lemmes sur les groupes algébriques linéaires	18
6.3 Trigonalisation simultanée d'automorphismes	18
6.4 Démonstration du théorème VI.1	19
6.5 Application à l'équation de Riccati	20
III Exposé au cours de Y. Laszlo :	
La suite exacte d'homotopie pour un morphisme propre et séparable	22
1 Morphismes séparables	23

2	La suite exacte d'homotopie	23
IV	Mémoire de DEA :	
	Études des droites sur les hypersurfaces de Fermat	27
1	Préliminaires	28
1.1	Notations et définitions	28
1.2	Propriétés de $F(X)$	29
1.3	Propriétés de $F(X, x)$	33
2	Hypersurfaces de Fermat	34
2.1	Généralités	34
2.1.1	Description ensembliste	34
2.1.2	Étude de N_{l/X_N^d}	36
2.2	$F(X_N^{p^r+1})$	39
2.2.1	Unirationalité de X_N^d pour $d p^r + 1$	40
2.2.2	Description de $F(X_N^{p^r+1})$	41
2.2.3	$X_N^{p^r+1}$ est recouverte par des droites pour $N \geq 4$	42
3	Appendice	42
V	Introduction au domaine de recherche	44
1	Introduction	45
2	Géométrie des hypersurfaces	45
2.1	Surfaces réglées	45
2.2	Droites	45
3	Variétés de Fano	46

Première partie

Curriculum vitæ

2000-2001.

- Cours du DEA de Mathématiques de Paris VI : Géométrie algébrique (J. Oesterlé), Exemples de changement de corps de base (Y. Laszlo).
- Groupe de travail "cohomologies"
- Mémoire de DEA sous la direction d'Olivier Debarre à l'Université Louis Pasteur à Strasbourg. (dans le cadre du DEA de Mathématiques de Paris VII).

1999-2000.

- Cours du DEA de Mathématiques de Paris VII : Topologie algébrique (P. Vogel).
- Agrégation de mathématiques (rang 204).

1998-1999.

- Licence de mathématiques du MMFAI, avec les cours suivants : Algèbre I, Logique, Intégration et probabilités I, Analyse complexe, Algorithmique et Programmation.
- Maîtrise de mathématiques du MMFAI (Université Paris VI), mention B, avec les cours suivants : Analyse II, Algèbre II, Groupe de Lecture (Arbres, amalgames, SL_2), Représentations des groupes finis, Topologie algébrique.

Deuxième partie

Mémoire de Maîtrise :

Théorie de Galois différentielle

1 Introduction

Depuis Galois, nous savons qu'il existe une correspondance entre les sous-corps du corps de décomposition M d'une équation algébrique sur un corps K , et les sous-groupes du groupe des K -automorphismes de M . Ritt et Kolchin ont développé, à partir des idées de Picard et Vessiot, une théorie similaire en considérant l'extension attachée à une équation différentielle linéaire. Le but de cet exposé est d'explicitier et de démontrer cette correspondance. Ceci nous permettra de plus de voir sous quelles conditions une équation différentielle linéaire est résoluble par quadratures.

Dans ce qui suit, les anneaux et les corps seront toujours supposés commutatifs.

2 Préliminaires

2.1 Dérivations et corps différentiels

Définition 2.1.1. Soit A un anneau intègre, une application $\partial : A \rightarrow A$ est une *dérivation* si :
 $\forall a, b \in A \partial(a + b) = \partial(a) + \partial(b)$ et $\forall a, b \in A \partial(ab) = a\partial(b) + \partial(a)b$.

Le couple (A, ∂) est appelé *anneau différentiel*, et tout x de A vérifiant $\partial(x) = 0$ est une *constante*.

Théorème 2.1.2. 1. Une dérivation ∂ sur un anneau intègre A admet une unique extension au corps des fractions K de A .

2. L'ensemble des constantes sur K est un sous-corps de K .

Démonstration : L'unicité est claire, car $aa^{-1} = 1$ implique $\partial(a^{-1}) = -a^{-1}\partial(a)a^{-1}$. En posant $\partial(\frac{a}{b}) = \frac{\partial(a)b - a\partial(b)}{b^2}$ on définit bien une dérivation sur K (la définition est valide car $\forall c \in K \partial(\frac{a}{b}) = \partial(\frac{ac}{bc})$). La seconde assertion est immédiate. \square

Exemple 2.1.3. 1. La *dérivation triviale* : $\forall x \in K \partial(x) = 0$.

Celle-ci est certes peu intéressante mais on remarque que c'est l'unique possible sur \mathbb{Q} . Par ailleurs, tout corps peut être muni de la dérivation triviale : en ce sens la théorie des corps différentiels est une généralisation de la théorie classique.

2. Soit (A, ∂) un anneau différentiel, notons $A[x_i]$ l'anneau des polynômes en une infinité de variables $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On peut prolonger ∂ en une dérivation sur $A[x_i]$, qui sera déterminée de manière unique par : $\partial x_i = x_{i+1}$. On a ainsi fabriqué une *indéterminée différentielle* et on note $A\{x\}$ l'anneau différentiel obtenu, ainsi que $A\langle x \rangle$ son corps des fractions (la dérivation s'y étendant de manière unique par la proposition II.1). Plus généralement, si K et L sont deux corps différentiels tels que $K \subset (L, \partial)$, et S un sous ensemble de L , on note $K \langle S \rangle$ le plus petit sous-corps différentiel de L contenant K et S .

Définition 2.1.4. 1. Soient (K_1, ∂_1) , et (K_2, ∂_2) , deux corps différentiels. Une application $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ est un *morphisme différentiel* si φ est un morphisme de corps et $\varphi \circ \partial_1 = \partial_2 \circ \varphi$. On définit de même *isomorphisme différentiel et automorphisme différentiel*.

2. (M, ∂_1) est une *extension différentielle* de (K, ∂) si M est un surcorps de K et si $\partial_{1|_K} = \partial$.

On notera C le corps des constantes de K et C_M celui de M . On pourrait en fait montrer que toute K -extension peut être munie d'une structure différentielle compatible avec K (on peut trouver une démonstration dans [M.R68]).

Définition 2.1.5. Soit $y_1, \dots, y_n \in K$ corps différentiel, on appelle *matrice Wronskienne* de (y_1, \dots, y_n) et on note $Wr(y_1, \dots, y_n)$ la matrice carré de d'ordre n $(\partial^{i-1}y_j)_{i,j \leq n}$.

Lemme 2.1.6. Soit (K, ∂) un corps différentiel et $y_1, \dots, y_n \in K$. On a : y_1, \dots, y_n sont linéairement indépendants sur C si et seulement si le wronskien $|Wr(y_1, \dots, y_n)| \neq 0$.

On déduit de ce lemme qu'une équation différentielle linéaire de degré n a au plus n solutions linéairement indépendantes dans une extension différentielle.

Définition 2.1.7. Soit (K, ∂) un corps différentiel et $\mathcal{L}(y) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \partial^i y + \partial^n y = 0$ une équation différentielle linéaire, avec pour tout i , a_i dans K .

Si (M, ∂_1) est une extension différentielle de K , telle que $C_M = C$ et $M = K \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ où les u_i sont n solutions indépendantes de $\mathcal{L}(y) = 0$ (*), alors M est appelée *extension de Picard Vessiot* de K associée à (*).

Remarquons dès à présent, certaine similitude entre la théorie de Galois classique et la théorie de Galois différentielle : dans la théorie classique, à une équation algébrique on associe son corps de décomposition, ici à une équation différentielle linéaire on associe son extension de Picard Vessiot. On indique, à titre culturel, le résultat suivant démontré dans [?] :

Théorème 2.1.8. Si K est de caractéristique 0 et C algébriquement clos, l'extension de Picard-Vessiot de K associée à (*) existe et est unique à isomorphisme différentiel près.

2.2 Le groupe de Galois différentiel

Définition 2.2.1. 1. Soit (M, ∂) l'extension de Picard Vessiot de (*). *Le groupe de Galois différentiel* de (*), (ou de (M/K)) est l'ensemble des K -automorphismes différentiels de M . On le note $Gal_\partial(M/K)$.

2. Soit L une sous K -extension de M , posons $\check{L} := \{\varphi \in Gal_\partial(M/K) \mid \varphi(a) = a \forall a \in L\} = Gal_\partial(M/L)$, et pour $H \subset Gal_\partial(M/K) = G$, posons $\check{H} := \{a \in M \mid \varphi(a) = a \forall \varphi \in H\} = M^H$.

Lemme 2.2.2. \check{L} est un sous-groupe de G et \check{H} est un sous-corps différentiel de M . De plus $\check{\check{L}} = \check{L}$, et $\check{\check{H}} = \check{H}$.

Définition 2.2.3. Les sous K -extensions L de M (respectivement les sous-groupes H de $Gal_\partial(M/K)$) sont dits *fermés* si $\check{L} = L$, (respectivement si $\check{H} = H$).

Malheureusement ceci laisse complètement de côté un point véritablement important : quel corps ou sous-groupe est fermé? Afin de pouvoir poursuivre notre étude, et notamment pouvoir répondre à cette question, nous devons maintenant introduire de nouveaux outils.

3 Structure algébrique du groupe de Galois différentiel

3.1 La topologie de Zariski

Définition 3.1.1. Soit C un corps et $n \in \mathbb{N}$, un ensemble $F \in C^n$ est *Zariski fermé* (ou Z -fermé) si : $\exists S \subset C[X_1, \dots, X_n]$ tel que $F = \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0)$.

Remarquons immédiatement que : $\bigcap_{f \in S} f^{-1}(0) = \bigcap_{f \in \langle S \rangle} f^{-1}(0)$, où $\langle S \rangle$ est l'idéal engendré par S .

De plus, $C[X_1, \dots, X_n]$ étant noethérien, on se ramène au cas où S est fini.

Définition 3.1.2. On dit qu'un espace topologique vérifie la *condition de la chaîne descendante*, si : si $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ est une suite décroissante de fermés, alors on $F_n = F_{n+1}$ pour tout n assez grand.

Théorème 3.1.3. Les ensembles Zariski fermés définissent une topologie sur C^n . On l'appelle la topologie de Zariski sur C^n . De plus, muni de cette topologie, C^n vérifie la condition de la chaîne descendante.

Corollaire 3.1.4. Toute partie de C^n muni de la topologie de Zariski est l'union disjointe d'un nombre fini d'ouverts fermés connexes (pour la topologie induite).

Démonstration : Le résultat découle facilement de la propriété de la chaîne descendante. \square

Exemple 3.1.5. 1. Si $n = 1$ les ensembles Zariski fermés sont : C , l'ensemble vide et les ensembles finis.

2. Si on considère $GL_n(C)$ comme sous ensemble de C^{n^2+1} , c'est-à-dire, $GL_n(C) = \{(A, a) \in C^{n^2+1} / a \cdot \det(A) = 1\}$, alors $GL_n(C)$ est Z-fermé dans C^{n^2+1} . De plus la multiplication et l'inverse sont continus.

Définition 3.1.6. On dit qu'un sous-groupe G de $GL_n(C)$, en tant que sous ensemble de C^{n^2+1} , est un *groupe algébrique linéaire* s'il est fermé pour la topologie de Zariski.

Lemme 3.1.7. Si G est un sous-groupe de $GL_n(C)$ (muni de la topologie de Zariski) et H un sous-groupe Z-fermé de G , alors le normalisateur de H , $N_G(H)$, est Z-fermé.

Démonstration : Soit $h \in H$ et $\varphi : G \rightarrow G$, $a \mapsto aha^{-1}$. $\varphi^{-1}(H)$ est fermé car φ est continue et H est fermé. Ainsi $\bigcap \varphi^{-1}(H)$ est fermée et de même l'ensemble $\{a / a^{-1}Ha \subset H\}$ est fermé, d'où le résultat. \square

3.2 Deux lemmes algébriques

Lemme 3.2.1. Soit K un corps différentiel de corps des constantes C algébriquement clos et L une extension différentielle de K , de corps des constantes C_L .

1. soient $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ (I ensemble quelconque) et g des polynômes à n indéterminées sur K , alors : si $\forall \alpha \in I f_\alpha = 0$ et $g \neq 0$ a une solution dans C_L , il existe déjà une solution dans C .
2. Soit $k_1, \dots, k_r \in C_L$, alors, si (k_1, \dots, k_r) sont algébriquement dépendants sur K , ils le sont déjà sur C .

Démonstration : Soit (u_β) une base de K sur C , $f_\alpha = \sum h_{\alpha\beta} u_\beta$ où les $h_{\alpha\beta} \in C[X_1, \dots, X_n]$ sont uniques. Grace au wronskien, on constate que les (u_β) restent linéairement indépendants sur C_L , donc si $x \in C_L$ est tel que $\forall \alpha f_\alpha(x) = 0$, alors $\forall \alpha, \beta h_{\alpha\beta}(x) = 0$. Posons alors J l'idéal engendré par les $(h_{\alpha\beta})$, $J \neq C[X_1, \dots, X_n]$, donc le théorème des zéros de Hilbert (cf [S.L93]) appliqué à J nous indique que les $h_{\alpha\beta}$ s'annulent déjà sur C .

Ecrivons $g = \sum t_\gamma u_\gamma$ avec $t_\gamma \in C[X_1, \dots, X_n]$ et supposons par l'absurde que :

$$h_{\alpha\beta}(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \text{ sur } C. \text{ Dans ce cas, } \forall \gamma t_\gamma(x) = 0$$

donc le théorème des zéros de Hilbert nous dit que : si I est l'idéal engendré par les $(h_{\alpha\beta})$, alors $t_\gamma^{r_\gamma} \in I$ avec (r_γ) une suite d'entiers : toute solution du système dans C_L annule g , contradiction.

Pour la seconde partie : si f est telle que $f(k_1, \dots, k_r) = 0$ sur K , alors $f = \sum h_\beta u_\beta$, donc par l'argument précédent : $\forall \beta h_\beta(k_1, \dots, k_r) = 0$, d'où le résultat. \square

On notera dans la suite $\text{deg}_{tr}(I/K) = n$ le degré de transcendance de I sur le corps K . On trouvera la définition et les propriétés élémentaires dans [S.L93].

Lemme 3.2.2. Soit K un corps et I un anneau intègre contenant K , de degré de transcendance n fini sur K , et soit P un idéal propre premier de I , alors le degré de transcendance de I/P sur K est strictement inférieur à celui de I sur K .

Démonstration : $\text{deg}_{tr}(I/K) = n$. Soit u dans P , non dans K . u n'est pas algébrique sur K , car sinon u est inversible (I intègre donc le terme constant de $Pm_K(u)$ est non nul). On complète u en une base de transcendance $(u = u_1, \dots, u_n)$ sur I . La surjection canonique $\pi : I \rightarrow I/P$ est un homomorphisme d'algèbre qui induit une application de $K[u_1, \dots, u_n][X]$ dans $K[\pi(u_1), \dots, \pi(u_n)][X]$. Pour $y \in I$, π envoie un polynôme anulateur de y sur un polynôme anulateur de $\pi(y)$. Donc I/P algébrique sur $K[\pi(u_1), \dots, \pi(u_n)]$, donc $\text{deg}_{tr}(I/P) \leq n - 1$. \square

3.3 La structure algébrique de $\text{Gal}_\partial(M/K)$

Définition 3.3.1. Soient M et L deux K -extensions différentielles. L'application $\sigma : M \rightarrow L$, K -isomorphisme différentiel est *un isomorphisme admissible* si il existe un corps N qui est une extension différentielle de M et de L .

Remarquons que si σ est un isomorphisme admissible de M , extension de Picard-Vessiot de $(*)$, dans L , alors pour tout i , $\mathcal{L}(\sigma(u_i)) = 0$ donc, $\forall i \sigma(u_i) = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j$ avec $k_{ij} \in C_N$ (où N est une extension différentielle de M et L). Or σ est bijectif donc $(k_{ij})_{i,j \leq n}$ est dans $GL_n(C_N)$.

Lemme 3.3.2. Soit (K, C) corps différentiel et $M = K \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ une extension de Picard-Vessiot de K . Il existe S ensemble de polynômes de $C[X_1, \dots, X_{n^2}]$ tel que :

1. Si σ est un K -isomorphisme admissible de M , la matrice $(k_{ij})_{i,j \leq n}$ associée est telle que $(k_{ij}) \in \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0)$.
2. Si N est une extension de M et $(k_{ij})_{i,j \leq n} \in GL_n(C_N) \cap \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0)$, il existe un K -isomorphisme admissible σ de M dans N , dont la matrice associée est (k_{ij}) .

Démonstration : Soit $\varphi : y_i \mapsto u_i$ de $K\{y_1, \dots, y_n\}$ dans M l'évaluation, morphisme différentiel canonique, où y_1, \dots, y_n sont des indéterminées différentielles. $\Gamma = \text{Ker } \varphi$ est un idéal différentiel premier (car $\text{Im } \varphi$ intègre) de $K\{y_1, \dots, y_n\}$. Soit ψ l'homomorphisme différentiel de $K\{y_1, \dots, y_n\}$ dans $M[c_{i,j}]$ défini par $\psi(y_i) = \sum_{j=1}^n c_{i,j} u_j$. Posons $\Delta = \psi(\Gamma)$ et S l'ensemble des polynômes de $C[c_{i,j}]$ obtenus en décomposant les éléments de Δ sur une base de M . On va montrer que S est l'ensemble cherché.

1. Soit σ un K -isomorphisme différentiel admissible de M ($u_i \mapsto \sum_{j=1}^n k_{i,j} u_j$). Le diagramme suivant commute (où $p(c_{i,j}) = k_{i,j}$) :

$$\begin{array}{ccc} K\{y_1, \dots, y_n\} & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \psi \downarrow & & \sigma \downarrow \\ M[[c_{i,j}]] & \xrightarrow{p} & L \end{array}$$

Donc, Γ étant envoyé sur 0 dans L , Δ l'est aussi, et par l'argument utilisé dans la démonstration du lemme III.2, S s'annule en $(k_{i,j})$.

2. Soit $(k_{ij})_{i,j \leq n} \in GL_n(C_N) \cap \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0)$. On a $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\psi \circ p)$ donc, par propriété universelle,

il existe σ , K -homomorphisme différentiel de $K\{u_1, \dots, u_n\}$ dans $K\{\sigma u_1, \dots, \sigma u_n\}$, avec $\sigma u_i = \sum_{j=1}^n k_{i,j} u_j$. Il suffit de montrer que σ est injectif : on pourra alors étendre au quotient M et conclure. Supposons donc σ non injectif : (pour alléger les notations on écrira $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $k = (k_{i,j})$). On pose $P = \text{Ker} \sigma$ et on applique le lemme III.3 sur les degrés de transcendance : $\text{deg}_{tr}(K\langle \sigma u \rangle / K) < \text{deg}_{tr}(K\langle u \rangle / K)$. Or, par additivité des degrés de transcendance on a : $\text{deg}_{tr}(K\langle u \rangle / K) + \text{deg}_{tr}(K\langle u, \sigma u \rangle / K\langle u \rangle) = \text{deg}_{tr}(K\langle u, \sigma u \rangle / K\langle \sigma u \rangle) + \text{deg}_{tr}(K\langle \sigma u \rangle / K)$ D'où :

$$\begin{aligned} \text{deg}_{tr}(K\langle u \rangle (k) / K\langle u \rangle) &= \text{deg}_{tr}(K\langle u, \sigma u \rangle / K\langle u \rangle) \\ &< \text{deg}_{tr}(K\langle u, \sigma u \rangle / K\langle \sigma u \rangle). \end{aligned}$$

car $K\langle u, \sigma u \rangle = K\langle u \rangle (k) : \text{Wr}(u)(k_{ij}) = \text{Wr}(\sigma u)$. Or en appliquant le lemme III.2 aux $k_{i,j} \in C_N$ on en extrait une famille algébriquement libre maximale sur C , qui reste algébriquement libre sur $K\langle u \rangle$. Donc $\text{deg}_{tr}(C(k)/C) \leq \text{deg}_{tr}(K\langle u, \sigma u \rangle / K\langle u \rangle)$, d'où l'égalité.

De même, en remplaçant σ et u par σ^{-1} et σu ,

$\text{deg}_{tr}(C_{K\langle \sigma u \rangle}(k) / C_{K\langle \sigma u \rangle}) = \text{deg}_{tr}(K\langle u, \sigma u \rangle / K\langle \sigma u \rangle)$. Et visiblement : $\text{deg}_{tr}(C_{K\langle \sigma u \rangle}(k) / C_{K\langle \sigma u \rangle}) \leq \text{deg}_{tr}(C(k) / C)$. D'où la contradiction. \square

Nous pouvons maintenant énoncer un des résultats majeur de notre étude, qui découle immédiatement du lemme précédent :

THÉORÈME 3.3.1. Le groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-Vessiot est un groupe algébrique linéaire sur le corps des constantes.

Avant de pouvoir plonger plus avant dans la théorie de Galois différentielle, et d'arriver à l'énoncé de la correspondance entre sous-groupes fermés et sous K -extensions fermées, nous devons étudier plus en détails les particularités introduites par le mot *différentiel* : plutôt que de travailler directement sur des automorphismes, nous passons par l'intermédiaire d'isomorphismes admissibles. Selon I.Kaplansky, l'introduction de ces objets, et les complications qu'ils apportent, sont inévitables si l'on veut pouvoir traiter le sujet à un niveau qui reste relativement élémentaire.

4 Outils d'algèbre différentielle

4.1 Extension d'idéaux premiers

Lemme 4.1.1. Soit I un idéal différentiel d'une \mathbb{Q} -algèbre A , et soit $a \in A$ tel que $\exists n \ a^n \in I$. Alors $(\partial a)^{2n-1} \in I$. En particulier, \sqrt{I} est un idéal différentiel.

Démonstration : On sait que $\partial(a^n) = na^{n-1}\partial(a) \in I$ (idéal différentiel), donc, comme $\mathbb{Q} \subset A$, on a $a^{n-1}\partial(a) \in I$. On montre alors par récurrence, que : $\forall k \ a^{n-k}(\partial(a))^{2k-1} \in I$, et on conclut en appliquant ceci à $n = k$. \square

Lemme 4.1.2. Soit A un anneau différentiel, I idéal différentiel radical et $S \subset A$. Si $ab \in I$, alors $a\partial(b) \in I$ et $\partial(a)b \in I$.

De plus, si $T = \{x \in A / xS \subset I\}$, alors T est un idéal différentiel radical de A .

Démonstration : Comme $\partial(ab) = a\partial b + \partial(a)b \in I$, on a $a\partial(a)b\partial b + (a\partial b)^2 \in I$, ainsi : $(a\partial b)^2 \in I$ et comme I est radical $a\partial b \in I$.

De plus, T est clairement un idéal, il est différentiel par l'argument précédent, et I radical donne facilement T radical. \square

Remarquons que si A est un anneau commutatif et $(I_s)_{s \in S}$ une famille d'idéaux radicaux, alors $\bigcap_{s \in S} I_s$ est un idéal radical. De plus, sur un anneau différentiel, une intersection quelconque d'idéaux différentiels est un idéal différentiel. Ainsi, si $S \subset A$, il existe un plus petit idéal radical différentiel contenant S :

$$\bigcap_{I \text{ ideal rad diff} \supset S} I.$$

On le note $\{S\}$.

Lemme 4.1.3. Soit A un anneau différentiel, $a \in A$ et $S \subset A$, alors :

1. $a\{S\} \subset \{aS\}$
2. si $T \subset A$, alors $\{S\}\{T\} \subset \{ST\}$.

Démonstration : Posons $S_1 = \{x \in A / ax \in \{aS\}\}$. C'est un idéal radical différentiel par le lemme IV.2, et $S \subset S_1 \Rightarrow \{S\} \subset S_1 \Rightarrow a\{S\} \subset aS_1 \subset \{aS\}$.

De même, $T_1 = \{x \in A / x\{T\} \subset \{ST\}\}$ est un idéal radical différentiel et contient S donc contient $\{S\}$. \square

Lemme 4.1.4. Soit A un anneau différentiel et T un sous ensemble multiplicativement clos de A . Soit Q un idéal radical, maximal sur l'ensemble des idéaux J tels que $T \cap J = \emptyset$, alors Q est premier.

Démonstration : Supposons par l'absurde que : $\exists a, b \in A$ $ab \in Q$, $a \notin Q$ et $b \notin Q$.

$\{Q, a\}$ et $\{Q, b\}$ sont des idéaux différentiels radicaux contenant strictement Q . Ainsi, il existe t_1 dans $T \cap \{Q, a\}$ et t_2 dans $T \cap \{Q, b\}$ avec $t_1 t_2 \in (T \cap \{Q, a\})(T \cap \{Q, b\}) \subset \{Q, a\}\{Q, b\} \subset Q$ par le lemme IV.3, d'où $T \cap Q \neq \emptyset$, contradiction. \square

Théorème 4.1.5. Soit B un anneau différentiel et A un sous anneau différentiel de B . Soit I un idéal différentiel radical de B tel que $P = I \cap A$ est un idéal différentiel premier de A . Dans ce cas, I peut être étendu en un idéal différentiel premier de B , I_1 , avec $I_1 \cap A = P$.

Démonstration : Posons $T = \{x \in A / x \notin P\}$. Comme P est premier, T est multiplicativement clos. Soit I_1 un idéal radical, maximal au sens du lemme IV.4, et contenant I (existe par le lemme de Zorn). Le lemme IV.4 donne alors : I_1 est premier, $I_1 \cap A \subset P$ et contient $I \cap A = P$. \square

Théorème 4.1.6. Soit B un anneau différentiel, A un sous-anneau différentiel et I un idéal différentiel radical de B tel que : $(ab \in I (a \in A, b \in B) \Rightarrow (a \in I \text{ ou } b \in I))$. Alors : I peut s'écrire comme une intersection d'idéaux (I_α) différentiels premiers de B tels que $\forall \alpha I_\alpha \cap A = P$ (avec $P = I \cap A$).

Démonstration : Notons que P est un idéal différentiel de A . Soit $x \in B$ $x \notin I$, on veut construire un idéal I_x différentiel premier de B , contenant I , tel que $I_x \cap A = P$ et tel que $x \notin I_x$. On aura alors $I = \bigcap I_x$. Soit $T = \{ax^n / a \in A a \notin P n \in \mathbb{N}\}$, T est multiplicativement clos car P est premier, et par hypothèse $T \cap I = \emptyset$, donc il existe un idéal de B différentiel radical I_x maximal tel que $I_x \cap T = \emptyset$ et contenant I (par Zorn). Ainsi le lemme IV.4 implique que I_x est premier.

De plus, $1 \notin P$ (sinon $P=A$, donc $I = B : I = I_\alpha$) donc $x \in T$ i.e $x \notin I_x$.

Enfin, soit $a \in I_x \cap A$, d'où $ax \in I_x$: si $a \in P$ c'est fini, sinon $ax \in T \cap I_x = \emptyset$ ce qui est impossible, donc $P = I \cap A \subset I_x \cap A \subset P$. \square

4.2 Un lemme sur les anneaux de polynômes

Lemme 4.2.1. Soit K un corps et L une K -extension. Soit \mathfrak{b} un ensemble éventuellement infini $B = L[(X_i)_{i \in \mathfrak{b}}]$, $A = K[(X_i)_{i \in \mathfrak{b}}]$, P un idéal de A , J idéal engendré par P dans B et $I = \sqrt{J}$, alors :

1. Si P est un idéal radical alors $I \cap A = P$.
2. Si P est un idéal premier et si $ab \in I$ avec $a \in A$ $b \in B$, alors $a \in P$ ou $b \in I$.

3. Si $Car(K) = 0$ et $P \neq A$, soit Y une des indéterminées et $s \in L$ $s \notin K$, alors $Y - s \notin I$.

Démonstration : L est un K -espace vectoriel, si $dim_K L = 1$ le lemme est trivial. On suppose désormais $dim_K L \geq 2$.

Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{a}}$ une base de L sur K . On choisit deux éléments particuliers u_1 et u_2 de cette base. Quitte à multiplier par u_1^{-1} on suppose même que $u_1 = 1$. Tout élément f de B s'écrit de manière unique $\sum f_\alpha u_\alpha$ avec $f_\alpha \in A$. Un tel f appartient à A si et seulement si $f_\alpha = 0$ pour $\alpha \neq 1$. De plus $J = \{\sum p_\alpha u_\alpha / p_\alpha \in P\}$, donc $J \cap A = P$.

1. On suppose que P est un idéal radical et que $b \in I \cap A$. Alors $\exists n$ $b^n \in J \cap A = P$ radical donc $b \in P$ donc $P = I \cap A$.

2. Si P est premier et $ab \in I$ avec $a \in A$ et $b \in B$, alors $a^n b^n \in J$. De plus, $b^n \in B$ implique $b^n = \sum f_\alpha u_\alpha$, donc $\forall \alpha$ $a^n f_\alpha \in P$. Si $a \in P$ c'est fini, sinon $\forall \alpha$ $f_\alpha \in P$, donc $b \in I$.

3. On suppose par l'absurde que $Y - s \in I$. Alors $\exists m$ $(Y - s)^m \in J$. Posons donc $I_0 = \{f \in L[Y] / f \in J\}$. C'est un idéal de $L[Y]$, donc principal : écrivons donc $I_0 = (f_0)$. Comme $(Y - s)^m \in I_0$, on a $f_0 / (Y - s)^m$.

Si $f_0 \in L$ alors $J = B$ et donc $P = A$ impossible par hypothèse. Ainsi $f_0 = (Y - s)^r$, $r \geq 1$. Dans la base $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{a}}$ on peut prendre $u_2 = s$. Mais $f_0 \in J$ donc $(Y - s)^r = \sum p_\alpha u_\alpha$ avec $\forall \alpha$ $p_\alpha \in P$. Ainsi $\forall \alpha$ $p_\alpha \in J$, en particulier $p_1 \in J$. Or $p_1 = Y^r + 0Y^{r-1} + \dots$ (car $(Y - s)^r = Y^r - rsY^{r-1} + \dots$ et $s = u_2$). Le polynôme p_1 appartenant à I_0 on a $p_1 = f_0 f$ où $f \in L[Y]$ et p_1 et f_0 sont unitaires de même degré, donc $p_1 = f_0$, donc $rs = 0$ et $Car K = 0$: contradiction. \square

4.3 Les isomorphismes admissibles

On peut maintenant énoncer les deux propositions concernant les isomorphismes admissibles.

Théorème 4.3.1. Soit M un corps différentiel de caractéristique 0, K et L deux sous-corps différentiels et $S : K \rightarrow L$ un isomorphisme différentiel. Alors S peut être étendu en un isomorphisme admissible défini sur M .

Démonstration : Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{a}}$ une base de M sur K . Par induction transfinie sur \mathfrak{a} on se ramène au problème suivant : étant donné $u \in M$ $u \notin K$, on cherche à définir une extension de S à u , l'image de u étant dans une extension convenable de M .

Soit $K\{u\}$ l'anneau intègre obtenu en adjoignant u à K , et $K\{y\}$ l'anneau obtenu avec y une indéterminée différentielle. $\varphi_1 : K\{y\} \rightarrow K\{u\}$ est un morphisme différentiel, $P = Ker \varphi_1$ est un idéal $y \mapsto u$ différentiel premier.

Grace à S , on envoie P_1 sur P idéal différentiel premier de $L\{y\}$ (car S surjectif). Soit alors J l'idéal de $M\{y\}$ engendré par P : il est clairement différentiel, posons $I = \sqrt{J}$. Le lemme IV.1 nous dit que I est un idéal (radical) différentiel de $M\{y\}$, le lemme IV.5 nous donnant $I \cap L\{y\} = P$. Enfin par la proposition IV.1 on peut étendre I en un idéal premier I_1 de $M\{y\}$ satisfaisant $L\{y\} \cap I_1 = P$.

Considérons $\pi : M\{y\} \rightarrow M\{y\}/I_1$ la surjection canonique on a :

$$K\{y\} \xrightarrow{S} L\{y\} \xrightarrow{\pi} L\{\pi(y)\}$$

$Ker \pi|_{L\{y\}} = I_1 \cap L\{y\} = P$, donc $Ker \pi|_{L\{y\}} \circ S = P_1$. On a ainsi l'isomorphisme :

$$K\{u\} \simeq K\{y\}/P_1 \simeq \pi(L\{y\}) \simeq L\{\pi(y)\}$$

qui étend S . Par la proposition II.1 cet isomorphisme se prolonge de manière unique en un isomorphisme différentiel de $K\langle u \rangle$ sur $L\langle \pi(y) \rangle$ sous extension de $M\langle \pi(y) \rangle$, d'où le résultat. \square

Théorème 4.3.2. Soit K un corps différentiel de caractéristique 0, M une extension de K , et soit $s \in M$ et $s \notin K$. Alors il existe φ un K -isomorphisme admissible sur M qui bouge s (i.e tel que $\varphi(s) \neq s$).

Démonstration : Soit y une indéterminée différentielle et soit $\varphi : K\{y\} \rightarrow K\{s\}$ morphisme différentiel et $P = \text{Ker}\varphi$ ($P \neq K\{y\}$ car $s \neq 0$)

$$y \mapsto s$$

Soit $L = K\langle s \rangle$ et J l'idéal différentiel de $L\{y\}$ engendré par P et $I = \sqrt{J}$. I est un idéal différentiel de $L\{y\}$ tel que $I \cap K\{y\} = P$ (car P est premier donc radical). Ainsi I peut être étendu en un idéal I_1 différentiel premier tel que $I_1 \cap K\{y\} = P$.

$\pi : L\{y\} \rightarrow L\{y\}/I_1$ On peut donc construire un K -isomorphisme admissible de $K\langle s \rangle$

$$y \mapsto \pi(y) \quad \text{sur } K\langle \pi(y) \rangle \text{ envoyant } s \text{ sur } \pi(y).$$

Remarquons que $\pi(y) = s \Leftrightarrow y - s \in I_1$. Le lemme IV.5 indique que nous sommes dans les hypothèses de la proposition IV.2, d'où : I est une intersection d'idéaux premiers I_s tels que $\forall s I_s \cap K\{y\} = P$ Ainsi I est l'intersection des idéaux de la forme I_1 construit précédemment.

Par l'absurde, supposons que pour tout I_1 , $y - s \in I_1$. Dans ce cas $y - s \in I$ ce qui est impossible par le lemme IV.5. On a donc construit un isomorphisme ayant les propriétés voulues, par la proposition précédente on peut l'étendre en un K -isomorphisme admissible défini sur M . \square

5 Le coeur de la théorie

5.1 Préliminaires et compléments

Définition 5.1.1. Une extension différentielle M de K est dite normale sur K si $M^G = K$ avec $G = \text{Gal}_\partial(M/K)$.

Théorème 5.1.2. Soit M un corps différentiel et $G = \text{Gal}_\partial(M/K)$:

1. Si $H \triangleleft G$ alors $\forall \sigma \in G \sigma(\check{H}) = \check{H}$.

2. Si L est une sous K -extension différentielle de M telle que $\forall \sigma \in G \sigma(L) = L$, alors $\check{L} \triangleleft G$ et G/\check{L} est le groupe des K -automorphismes différentiels de L qui peuvent être étendus à M .

Démonstration : Soit $\sigma \in G$ et $x \in \check{H}$, on veut montrer que $\sigma(x) \in \check{H}$.

$H \triangleleft G \Rightarrow \forall \varphi \in H \sigma^{-1}\varphi\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1}\varphi\sigma(x) = x \Rightarrow \varphi\sigma(x) = \sigma(x) \Rightarrow \sigma(x) \in \check{H}$. De même $\sigma^{-1}(\check{H}) \subset \check{H}$, donc $\sigma(\check{H}) = \check{H}$.

Comme précédemment $\check{L} \triangleleft G$. L'application $\Phi : G \rightarrow \text{Gal}_\partial(L/K)$, $\sigma \mapsto \sigma|_L$ est bien définie par hypothèse et :

$\text{Ker}\Phi = \check{L}$ et $\text{Im}\Phi$ est l'ensemble des K -automorphismes différentiels de L pouvant être étendus à M . \square

Lemme 5.1.3. Soit L une sous K -extension différentielle de M , fermée et H le sous-groupe correspondant. Alors $N_G(H) = \{\sigma \in G / \sigma(L) = L\}$.

Démonstration : $N_G(H) = \{\sigma \in G / \forall \varphi \in H \sigma\varphi\sigma^{-1} \in H\}$, $H = \check{L}$. Soit $\sigma \in N_G(\check{L})$ et $x \in L$.

On a $\forall \varphi \in \check{L} \sigma^{-1}\varphi\sigma \in \check{L}$ donc $\forall \varphi \in \check{L} \varphi(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Ainsi $\sigma(x) \in \check{L} = L$ donc $\sigma(L) \subset L$ et pareillement pour σ^{-1} d'où $N_G(\check{L}) \subset \{\sigma \in G / \sigma(L) = L\}$.

Réciproquement, si $\sigma \in G$ est tel que $\sigma(L) = L$ et si $\varphi \in \check{L}$, alors $\sigma(L) = L$ donc $\varphi\sigma|_L = \sigma|_L$ et $\sigma^{-1}\varphi\sigma|_L = \text{Id}_L$ d'où $\sigma \in N_G(\check{L})$. \square

Lemme 5.1.4. Soit L une sous K -extension différentielle fermée de M , normale sur K . Supposons de plus que $N_G(\check{L})$ est fermé et que tout K -automorphisme différentiel de L peut être étendu sur M . Alors $\check{L} \triangleleft G$ et G/\check{L} est exactement $\text{Gal}_\partial(L/K)$.

Démonstration : $\check{L} \triangleleft G \Leftrightarrow N_G(\check{L}) = G$, soit donc L_1 le sous-corps correspondant à $N_G(\check{L})$. Si $L_1 = K$ alors, comme $N_G(\check{L})$ est fermé, $\check{L}_1 = N_G(\check{L}) = \check{K} = G$. Montrons donc que $L_1 = K$. Par le lemme V.1 on sait que $N_G(\check{L}) = \{\sigma \in G / \sigma(L) = L\}$, c'est à dire, car tout K-automorphisme peut être prolongé sur M, on a : $Gal_\partial(L/K) = N_G(\check{L})$. Or comme L est normale, si $x \in L$ $x \notin K \exists \sigma \in N_G(\check{L})$, $\sigma(x) \neq x$, i.e $L_1 = K$.

On a enfin $G/\check{L} \simeq Gal_\partial(L/K)$ par la proposition V.1. □

5.2 Normalité de l'extension de Picard-Vessiot

Lemme 5.2.1. Soit (K, C) un corps différentiel avec C algébriquement clos, et M une extension de Picard-Vessiot de K. Supposons donnés $z \in M$ et $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ et $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset M$, et supposons qu'il existe σ , un K-isomorphisme admissible de M, envoyant $\{x_\alpha\}$ sur $\{y_\alpha\}$ en déplaçant z. Alors il existe un K-automorphisme de M réalisant la même chose.

Démonstration : Soit $\sigma : M \rightarrow L \subset N$, et C_N le corps des constantes de N, $\sigma(u_i) = \sum k_{ij} u_j$ (*) avec $k_{ij} \in C_N$. Soit $x, y \in M$, $x = \frac{P(u)}{Q(u)}$ et $y = \frac{R(u)}{S(u)}$ où $u = (u_1, \dots, u_n)$, on a :
 $y = \sigma(x) \Leftrightarrow R(u)Q(\sigma(u)) = P(\sigma(u))S(u)$, injectant (*), on obtient un système d'équations polynômiales en k, à coefficients dans M, et on a un tel système pour chaque α . De plus, par le lemme III.4 on a $k_{ij} \in \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0)$, et enfin on a l'inéquation $\sigma(z) \neq z$ et $det(k_{ij}) \neq 0$, or (k_{ij}) est une solution de ce système dans C_N , donc par le lemme III.2 il existe une solution dans C, d'où l'automorphisme cherché. □

THÉORÈME 5.2.1. Soit (K, C) comme précédemment, de caractéristique 0, alors : toute extension de Picard-Vessiot de K est normale.

Démonstration : Soit $G = Aut_K(M)$, on a M normale $\Leftrightarrow M^G = K$. Soit $z \in M$, $z \notin K$. La proposition IV.4 nous donne un isomorphisme admissible qui déplace z, et on conclut par le lemme précédent. □

Théorème 5.2.2. Soit (K, C) comme précédemment, et M une extension de Picard-Vessiot de K, alors : Tout K-isomorphisme entre deux sous K-extensions de M peut être étendu en un K-automorphisme différentiel de M. En particulier, tout K-automorphisme de L, sous K-extension, peut être ainsi étendu.

Démonstration : Soit σ un K-isomorphisme différentiel de L_1 dans L_2 , alors par la proposition IV.3, σ peut être étendu en un K-isomorphisme admissible de M. On conclut avec le lemme. □

5.3 Complétion de la théorie de Galois différentielle

Théorème 5.3.1. Les sous-groupes algébriques linéaires de $G = Gal_\partial(M/K)$ sont Galois-fermés.

Démonstration : Dans cette démonstration, si F est un polynôme de $M\{y, z\}$ et n_F le nombre de monômes qui le composent, on dira que E est *strictement plus court* que F si $n_E < n_F$.

Soit H un sous-groupe algébrique linéaire de G, montrons que H est Z-dense dans \check{H} par l'absurde (ce qui entraîne le théorème). On fera la preuve dans le cas n=2, pour simplifier la typographie et la lecture, le cas général étant similaire. Soit donc, $M = K \langle u, v \rangle$.

Supposons par l'absurde que $\exists f \in C[X_{i,j}]$, $f(H) = \{0\}$ et $f(\check{H}) \neq \{0\}$. Soit $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ l'inverse de

$\begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix} \in GL_2(K)$, et $F \in M\{y, z\}$ définie par :

$$F(y, z) = f(Ay + By', Az + Bz', Cy + Dy', Cz + Dz')$$

Si on prend $\sigma \in H$, de matrice $(k_{i,j})$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \sigma u & \sigma u' \\ \sigma v & \sigma v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}$$

Ainsi $(\forall \sigma \in H F(\sigma u, \sigma v) = 0, \text{ et } \exists \sigma_1 \in \check{H} F(\sigma_1 u, \sigma_1 v) \neq 0.)$ (*) Soit $I = \{F \in M\{y, z\} / F \text{ vérifie } (*)\}$. $I \neq \emptyset$, car $F \in I$.

On note E un élément de I ayant le nombre minimal de monômes. Comme M est un corps, on peut supposer que l'un des coefficients de E vaut 1. Pour $\tau \in H$ on appelle E_τ le polynôme obtenu en prenant l'image des coefficients de E par τ . On a donc :

$\forall \sigma \in H E_\tau(\sigma u, \sigma v) = \tau E(\tau^{-1}\sigma(u), \tau^{-1}\sigma(v)) = 0$. Or $E - E_\tau$ est strictement plus court que E , donc $\forall \sigma \in \check{H} (E - E_\tau)(\sigma u, \sigma v) = 0$.

Si $E \neq E_\tau$, il existe $a \in M$ tel que $E - a(E - E_\tau)$ est strictement plus court que E et appartient à I , ce qui est impossible, d'où : $E = E_\tau$. Ainsi tous les coefficients de E sont stables par $\tau \in H$, donc sont dans \check{H} . Or $\forall \sigma \in \check{H} \forall x \in \check{H} \sigma(x) = x$, donc : $\forall \sigma \in \check{H} \sigma E(u, v) = E(\sigma u, \sigma v) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Finalement en rassemblant l'analyse précédente et la proposition on obtient le théorème principal de la théorie de Galois différentielle qui découle simplement de ce qui a été fait auparavant.

THÉORÈME 5.3.1. Correspondance de Galois Soit K un corps différentiel de caractéristique 0, de corps des constantes C algébriquement clos. Soit M une extension de Picard Vessiot de K , alors :

1. on a une correspondance bijective entre les sous K -extensions différentielles de M et les sous-groupes linéaires algébriques de $G = Gal_\partial(M/K)$, donnée par $\check{\cdot}$.
2. Un sous-groupe fermé H de G est distingué dans G si et seulement si $\check{H} = L$ est normale sur K . De plus dans ce cas, on a : $G/H \simeq Gal_\partial(L/K)$.

6 Résolution par quadrature des équations différentielles linéaires

Nous allons désormais nous attacher à donner une jolie application de cette théorie : similairement à la notion de *résolubilité par radicaux* d'une équation algébrique, on a, pour les équations différentielles linéaires, la notion de *résolubilité par quadratures*. On peut se demander si toutes les équations différentielles linéaires sont résolubles par quadratures, et, si non a-t-on un critère général nous permettant de différencier celles qui le sont de celles qui ne le sont pas ?

Il est remarquable de constater là encore la similitude avec la théorie de Galois classique : comme nous allons le montrer, le résultat provient de la résolubilité (ou non) d'un sous-groupe du groupe de Galois.

Définition 6.0.2. Soient K et M des corps différentiels. M est une extension de Liouville de K si il existe une tour de corps $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = M$ telle que pour tout i on a $K_i = K_{i-1}(u_i)$, avec :

1. $\frac{\partial(u_i)}{u_i} \in K_{i-1}$ (i.e $u_i = e^{\int a_i}$ pour un $a_i \in K_{i-1}$), ou
2. $\partial(u_i) \in K_{i-1}$ (i.e $u_i = \int a_i$ pour un $a_i \in K_{i-1}$).

Autrement dit, une extension de Liouville se construit par quadratures, et on a un critère pour que toute solution d'une équation différentielle donnée soit liouvillienne (i.e appartienne à une extension de Liouville).

THÉORÈME 6.0.2. Soit M une extension de Picard-Vessiot de K (corps différentiel de caractéristique 0 et de corps des constantes algébriquement clos) de groupe de Galois $G(M/K)$. M est contenue dans

une extension finie de K suivie d'une extension de Liouville si et seulement si la composante connexe de l'identité, $G(M/K)^0$, est un groupe résoluble.

Notons que ce théorème ne nous donne pas d'algorithme nous permettant de savoir si une équation est ou non résoluble par quadratures. La démonstration de ce théorème est le but du reste de cette partie.

6.1 Etude des extensions de Liouville

Le lemme VI.1 est un lemme technique évident qui nous servira tout le temps dans la suite. Le lemme VI.2 étudie l'extension obtenue lorsqu'on ajoute une intégrale (cas(1) : $u = \int a$), et le lemme VI.3 lorsqu'on ajoute l'exponentielle d'une intégrale (cas(2) : $u = e^{\int a}$). La proposition VI.2 donne un premier résultat dans un cas particulier sur le sens direct du théorème VI.1.

Lemme 6.1.1. Soit $K \subset L \subset M$ des corps différentiels. Supposons que L est une extension de Picard-Vessiot de K et que M a le même corps des constantes que K . Alors tout K -automorphisme différentiel de M envoie L sur lui-même.

Lemme 6.1.2. Soit (K, C) un corps différentiel de caractéristique 0 et u dans une extension de K , vérifiant $\partial u = a \in K$, où a n'est pas une dérivée dans K . Alors u est transcendant sur K , $K \langle u \rangle$ est une extension de Picard-Vessiot de K , et $G(K \langle u \rangle / K)$ est isomorphe au groupe additif C .

Démonstration :

1. Supposons u algébrique : soit $u^n + bu^{n-1} + \dots = 0$ minimal. En dérivant on obtient : $nanu^{n-1} + \partial(b)u^{n-1} + \dots = 0$. Donc $na + \partial b = 0$, d'où $a = \partial(-b/n)$ (on est en caractéristique 0) : contradiction.
2. Montrons qu'il n'y a pas de nouvelles constantes : $b_1u^n + b_2u^{n-1} + \dots$ est une constante entraîne $\partial(b_1)u^n + (nb_1a + \partial b_2)u^{n-1} + \dots = 0$. Or u n'est pas algébrique donc $\partial b_1 = 0$ et $a = -(\partial b_2)/(nb_1) = -\partial(b_2/nb_1)$: contradiction. Soit $f(u)/g(u)$ une constante, où f/g est une fraction de $K(X)$, g de degré minimum (parmi les f'/g' tels que $f'(u)/g'(u) = f(u)/g(u)$), et g unitaire. D'après ci-dessus, f non constant entraîne g non constant. L'élément $f(u)/g(u)$ est une constante, et donc égale à $(\partial f(u))/(\partial g(u))$, ce qui contredit la minimalité de g .
3. Soit $\mathcal{L} : \partial(y) - a = 0$ et $\sigma \in G(K \langle u \rangle / K)$. Comme σu définit σ , et doit être solution de \mathcal{L} , on a $\partial(\sigma u - u) = 0$, donc $\sigma u = u + c$ avec $c \in C$. Réciproquement : soit $c \in C$, et σ le K -automorphisme (algébrique) de $K \langle u \rangle$ induit par $u \mapsto u + c$. On a :
$$\partial \circ \sigma (\sum \lambda_i u^i) = \sum (\partial(\lambda_i)(u+c)^i + i\lambda_i a(u+c)^{i-1}) = \sigma (\sum \partial(\lambda_i)u^i + i\lambda_i a u^{i-1}) = \sigma \circ \partial (\sum \lambda_i u^i).$$
 Donc $\sigma \in G(K \langle u \rangle / K)$. □

Lemme 6.1.3. Soit (K, C) un corps différentiel et u dans une extension de K , vérifiant $\partial u - au = 0$, $a \in K$. Supposons que $K \langle u \rangle$ a le même corps des constantes que K . Alors $K \langle u \rangle$ est une extension de Picard-Vessiot de K , et $G(K \langle u \rangle / K)$ est isomorphe à un sous-groupe de C^* .

Démonstration : Si v est une solution de $\partial y - ay = 0$, $\partial(v/u) = 0$. Donc $v = cu$ avec $c \in C$ (ou, plus simplement, les $(k_{i,j})$ qui définissent σ sont dans $GL_1(C) = C^*$). Le reste est immédiat. □

Théorème 6.1.4. Soit M une extension de Liouville de K , sans nouvelles constantes. Alors $G(M/K)$ est résoluble.

Démonstration : Soit $G = G(M/K)$, et $K = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = M$ la tour définissant l'extension de Liouville. Les lemmes VI.2 ou VI.3 donnent K_2 extension de Picard-Vessiot de K . Donc par le lemme VI.1, tout élément de G envoie K_2 sur lui-même. Si $H_2 = \check{K}_2$, La proposition V.1(2) nous donne $H_2 \triangleleft G$ et $G/H_2 \simeq G(K_2/K_1)$. Or par les lemmes VI.2 ou VI.3 $G(K_2/K_1)$ est abélien, donc G/H_2 aussi. Par une récurrence immédiate sur n , G est résoluble. □

6.2 Deux lemmes sur les groupes algébriques linéaires

Dans cette partie, C est un corps algébriquement clos. On étudie les propriétés des groupes algébriques linéaires connexes. Ces deux lemmes servent à la démonstration du théorème VI.2 (de Lie-Kolchin).

Lemme 6.2.1. Dans un sous-groupe algébrique connexe de $GL_n(C)$, tout élément qui n'est pas dans le centre a une classe de conjugaison infinie.

Démonstration. Soit G un tel sous-groupe, et $x \in G$ ayant une classe de conjugaison finie.

Posons $\varphi : G \rightarrow \{axa^{-1} / a \in G\} = \bigsqcup_{i=1}^n \{y_i\}$, avec $\varphi(a) = axa^{-1}$. Les $\varphi^{-1}(y_i)$ forment une partition de G . De plus $\varphi^{-1}(y_i)$ fermé (image réciproque d'un fermé par φ continue) ouvert (complémentaire d'une union finie de fermés) dans G connexe. Donc $x \in Z(G)$. \square

Lemme 6.2.2. Si G est un sous-groupe algébrique connexe de $GL_n(C)$, alors le groupe dérivé $D(G)$ est connexe.

Démonstration. Notons D_k les produits de k commutateurs, on a alors $D_k \subset D_{k+1}$ et $D(G) = \bigcup_k D_k$. Il suffit donc de montrer D_k connexe. Supposons D_{k-1} connexe.

Pour $a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ fixés, l'application $\varphi : \alpha \mapsto \alpha^{-1}b_1^{-1}\alpha b_1 a_2^{-1}b_2^{-1}a_2 b_2 \dots a_k^{-1}b_k^{-1}a_k b_k$ est continue. La réunion des images de G par φ lorsque les a_i et les b_i parcourent G est égale à D_k , et $\varphi(G)$ est connexe. Or $\varphi(G) \cap D_{k-1} \neq \emptyset$ (car $\varphi(b_1) \in D_{k-1}$) et D_{k-1} est connexe donc D_k l'est aussi \square

6.3 Trigonalisation simultanée d'automorphismes

Le théorème VI.2 est un résultat fondamental pour la théorie des extensions de Picard-Vessiot et de Liouville. La proposition VI.3, que l'on peut démontrer directement, le relie au corps de la théorie.

THÉORÈME 6.3.1. (de Lie-Kolchin) Soit G un sous-groupe résoluble de $GL_n(C)$, où C est un corps algébriquement clos. Si G est connexe (pour la topologie de Zariski), les éléments de G peuvent être trigonalisés simultanément.

Démonstration : On décompose cette (longue) démonstration en 6 étapes.

1. Supposons que G (muni de sa représentation canonique) n'est pas irréductible : il existe W sous-espace vectoriel, de dimension p , de C^n stable par G . On prend une base de W que l'on complète en une base de C^n :

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & B' \end{pmatrix} \quad \forall A \in G$$

Montrons que l'application $\varphi : A \mapsto B$ est continue (la topologie utilisée est toujours la topologie de Zariski). Soit $P_{k,l}(X_{i,j}) = X_{k,l} \in C[(X_{i,j})]$, pour $1 \leq k, l \leq p$; et $F = \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0)$ un fermé de $GL(W)$. Alors $\varphi^{-1}(F) = \{(x_{i,j}) / (P_{k,l}((x_{i,j})_{i,j})_{k,l}) \in F\} = \{(x_{i,j}) / \forall f \in S f((P_{k,l}((x_{i,j})_{i,j})_{k,l})) = 0\}$. Or $f((P_{k,l}((x_{i,j})_{i,j})_{k,l})) \in C[(X_{i,j})]$, donc $\varphi^{-1}(F)$ fermé de $GL_n(C)$. Donc φ est continue, ce qui entraîne $\{B / A \in G\}$ est connexe. Par récurrence, on peut donc se ramener à une forme triangulaire bloc, où les blocs sont irréductibles.

2. On suppose désormais G irréductible. $D(G)$ est connexe car G est connexe par le lemme VI.5. Par récurrence sur la longueur de la tour de décomposition (G est résoluble), on peut supposer $D(G)$ sous forme triangulaire.
3. Soit W le sous-espace vectoriel de C^n engendré par les vecteurs propres de $D(G)$. $W \neq 0$ car $D(G)$ triangulaire.
Soit $\alpha \in W$, on a $\forall T \in D(G) T(\alpha) = c(T)\alpha$, d'où $(\forall S \in G)(\forall T \in D(G)) S^{-1}TS(\alpha) = c(S^{-1}TS)\alpha$

car $D(G) \triangleleft G$. Donc $\forall T \in D(G) T(S(\alpha)) = c(S^{-1}TS)S(\alpha)$. Donc pour tout $S \in G S(\alpha) \in W$, ce qui entraîne que W est stable par G . G irréductible impose alors $W = C^n$. $D(G)$ est donc diagonal.

4. Tout élément de $D(G)$ est donc une matrice diagonale. Ses conjugués dans G , étant dans $D(G)$, sont donc diagonaux. Les seuls conjugués possibles sont alors ceux obtenus en permutant les racines du polynôme caractéristique sur la diagonale. Donc chaque élément de $D(G)$ a une classe de conjugaison finie dans G . Par le lemme VI.4, $D(G) \subset Z(G)$.
5. Soit $T \in D(G)$, c une racine de son polynôme caractéristique, et W le sous-espace propre associé. Comme T commute à tout élément de G , W est invariant par G . Donc $W = C^n$, ce qui entraîne $D(G) \subset \{\lambda Id / \lambda \in C^*\}$.
6. Les commutateurs ont tous leur déterminant égal à 1, donc $D(G) \subset \{\lambda Id / \lambda \in \mu_n(C)\}$. Or $\mu_n(C)$ est fini, donc $D(G)$ est fini. Or par le lemme VI.5, $D(G)$ est connexe, donc $D(G) = 1$. D'où G est commutatif, et dans le cas commutatif, on connaît déjà le résultat. \square

Théorème 6.3.1. Soit M une extension différentielle de K telle que $\check{K} = K$. Supposons que $u_1, \dots, u_n \in M$ vérifient : $\forall \sigma \in G(M/K) \quad \sigma u_i = a_{i,i}u_i + \dots + a_{i,n}u_n$ (*) ($i = 1..n$) (c'est à dire $(u_i)_i$ base de trigonalisation de G) avec $a_{ij} \in C_M$. Alors $K \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ est une extension de Liouville de K .

Démonstration. On peut supposer u_n non nul. L'équation (*) pour $i=n$ donne $\sigma u_n = a_{n,n}u_n$, donc $\partial(u_n)/u_n$ est invariant sous σ (c'est à dire $\in \check{K}$). Donc $\partial(u_n)/u_n \in K$: l'ajout de u_n à K est du type $\exp \int a$. En divisant (*) pour $i=1..n-1$ par σu_n et en dérivant, on obtient :

$$\sigma \left(\partial \left(\frac{u_i}{u_n} \right) \right) = \frac{a_{i,i}}{a_{n,n}} \partial \left(\frac{u_i}{u_n} \right) + \dots + \frac{a_{i,n-1}}{a_{n,n}} \partial \left(\frac{u_i}{u_n} \right).$$

D'où, par récurrence sur n , on peut ajouter les $\partial \left(\frac{u_i}{u_n} \right)$ puis les u_i/u_n qui sont alors des intégrales. Donc $K \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ est une extension de Liouville. \square

6.4 Démonstration du théorème VI.1

Désormais le corps différentiel K est de caractéristique 0 et de corps des constantes algébriquement clos. Nous allons maintenant démontrer le théorème principal (VI.1). Le sens (inclu dans une extension de Liouville $\implies G^0$ résoluble) ne nécessite que 2 lemmes, dont un lemme (le VI.7) sur la structure des groupes algébriques linéaires.

Lemme 6.4.1. Soit M une extension de Picard-Vessiot de K , et $N = M \langle z \rangle$ une extension de M sans nouvelles constantes. Posons $L = K \langle z \rangle$. Alors N est une extension de Picard-Vessiot de L et $G(N/L) \simeq L \check{\cap} M$ est un sous-groupe algébrique de $G(M/K)$.

Démonstration. Si $M = K \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, alors N est engendrée par les u_i sur L , et n'a pas de nouvelles constantes. Donc N est une extension de Picard-Vessiot de L . Le lemme VI.1 montre que tout K -automorphisme différentiel de N envoie M sur lui-même. D'où un homomorphisme de $G(N/L)$ dans $G(M/K)$ (la restriction). Si σ est un élément du noyau, σ laisse fixe M et L , donc aussi le corps engendré par $M \cup L$, c'est à dire N , d'où l'injectivité. Soit H l'image, H est algébrique par le théorème ?? . De plus H laisse fixe $L \cap M$ exactement (par définition). Donc $H = L \check{\cap} M$. \square

Lemme 6.4.2. Soit G un sous-groupe de $GL_n(C)$, H un sous-groupe fermé de G . Supposons que ou bien (1) H est d'indice fini dans G , ou bien (2) $H \triangleleft G$ et G/H abélien. Si la composante connexe de l'identité dans H , H^0 , est résoluble, Alors G^0 est résoluble.

Démonstration :

1. Montrons que G^0 est un sous-groupe d'indice fini dans G : $(G^0)^{-1} \subset G^0$ et, si $g \in G^0$, $gG^0 \subset G^0$ par connexité (intersection non vide). Donc G^0 est un sous-groupe de G . Par le corollaire III.1, G est réunion d'un nombre fini n de composantes connexes G_i (qui sont donc ouvertes et fermées). Soit $(x_i)_{i=1..n}$ une suite d'éléments de G , chacun dans une composante connexe. On a alors $G = \bigcup_{i=1}^n x_i G^0$, car $x_i^{-1} G_i$ ouvert fermé dans le connexe G^0 . Donc G^0 est d'indice fini. Montrons que $H^0 = G^0 : \bigsqcup_{x \in G/H} x = G$ donc $G^0 = \bigsqcup_{x \in G/H} (x \cap G^0)$ avec $H^0 = G^0 \cap H$. Donc, G/H étant fini, H^0 est fermé (car H l'est) ouvert (complémentaire d'une union finie de fermés) dans G^0 connexe.
2. G/H abélien entraîne $D(G) \subset H$. Or $G^0 \subset G$, donc $D(G^0) \subset H$. Par le lemme VI.4, $D(G^0)$ est connexe. Donc $D(G^0) \subset H^0$, ce qui entraîne G^0 résoluble. \square

Théorème 6.4.3. Soit M une extension de Picard-Vessiot de K . Supposons $M \subset N$, où N est une extension de Liouville généralisée (suite d'extensions de types (1), (2), ou algébriques finies) de K , sans nouvelles constantes. Alors $G(M/K)^0$ est résoluble.

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre d'étapes dans la chaîne de K à N .

Soit $K \langle u \rangle$ la première étape. Alors par hypothèse de récurrence $G(M \langle u \rangle / K \langle u \rangle)^0$ est résoluble. Par le lemme VI.6, ce groupe est isomorphe au sous-groupe H de G correspondant à $K \langle u \rangle \cap M$.

Supposons u algébrique sur K . Alors $\text{Card}(\text{hom}_{K\text{-alg}}(K \langle u \rangle, K \langle u \rangle)) \leq [K \langle u \rangle : K]$ (théorème de Dedekind). Or $G(K \langle u \rangle / K) = \text{Gal}_{\partial}(K \langle u \rangle / K) \subset \text{hom}_{K\text{-alg}}(K \langle u \rangle, K \langle u \rangle)$, donc $\text{Card}(G(K \langle u \rangle / K))$ est fini. Par le théorème V.1.(2) ($L = M \cap K \langle u \rangle$) $G/H \subset G(L/K)$. Donc H est d'indice fini.

Supposons u de la forme (1) ou (2). Par le lemme VI.2 ou VI.3, $K \langle u \rangle$ est une extension de Picard-Vessiot de K avec un groupe de Galois commutatif. Donc tous les sous-corps différentiels sont normaux sur K . En particulier, $M \cap K \langle u \rangle$ est normal, et $G(M \cap K \langle u \rangle)$ est abélien. Dans les deux cas, le lemme VI.7 permet de conclure. \square

La réciproque utilise tous les résultats démontrés aux paragraphes précédents du VI.

Théorème 6.4.4. Soit M une extension de Picard-Vessiot de K . Supposons que $G(M/K)^0$ est résoluble. Alors M peut être obtenue par une extension finie suivie d'une extension de Liouville.

Démonstration. Soit $H = G(M/K)^0$, et $L = \check{H}$ le corps intermédiaire associé. L est alors une extension normale, et $H = \check{L} = \check{\check{H}}$. Le fait que M est une extension de Liouville de L vient de l'enchaînement du théorème VI.2 et de la proposition VI.2. \square

6.5 Application à l'équation de Riccati

(K, C) est un corps différentiel de caractéristique 0, et C est algébriquement clos. Pour $a \in K$ fixé, on étudiera l'équation de Riccati $\partial t = t^2 + a$, à partir de l'équation $\partial^2(y) + ay = 0$ (1). On notera M l'extension de Picard-Vessiot associée à (1).

Par la Correspondance de Galois (théorème V.2), étudier les sous K -extensions de M revient à étudier la structure de $G(M/K)$. Donc, pour démontrer la proposition VI.5, but de ce paragraphe, nous allons auparavant obtenir un résultat sur les sous-groupes algébriques de $SL_2(C)$.

Lemme 6.5.1. Soit G un sous-groupe de $SL_2(C)$. Si G est algébrique et G^0 est résoluble, ou bien G est fini, ou bien G^0 est diagonalisable et $[G : G^0] \leq 2$, ou bien G est trigonalisable.

Démonstration. Si G^0 est diagonalisable, ses éléments sont des matrices diagonales ayant pour coefficients a et a^{-1} . G^0 est fermé donc algébrique, donc G^0 vérifie des équations polynômiales P_i . a est alors dans l'intersection des racines des P_i , qui est finie si les P_i sont non tous nuls.

Si G^0 est fini, G est fini car $[G : G^0]$ fini (démonstration du lemme VI.7(1)). Sinon, G^0 est l'ensemble des matrices diagonales de $SL_2(C)$. Par un calcul identique à celui du théorème VI.2(3), les vecteurs propres de G^0 sont stables par G ($G^0 \triangleleft G$). Donc tout élément de G permute les vecteurs de la base ou les laisse fixes : $[G : G^0] \leq 2$.

Si G^0 n'est pas diagonalisable, G^0 est trigonalisable (théorème VI.2), donc G^0 a un unique sous-espace propre. Il est donc invariant par G . Donc G est trigonalisable. \square

Théorème 6.5.2. Soit M l'extension de Picard-Vessiot de K pour l'équation $\partial^2(y) + ay = 0$ (1). Supposons que M est une extension finie de K suivi d'une extension de Liouville, mais n'est pas de dimension finie sur K . Alors l'équation $\partial t = t^2 + a$ a une solution dans une extension quadratique de K .

Démonstration. Le wronskien correspondant à l'équation (1) vérifie $\partial W = 0$, donc $W \in C_M = C \subset K$. De plus, pour tout $\sigma \in G(M/K)$, $\sigma W = \det(\sigma)W$ (voir la démonstration du lemme III.4.(2)). Donc $\sigma \in K \langle \check{W} \rangle (= \check{K}$ ici) si et seulement si $\sigma \in SL_2(C)$. Donc $G = G(M/K)$ est un sous-groupe de $SL_2(C)$. De plus, G^0 est résoluble par le théorème VI.1

$[M : K]$ est infini donc G fini est exclu. Dans les deux autres cas du lemme précédent, il existe une extension quadratique L de K telle que \check{L} soit trigonalisable. Donc il existe une solution u non nulle de (1) telle que $\forall \sigma \in \check{L} \sigma(u) = c_\sigma u$, où $c_\sigma \in C$. Donc $\frac{\partial u}{u}$ appartient à L , car M est normale sur L . Posons $t = -\partial(u)/u$, t vérifie alors l'équation de Riccati. D'où le théorème. \square

Il existe une généralisation de la théorie que nous avons présentée aux équations aux dérivées partielles. Celle-ci est développée dans [Pom83], les groupes algébriques linéaires étant remplacés par des "semi-groupes de Lie", mais ceci n'est plus du tout élémentaire.

Troisième partie

Exposé au cours de Y. Laszlo :

La suite exacte d'homotopie pour un morphisme propre et séparable

On étudie $\pi_1(\overline{X_y})$, où $\overline{X_y}$ est la fibre géométrique de $X \rightarrow Y$ propre. k est un corps, fixé.

1 Morphismes séparables

Définition 1.0.3. Un schéma X sur k est dit séparable si pour toute extension K de k $X \otimes_k K$ est réduite.

Un morphisme de schéma $f : X \rightarrow Y$ est dit séparable si X est plat sur Y et si $\forall y \in Y$ la fibre $X \otimes_Y k(y)$ est séparable sur $k(y)$.

Proposition 1.0.4. Soit X un schéma sur k .

X est séparable si et seulement si X est réduit et si, pour tout x générique dans une composante irréductible de X , $k(x)$ est une extension séparable de k .

Remarque 1.0.5. Si k est parfait, X séparable $\Leftrightarrow X$ réduit.

La séparabilité est stable par changements de base, et par composition modulo des hypothèses de finitude convenables. Par exemple :

Proposition 1.0.6. Si X est séparable sur Y et X' étale sur X , alors X' est séparable sur Y .

2 La suite exacte d'homotopie

Proposition 2.0.7. [admise] Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre et séparable, avec Y localement noethérien, et considérons sa factorisation de Stein $X \xrightarrow{f'} Y' \rightarrow Y$ (où $f'_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y'}$, Y' fini sur Y et isomorphe à $\text{Spec } f_* \mathcal{O}_X$).

Alors Y' est un revêtement étale de Y .

Démonstration. Il suffit de montrer que $q : Y' \rightarrow Y$ est étale, ce qui est un problème purement local.

On peut donc supposer $Y = \text{Spec } A$.

On peut supposer que A est local et complet :

En effet, si $Y_1 \rightarrow Y$ est un changement de base plat, alors on a, par le théorème des fonctions formelles :

$$f'_{Y_1*}(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_1}) \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_1})$$

Ce qui signifie que (f'_{Y_1}, q_{Y_1}) est la factorisation de Stein de f_{Y_1} . Donc on peut effectuer un le changement de base. De plus, il suffit de regarder au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y}$ pour montrer que q est étale au-dessus de y (stabilité par changement de base).

Donc on effectue le changement de base $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow Y$: on peut supposer A local. De même, on peut supposer A complet.

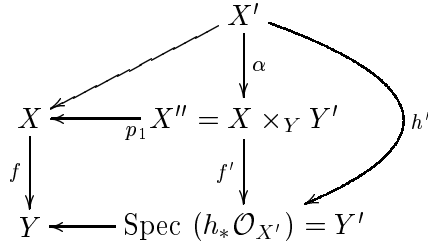
□

Théorème 2.0.8. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre séparable, avec Y localement noethérien et connexe, et supposons que $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Soit $y \in Y$, $\overline{k(y)}$ une clôture algébrique de $k(y)$, et $\overline{X_y} = X_y \otimes_{k(y)} \overline{k(y)}$ (fibre géométrique). Soit X' un revêtement étale connexe de X et $\overline{X'_y} = X'_y \otimes_{k(y)} \overline{k(y)}$.

Pour qu'il existe un revêtement étale Y' de Y et un X -isomorphisme $X' \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y'$, il faut et il suffit que $\overline{X_y}$ admette une section sur $\overline{X_y}$.

Remarque 2.0.9. $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ implique que les fibres sont géométriquement connexes, et réciproquement par la proposition 2.0.7. f est en fait sa propre factorisation de Stein.

Démonstration. Comme $h : X' \rightarrow X \rightarrow Y$ est propre séparable, on a par la proposition 2.0.7 la factorisation de Stein $X' \rightarrow Y' \rightarrow Y$, où $Y' = \text{Spec}(h_*\mathcal{O}_{X'})$ et $Y' \rightarrow Y$ est un revêtement étale. De plus, par la propriété universelle du produit fibré on a un Y -morphisme canonique $X' \rightarrow X \times_Y Y'$. Il suffit de prouver que c'est un isomorphisme. Or Y' est un revêtement étale de Y , donc $X \times_Y Y'$ revêtement étale de X (stabilité par changement de base). Donc, comme X' est un revêtement étale de X , et donc est de type fini et non ramifié, $X' \rightarrow X \times_Y Y'$ est également étale¹.



Lemme : $X \times_Y Y'$ est connexe.

Démonstration. Y' est connexe comme image de X' connexe.

Supposons que $X \times_Y Y'$ n'est pas connexe :

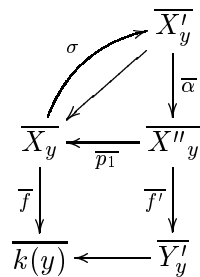
On aura $Y' = \text{Spec} A$, $X \times_Y Y' = \text{Spec} B = \text{Spec}(A \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)$, et $X \times_Y Y'$ non connexe correspond à $B = B_1 \times B_2$ avec $B_i \neq \{0\}$.

Comme $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, on a $f_*B = A$. Donc $A = f_*(B_1) \oplus f_*(B_2)$ avec $f_*(B_i) \neq \{0\}$ (car $1_{f_*(B_i)} \neq 0$).

D'où contradiction : $X \times_Y Y'$ est connexe. \square

Donc, pour prouver que $\alpha : X' \rightarrow X \times_Y Y'$ est un isomorphisme, il suffit de voir que son "degré de projection" en un point de $X \times_Y Y'$ est égal à 1. Notons $\sigma : \overline{X}_y \rightarrow \overline{X}'_y$.

On effectue le changement de base $\text{Spec } \overline{k}(y) \rightarrow Y$. On a alors :



Posons $X'' = X \times_Y Y'$.

Il suffit de montrer que $\text{rg } \overline{\alpha} = 1$ en un point de \overline{X}''_y . Comme $Y' \rightarrow Y$ est un revêtement étale, $\overline{Y}'_y = \bigoplus_{i=1}^n \overline{k}_i$ avec $\overline{k}_i = \overline{k}(y)$. D'où :

$$\overline{X}''_y = \overline{X}_y \times_{\overline{k}(y)} \overline{Y}'_y = \bigoplus_{i=1}^n \overline{X}_{y_i} \text{ avec } \overline{X}_{y_i} = \overline{X}_y$$

σ est un revêtement étale et \overline{X}_y est connexe, donc $\sigma(\overline{X}_y)$ est une composante connexe Z de \overline{X}'_y . Donc $\overline{\alpha}(Z)$ doit être un certain \overline{X}_{y_i} .

¹ Soit X et X' des schémas de type fini sur un schéma Y , et $g : X' \rightarrow X$ un Y -morphisme. Si X' est non ramifié et X est étale, alors g est étale.

Alors $\overline{p}_1 : \overline{X''}_y \rightarrow \overline{X}_y$ est isomorphisme de \overline{X}_{y_i} sur \overline{X}_y . Il s'ensuit que $Z \xrightarrow{\sigma \circ \overline{p}_1} \overline{X}_{y_i}$ sont inverses l'une de l'autre.

Le nombre de composantes connexes de \overline{X}'_y est égal au nombre de points géométrique de Y' sur Y , c'est-à-dire n .

Il s'ensuit que le nombre de composantes connexes de \overline{X}'_y et \overline{X}''_y sont identiques.

Donc $\overline{\alpha}$ est un isomorphisme. \square

Corollaire 2.0.10. Avec les notations précédentes pour $f : X \rightarrow Y$ et \overline{X}_y , et \overline{a} un point géométrique de \overline{X}_y , a son image dans X et b son image dans Y . Alors on a la suite exacte (de groupes) suivante :

$$\pi_1(\overline{X}_y, \overline{a}) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(X, a) \xrightarrow{\psi} \pi_1(Y, b) \rightarrow 1$$

Démonstration.

Surjectivité de ψ :

il suffit de montrer que si $Y' \rightarrow Y$ est un revêtement étale connexe, alors son relèvement $X' = X \times_Y Y' \rightarrow X$ en est un aussi.

On a déjà $X' \rightarrow X$ revêtement étale par stabilité par changement de base, et :

$$\begin{aligned} f'_*(\mathcal{O}_{X'}) &= f'_*(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}) \\ &= f'_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \\ &= \mathcal{O}_{Y'} \end{aligned}$$

Donc les fibres de f' sont connexes.

Donc X' est aussi connexe.

$\psi \circ \varphi = 0$:

Il suffit de montrer que si $Y' \rightarrow Y$ est un revêtement étale, le revêtement étale $Y' \times_Y \overline{X}_y \rightarrow \overline{X}_y$ est complètement décomposé.

Or $Y' \times_Y \overline{k}(y) = \bigoplus_{\text{finie}} \overline{k}(y)$, et donc $Y' \times_Y \overline{X}_y \simeq X \times_Y (Y' \times_Y \overline{k}(y)) = \bigoplus_{\text{finie}} \overline{X}_y$.

$\ker \psi \subset \text{Im} \varphi$:

Soit $g : X' \rightarrow X$ un revêtement étale connexe de X , $\overline{g} : \overline{X}'_y \rightarrow \overline{X}_y$ admettant une section σ au-dessus de \overline{X}_y . Le théorème 2.0.8 nous donne le résultat. \square

On peut supprimer les hypothèses $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ et Y connexe :

Corollaire 2.0.11. On note $\pi_0(\overline{X}_y, \overline{a})$, $\pi_0(X, a)$, $\pi_0(Y, b)$ les ensembles pointés des composantes connexes des schémas \overline{X}_y , X , Y .

Alors si $f : X \rightarrow Y$ est propre et séparable, on a la suite exacte suivante :

$$\pi_1(\overline{X}_y, \overline{a}) \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, b) \rightarrow \pi_0(\overline{X}_y, \overline{a}) \rightarrow \pi_0(X, a) \rightarrow \pi_0(Y, b) \rightarrow (1)$$

Démonstration. On suppose pour commencer que X et Y sont connexes. On a la factorisation de Stein de $f : X \xrightarrow{f'} Y' = \text{Spec}(f_*\mathcal{O}_X) \xrightarrow{g} Y$. On applique le corollaire 2.0.10 à f' :

$$\pi_1(\overline{X}_y, \overline{a}) \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y', y') \rightarrow 1$$

où $y' \in Y'$ est l'image de $a \in X$.

On sait que $\pi_1(Y', y') \rightarrow \pi_1(Y, b)$ est injective et que l'ensemble quotient $\pi_1(Y, b)/\pi_1(Y', y')$ est isomorphe

à l'ensemble des points géométriques de Y' au-dessus de y , qui est isomorphe à $\pi_0(\overline{X}_y, \overline{a})$. D'où la suite exacte :

$$\pi_1(\overline{X}_y, \overline{a}) \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, b) \rightarrow \pi_0(\overline{X}_y, \overline{a}) \rightarrow 1$$

□

Corollaire 2.0.12. Soit k algébriquement clos, X, Y deux k -schémas connexes, on suppose X propre et Y localement noethérien .

Soit a un point géométrique de X , b un point géométrique de Y à valeur dans la même extension algébriquement close K de k . Considérons le point géométrique $c = (a, b)$ de $X \times_k Y$. Alors l'homomorphisme $\pi_1(X \times_k Y, c) \rightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$ est un isomorphisme.

Démonstration.

Supposons $K = k$.

Soit $Z = X \times_k Y$ et $f : Z \rightarrow Y$ la projection. Soit y la localité de b . on peut supposer X réduit (quitte à remplacer X par X_{red} , qui a même π_1), donc séparable sur k .

Donc Z est séparable sur k . X connexe donc Z est à fibres géométriquement connexes. La fibre de Z en b est canoniquement isomorphe à $X \otimes_k K = X$.

D'autre part, comme le composé $X \rightarrow Z \rightarrow X$ est l'identité, on trouve que $\pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Z, c)$ est injectif. On a donc, avec la proposition 2.0.10, la suite exacte :

$$1 \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Z, c) \rightarrow \pi_1(Y, b) \rightarrow 1$$

et aussi la suite exacte canonique :

$$1 \rightarrow \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b) \rightarrow \pi_1(Y, b) \rightarrow 1$$

Donc (lemme des 5) l'homomorphisme canonique $\pi_1(Z, c) \rightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$ est un isomorphisme.

Cas général :

On va trouver un isomorphisme $\pi_1(Z, c) \rightarrow \pi_1(X \otimes_k K, a) \times \pi_1(Y, b)$. On a le résultat par le lemme suivant :

□

Lemme 2.0.13. Soit X propre connexe sur k algébriquement clos, k' une extension algébriquement close de k , a' un point géométrique de $X \otimes_k k'$ et a son image dans X . Alors l'homomorphisme canonique $\pi_1(X \otimes_k k', a') \rightarrow \pi_1(X, a)$ est un isomorphisme.

Démonstration.

La surjectivité est équivalente au fait que si X' est un revêtement étale connexe de X , alors $X \otimes_k k'$ est également connexe. Ce qui est vrai car k est algébriquement clos.

L'injectivité est équivalente au fait que tout revêtement étale connexe de $X \otimes_k k'$ est isomorphe à l'image inverse d'un revêtement étale de X .

□

Corollaire 2.0.14. Soit k un corps algébriquement clos, X et Y deux schémas localement noethérien sur k , $Z = X \times_k Y$ leur produit, Z' un revêtement étale de Z . Pour tout point $y \in Y$ rationnel sur k , soit $i_y : \text{Spec}(k) \rightarrow Y$ le morphisme canoniquement associé, $j_y = \text{Id}_X \times_k i_y$ le morphisme $X \rightarrow Z$ correspondant. Soit enfin X'_y le revêtement étale de X image inverse de Z' par j_y . On suppose Y connexe, et X ou Y propre sur k . Alors les revêtements X'_y de X sont tous isomorphes.

Quatrième partie

Mémoire de DEA :

Études des droites sur les hypersurfaces de Fermat

On étudie ici les droites sur les hypersurfaces de \mathbb{P}^N , à partir du chapitre 2.4. de [Deb01]. La première partie étudie le cas général, en se basant sur [BVdV78]. Puis, à l'aide des propriétés trouvées, on étudie le cas des hypersurfaces de Fermat.

Dans toute la suite, on travaille sur un corps k algébriquement clos. Tous les sous-schémas considérés sont des sous-schémas fermés.

1 Préliminaires

On se place dans un premier temps dans un cadre général.

Notation 1.0.15. Dans toute cette partie, on note G un polynôme homogène de degré $d > 0$ fixé, et X l'hypersurface de \mathbb{P}^N définie par G .

1.1 Notations et définitions

On suit dans cette partie la construction de [BVdV78].

Notons $k[x_0, \dots, x_N]_d$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré d .

Soit $F = \{([l], h) \in \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \times k[x_0, \dots, x_N]_d \mid h|_l = 0\}$ la variété d'incidence.

C'est un sous schéma de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \times k[x_0, \dots, x_N]_d$, qui est un fibré vectoriel sur $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\psi} & k[x_0, \dots, x_N]_d \\ \downarrow \varphi & & \\ \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) & & \end{array}$$

Définition 1.1.1. On définit la variété de Fano $F(X)$ associée à X par $F(X) = \varphi \circ \psi^{-1}(G)$.

Elle a une structure naturelle de schéma et indexe les droites contenues dans X .

En effet l'application φ est juste une projection et $\psi^{-1}(G)$, qui a une structure naturelle de schéma, est contenu dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \times \{G\}$. Donc $F(X)$ a bien une structure de schéma, celle de $\psi^{-1}(G)$. On la calculera explicitement au paragraphe 1.2.

Remarque 1.1.2. $F(X)$ a une structure de schéma projectif, car c'est un sous-schéma de la grassmannienne $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(2, k^{N+1})$, donc elle se plonge dans un \mathbb{P}^n par le plongement de Plücker.

Remarque 1.1.3. Il peut être intéressant de ne pas choisir de coordonnées dans \mathbb{P}^N a priori, c'est-à-dire de voir \mathbb{P}^N comme un $\mathbb{P}V$ avec V un espace vectoriel de dimension $N + 1$ sur k . Dans ce cas $k[x_0, \dots, x_N]_d$ est remplacé par $\text{Sym}^d V^*$. La fibre de $\varphi : F \rightarrow \mathbb{G}(1, \mathbb{P}V)$ au-dessus d'un point $[l] = [\mathbb{P}l]$ de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}V)$ est alors le noyau du morphisme naturel $\text{Sym}^d V^* \rightarrow \text{Sym}^d l^*$ ([DM98]).

Considérons le diagramme suivant, où $I = \{([l], x) \in F(X) \times X \mid x \in l\}$ est un sous-schéma de $F(X) \times_k X$:

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{pr_2} & X & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \\ \downarrow pr_1 & & & & \\ F(X) & \hookrightarrow & \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N) & & \end{array}$$

$I \rightarrow F(X)$ est un fibré en \mathbb{P}^1 . C'est une restriction du fibré standard sur la grassmannienne.

Définition 1.1.4. Soit $x \in X$. On définit $F(X, x)$ associée à X par $F(X, x) = pr_1 \circ pr_2^{-1}(x)$.

$F(X, x)$ a une structure naturelle de schéma et indexe les droites contenues dans X passant par x . C'est un sous-schéma de $F(X)$.

Remarque 1.1.5. Les droites passant par x dans \mathbb{P}^N (c'est-à-dire $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N; x)$) sont paramétrées par un hyperplan de \mathbb{P}^N , dont $F(X, x)$ est un sous-schéma.

On énonce un lemme utile sur les faisceaux localements libres de rang fini sur \mathbb{P}^1 .

Lemme 1.1.6. Tout faisceau localement libre de rang fini sur \mathbb{P}^1 est isomorphe à une somme directe de faisceaux inversibles (Donc, comme Pic $\mathbb{P}^1 = \mathbb{Z}$, à une somme directe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$, avec unicité des a_i). (exercice 2.6 p 384 de [Har83])

Démonstration. Soit E un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^1 . Montrons tout d'abord que si s est une section globale de E , qui n'est pas partout non nulle, cette section est multiple d'une section de $E(-1)$. Supposons que s s'annule en $x \in \mathbb{P}^1$, et notons que le degré du corps résiduel de x est nécessairement 1 (k est algébriquement clos). On considère f une section de $\mathcal{O}(1)$ s'annulant en x , qui correspond au polynôme irréductible définissant x . Alors s/f est une section globale de $E(-1)$.

On construit les $\mathcal{O}(-n)$ cherchés par récurrence sur n . Soit n fixé, et supposons que l'on a des sections globales s_i de $E(n_i)$, pour $n_i < n$ telles que les $\mathcal{O}(-n_i).s_i$ soient en somme directe dans E (comme sous-faisceaux) que l'on notera F , et que $H^0(\mathbb{P}^1, F(m)) = H^0(\mathbb{P}^1, E(m))$ pour tout $m < n$. On choisit des sections globales t_j de $E(n)$ qui engendrent un supplémentaire de $H^0(\mathbb{P}^1, F(n))$ dans $H^0(\mathbb{P}^1, E(n))$. Montrons que les $\mathcal{O}(-n_i).s_i$ et les $\mathcal{O}(-n).t_j$ sont en somme directe dans E , c'est-à-dire que les $(t_j)_x$ sont linéairement indépendants dans E_x/F_x pour tout x . Supposons le contraire : on a alors une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls t des t_j et une section s de $F(n)$ tels que $t - s = 0$ en x . Donc d'après ci-dessus $t - s = f.r$ où r appartient à $H^0(\mathbb{P}^1, E(n-1)) = H^0(\mathbb{P}^1, F(n-1))$. Donc $t = s + f.r$ est dans $H^0(\mathbb{P}^1, F(n-1))$ ce qui contredit la définition des t_j . \square

Soit l une droite sur X , telle que X soit lisse le long de l ($N_{l/X}$ est alors localement libre). On a alors, par le lemme précédent, la décomposition suivante :

$$N_{l/X} = \mathcal{O}_l(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_l(a_n) \quad \text{avec } a_1 \geq \dots \geq a_n$$

Définition 1.1.7. l est dite libre si $a_n \geq 0$, c'est-à-dire si $N_{l/X}$ est engendré par ses sections globales.

Remarque 1.1.8. Si $a_n \geq -1$, le schéma $F(X)$ est lisse en $[l]$ par le corollaire 1.2.6

Remarque 1.1.9. Si f est libre, on a $K_X.l = -\sum a_i \leq -2$, donc K_X n'est pas nef.

1.2 Propriétés de $F(X)$

Étudions dans un premier temps $F(X)$. Nous allons faire des calculs explicites de vecteurs tangents dans des coordonnées. On notera dans la suite E le k -espace vectoriel $k[x_0, \dots, x_N]_d$.

Calculons tout d'abord le rang de $d\psi$ en un point $([l], h_0)$ de F . On peut choisir des coordonnées telles que l soit la droite engendrée par $(1, 0, \dots, 0)$ et $(0, 1, 0, \dots, 0)$, et on notera \bar{l} le plan de k^{N+1} correspondant dans $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$. Les calculs dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$ et $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$ étant équivalents, on va se placer au-dessus de $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$. Tout plan \bar{l} de k^{N+1} contenu dans un voisinage suffisamment petit U de $[\bar{l}]$ dans $\mathbb{G}(2, k^{N+1})$ est engendré par deux points (uniques) $(1, 0, u_2, \dots, u_N)$ et $(0, 1, v_2, \dots, v_N)$. On peut donc utiliser $(u_2, \dots, u_N, v_2, \dots, v_N)$ comme coordonnées locales dans U .

Remarque 1.2.1. Sur cet ouvert on connaît les équations explicites qui définissent $F(X)$ dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$. En effet la droite $\{(1, t, u_2 + tv_2, \dots, u_N + tv_N) | t \in k\}$ est contenue dans X si et seulement si $G((1, t, u + tv)) = 0$ pour tout t . Ce qui nous donne en développant au plus $d+1$ équations explicites, et donc en particulier que $F(X)$ est de dimension au moins $2N - d - 3$.

Une base de l'espace tangent $T_{[\bar{l}]} \mathbb{G}(2, k^{N+1})$ nous est donnée par les dérivées partielles par rapport à ces indéterminées, restreintes à \bar{l} :

$$\frac{\partial}{\partial u_2 |_{\bar{l}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_N |_{\bar{l}}}, \frac{\partial}{\partial v_2 |_{\bar{l}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_N |_{\bar{l}}}$$

et les coordonnées d'un vecteur tangent en \bar{l} dans cette bases seront notées $(U_2, \dots, U_N, V_2, \dots, V_N)$. Les éléments de E sont des polynômes de la forme (avec des multi-indices) : $h = \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} x^{\mathbf{k}}$. On choisit les $x^{\mathbf{k}}$ pour base de E , et les $\partial/\partial a_{\mathbf{k}}$ sur $T_h E$. Les coordonnées d'un vecteur tangent en h_0 dans cette base seront notées $A_{\mathbf{k}}$, ce qui nous donne une identification entre E et $T_h E$. Le vecteur correspondant à h sera noté H .

Proposition 1.2.2. L'espace tangent $T_{([\bar{l}], h_0)}(F)$ est l'espace :

$$\left\{ (U_2, \dots, U_N, V_2, \dots, V_N, H) \in T_{[\bar{l}]}(\mathbb{G}(2, k^{N+1})) \times T_{h_0} E \mid \sum_{i=2}^N \frac{\partial h_0}{\partial x_i} \Big|_{\bar{l}} (U_i x_0 + V_i x_1) + h_0 \Big|_{\bar{l}} = 0 \right\}$$

Démonstration. Un point $(u_2, \dots, u_N, v_2, \dots, v_N, h) \in U \times E$ appartient à F si et seulement si on a $h(\lambda(1, 0, u_2, \dots, u_N) + \mu(0, 1, v_2, \dots, v_N)) = 0$ pour tout couple (λ, μ) dans k . Donc un vecteur tangent

$$(U_2, \dots, U_N, V_2, \dots, V_N, H) \in T_{([\bar{l}], h_0)}(\mathbb{G}(2, k^{N+1}) \times E)$$

sera tangent si et seulement si pour tout couple (λ, μ) dans k

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=2}^N \left(U_i \frac{\partial}{\partial u_i} + V_i \frac{\partial}{\partial v_i} \right) h_0(\lambda(1, 0, u_2, \dots, u_N) + \mu(0, 1, v_2, \dots, v_N)) \\ &\quad + \sum_{|\mathbf{k}|=d} A_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial a_{\mathbf{k}}} h_0(\lambda(1, 0, u_2, \dots, u_N) + \mu(0, 1, v_2, \dots, v_N)) \\ &= \sum_{i=2}^N \frac{\partial h_0}{\partial x_i} (\lambda(1, 0, u_2, \dots, u_N) + \mu(0, 1, v_2, \dots, v_N)) (U_i \lambda + V_i \mu) \\ &\quad + \sum_{|\mathbf{k}|=d} A_{\mathbf{k}} \lambda^{k_0} \mu^{k_1} (\lambda u_2 + \mu v_2)^{k_2} \dots (\lambda u_N + \mu v_N)^{k_N} \end{aligned}$$

Au point $([\bar{l}], h_0)$ on a de plus que $u_i = 0$ et $v_i = 0$ pour $i \geq 2$. Donc on trouve comme condition nécessaire et suffisante pour que $(U_2, \dots, U_N, V_2, \dots, V_N, H)$ soit tangent à F en $([\bar{l}], h_0)$:

$$\sum_{i=2}^N \frac{\partial h_0}{\partial x_i} (\lambda, \mu, 0, \dots, 0) (U_i \lambda + V_i \mu) + \sum_{k_0+k_1=d} A_{k_0, k_1, 0, \dots, 0} \lambda^{k_0} \mu^{k_1} = 0$$

pour tout (λ, μ) dans k . Ce qui est la formule de la proposition. □

Comme l'application $d\psi$ envoie $(U_2, \dots, U_N, V_2, \dots, V_N, H)$ sur H , nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.3. Le rang de $d\psi : T_{([\bar{l}], h_0)}(F) \rightarrow T_{h_0}(E)$ est égal à la dimension de l'espace des polynômes en x_0, x_1 de degré d qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=2}^N \frac{\partial h_0}{\partial x_i} (x_0, x_1, 0, \dots, 0) (U_i x_0 + V_i x_1)$$

avec $(U_2, \dots, U_N, V_2, \dots, V_N)$ arbitraires dans k .

On remarque que $H^0(l, \mathcal{O}_l(1))$ est l'espace des polynômes homogènes de degré 1 sur \bar{l} , et $H^0(l, \mathcal{O}_l(d))$ l'espace des polynômes homogènes de degré d sur \bar{l} (donc $\simeq T_{h_0}(E)$). Le corollaire implique en particulier :

Proposition 1.2.4. La différentielle $d\psi$ en un point (\bar{l}, h_0) de F est surjective si et seulement si le morphisme

$$\beta : \bigoplus_2^N H^0(l, \mathcal{O}_l(1)) \rightarrow H^0(l, \mathcal{O}_l(d))$$

défini par

$$(s_2, \dots, s_N) \rightarrow \sum_{i=2}^N \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(x_0, x_1, 0, \dots, 0) s_i$$

est surjectif.

Démonstration. On se contente de remarquer que lorsque $(U_2, \dots, U_N, V_2, \dots, V_N)$ parcourt k^{2N-2} , le polynôme $s_i = U_i x_0 + V_i x_1$ parcourt $k[x_0, x_1]_1 \simeq H^0(l, \mathcal{O}_l(1))$ en entier, c'est-à-dire qu'on oublie (partiellement) le choix d'une base de $H^0(l, \mathcal{O}_l(1))$ qui avait été fait. \square

Le morphisme que l'on vient d'obtenir provient en fait naturellement de suites exactes sur les fibrés normaux. Nous pourrions alors en donner une interprétation sans choisir de coordonnées.

Proposition 1.2.5. On suppose que X est lisse le long de la droite $l \subset X$. Alors

$$\begin{aligned} N_{l/\mathbb{P}^N} &\simeq \bigoplus_2^N \mathcal{O}_l(1) \\ (N_{X/\mathbb{P}^N})|_l &\simeq \bigoplus_{N-2} \mathcal{O}_l(d) \\ N_{l/X} &\simeq \bigoplus_{i=1} \mathcal{O}_l(a_i) \end{aligned}$$

avec $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{N-2}$. De plus, le morphisme β de la proposition 1.2.4 est l'application $H^0(\alpha) : H^0(l, N_{l/\mathbb{P}^N}) \rightarrow H^0(l, (N_{X/\mathbb{P}^N})|_l)$ induite par la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow N_{l/X} \rightarrow N_{l/\mathbb{P}^N} \xrightarrow{\alpha} (N_{X/\mathbb{P}^N})|_l \rightarrow 0$$

Démonstration. Si on note X' l'ensemble des points singuliers de X , on a alors le diagramme suivant (les faisceaux sont sur $X - X'$, qui est non vide car X est supposée réduite), où l'étude de α' nous donnera le résultat :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathcal{O}_X & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathcal{O}_X(1)^{N+1} & & & & \\ & & \downarrow & \searrow \alpha' & & & \\ 0 & \longrightarrow & T_X & \longrightarrow & (T_{\mathbb{P}^N})|_X & \longrightarrow & N_{X/\mathbb{P}^N} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

En effet, on a la suite exacte classique des fibrés tangents et normaux (sur $X - X'$ qui est un sous-schéma (pas forcément fermé) lisse irréductible de la variété lisse \mathbb{P}^N au-dessus de k) : $0 \rightarrow T_X \rightarrow$

$T_{\mathbb{P}^N} \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow N_{X/\mathbb{P}^N} \rightarrow 0$ ([Har83] page 182). La suite exacte verticale est obtenue en passant au dual et en se restreignant à $X - X'$ dans la suite exacte $0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{N+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \rightarrow 0$ ([Har83] théorème 8.13 page 176) car \mathbb{P}^N est lisse.

Étudions α' dans des coordonnées. Pour un $s \in X - X'$ fixé, posons t un générateur de $\mathcal{O}_{s,X}(1)$. Le noyau de α' en s est alors l'ensemble des $(U_0 t, \dots, U_N t)$ de $\mathcal{O}_{s,X}(1)^{N+1}$ tels que (U_0, \dots, U_N) soit tangent à X , c'est-à-dire tels que $\sum_{i=0}^N U_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$. Donc le noyau de l'application de $\mathcal{O}_X(1)^{N+1}$ dans $\mathcal{O}_X(d)$ définie par :

$$(U_0 t, \dots, U_N t) \rightarrow \sum_{i=0}^N U_i \frac{\partial G}{\partial x_i} t$$

coïncide avec le noyau de α' . On peut donc trouver une identification entre N_{X/\mathbb{P}^N} et $\mathcal{O}_X(d)$ tel que les deux applications coïncident. La fin de la preuve est donc la conséquence de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (T_{\mathbb{P}^N})|_l & \longrightarrow & N_{l/\mathbb{P}^N} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & (N_{X/\mathbb{P}^N})|_l \end{array}$$

La décomposition de $N_{l/X}$ provient du lemme 1.1.6, et l'inégalité sur les degrés des a_i de la suite exacte, en tensorisant par $\mathcal{O}_l(-2)$, puis en passant aux sections globales. \square

Corollaire 1.2.6. Soit l comme précédemment. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l correspond à un point régulier de $F(X)$ (c'est-à-dire F et $\psi^{-1}(G)$ se coupent transversalement).
2. l'application $N_{l/\mathbb{P}^N} \rightarrow (N_{X/\mathbb{P}^N})|_l$ induit une application surjective sur les sections globales.
3. $H^1(l, N_{l/X}) = 0$

Démonstration. l'équivalence entre 1 et 2 est la version sans coordonnée de la proposition 1.2.4. La longue suite exacte de cohomologie nous donne l'équivalence entre 2 et 3. \square

Proposition 1.2.7.

$$T_{|l} F(X) \simeq H^0(l, N_{l/X})$$

La suite exacte de la proposition 1.2.5, après tensorisation par $\mathcal{O}_l(-1)$, s'écrit :

$$0 \rightarrow N_{l/X}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_l^{N-1} \xrightarrow{\alpha \otimes \mathcal{O}_l(-1)} \mathcal{O}_l(d-1) \rightarrow 0$$

Donc en passant aux sections globales on obtient une application :

$$\gamma : \begin{cases} k^{N-1} & \rightarrow H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \\ (\lambda_2, \dots, \lambda_N) & \mapsto \sum_{j=2}^N \lambda_j \left(\frac{\partial G}{\partial x_j} \right)|_l \end{cases}$$

On a supposé jusqu'ici que l était la droite d'équation $x_2 = \dots = x_N = 0$, et fixé les coordonnées en conséquence. Lorsque les coordonnées sont déjà fixées (ce qui est le cas par exemple pour l'hypersurface

de Fermat étudiée dans la deuxième partie), il peut être plus intéressant de considérer l'application γ' suivante (où l'on impose aucune condition sur les coordonnées), qui a même image que γ :

$$\gamma' : \begin{cases} k^{N+1} & \rightarrow H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_N) & \mapsto \sum_{j=0}^N \lambda_j \left(\frac{\partial G}{\partial x_j} \right) \Big|_l \end{cases}$$

Proposition 1.2.8. Les applications γ' et γ ont pour conoyau $H^1(l, N_{l/X}(-1))$.

Démonstration. La longue suite exacte de cohomologie s'écrit :

$$0 \rightarrow H^0(l, N_{l/X}(-1)) \rightarrow H^0(l, \mathcal{O}_l)^{N-1} \xrightarrow{\gamma} H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \rightarrow H^1(l, N_{l/X}(-1)) \rightarrow H^1(l, \mathcal{O}_l)$$

Or $H^1(l, \mathcal{O}_l) = 0$, ce qui nous donne le résultat. \square

1.3 Propriétés de $F(X, x)$

Étudions de même $F(X, x)$.

Remarque 1.3.1. On a des équations explicites relativement simples définissant $F(X, x)$ dans H , où H est un hyperplan fixé de \mathbb{P}^N ne contenant pas x (on peut supposer que H est un hyperplan de coordonnée, par exemple $(x_N = 0)$).

En effet $F(X, x)$, comme sous-schéma de H , est défini par $F(X, x) = \{y \in H \mid y \in H \text{ et } (x, y) \subset X\}$. Donc un y de H appartient à $F(X, x)$ si et seulement si $G(x + ty) = 0$ pour tout t , c'est-à-dire si et seulement si $G_i(y) = 0$ où

$$G_i(y) = \sum_{|\beta|=i} \left(\sum_{|\alpha|=d \text{ et } \alpha \geq \beta} a_\alpha C_\alpha^\beta x^{\alpha-\beta} \right) \quad i = 1, \dots, d$$

En effet G_0 correspond à $x \in X$ ce qui est vrai par définition de x .

La proposition suivante permet de relier la dimension de $F(X)$ à celle de $F(X, x)$:

Proposition 1.3.2.

$$\dim F(X) \leq \dim F(X, x) + N - 2$$

L'égalité est atteinte pour x général.

Démonstration. On utilise les résultats de [Har83] ex 3.22 p. 95. L'application surjective $I \rightarrow X$ a pour fibres les $F(X, x)$ par définition. Donc $\dim I \leq \dim F(X, x) + \dim X = \dim F(X, x) + N - 1$, et l'égalité est atteinte pour x général. Le morphisme (surjectif aussi) $I \rightarrow F(X)$ a pour fibre \mathbb{P}^1 , donc $\dim F(X) = \dim I - 1$. D'où $\dim F(X) \leq \dim F(X, x) + N - 2$, et l'égalité est atteinte pour x général. \square

Proposition 1.3.3.

$$T_{[l]} F(X, x) \simeq H^0(l, N_{l/X}(-1))$$

Démonstration. On suit la même démarche qu'au paragraphe 1.2. On obtient alors que le rang de $d\psi^{(x)}$ est égal à la dimension de l'espace des polynômes en x_0, x_1 de degré d qui peuvent s'écrire sous la forme

$$x_1 \sum_{i=2}^N \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(x_0, x_1, 0, \dots, 0) V_i$$

avec (V_2, \dots, V_N) arbitraires dans k . C'est-à-dire la dimension de l'espace des polynômes en x_0, x_1 de degré $d - 1$ qui peuvent s'écrire sous la forme : $\sum_{i=2}^N \frac{\partial h_0}{\partial x_i}(x_0, x_1, 0, \dots, 0)V_i$. On remarque de même que $H^0(l, \mathcal{O}_l(d - 1))$ est l'espace des polynômes homogènes de degré $d - 1$ sur \bar{l} . On continue de même. \square

2 Hypersurfaces de Fermat

Définition 2.0.4. L'hypersurface de Fermat X_N^d est l'hypersurface de \mathbb{P}^N définie par l'équation

$$x_0^d + \dots + x_N^d = 0$$

On étudie le schéma $F(X_N^d)$.

La détermination des droites contenues dans une hypersurface de Fermat de degré plus grand que N dans \mathbb{P}^N pour $N = 3$ et 4 se trouve dans [AS91]. Le fait que la variété des droites contenue dans une quartique de Fermat de dimension 3 est de dimension 2 en caractéristique 3 se trouve dans [Col79].

Proposition 2.0.5. L'hypersurface X_N^d est lisse si et seulement si la caractéristique de k est 0 ou ne divise pas d .

On supposera désormais ces hypothèses vérifiées. De plus on suppose que l'on a toujours $N \leq d$, (sauf à la proposition 2.1.5). Dans le cas contraire on connaît la dimension de $F(X_N^d)$ par la proposition 2.1.5.

2.1 Généralités

2.1.1 Description ensembliste

Définition 2.1.1 (droites standard). Soit I_1, \dots, I_r une partition de $\{0, \dots, N\}$, où I_j contient au moins deux éléments pour chaque j .

Soit $x \in \mathbb{P}^N$ tel que $\sum_{i \in I_j} x_i^d = 0$ pour tout j (on a $x \in X_N^d$). On note x_{I_j} l'élément de \mathbb{P}^N qui vaut x_i en i si i appartient à I_j et 0 sinon.

On appelle *droite standard* de X_N^d une droite contenue dans $\{(\lambda_1 x_{I_1} + \dots + \lambda_r x_{I_r}) \mid \lambda \in \mathbb{P}^{r-1}\}$.

Remarque 2.1.2. Pour chaque $x \in \prod_{j=1}^r X_{\text{Card } I_{j-1}}^d$, on a donc un sous-espace projectif de dimension $r - 1$ $\{(\lambda_1 x_{I_1} + \dots + \lambda_r x_{I_r}) \mid \lambda \in \mathbb{P}^{r-1}\}$ inclus dans X_N^d .

Proposition 2.1.3. Les droites standard forment une famille de droites de X_N^d de dimension pure $N - 3$.

Démonstration. Pour chaque $x \in \prod_{j=1}^r X_{\text{Card } I_{j-1}}^d$, le sous-espace $\{(\lambda_1 x_{I_1} + \dots + \lambda_r x_{I_r}) \mid \lambda \in \mathbb{P}^{r-1}\}$ de dimension $r - 1$ inclus dans X_N^d contient une famille de dimension $2r - 4$ de droites (c'est $G(1, \mathbb{P}^{r-1})$). Or $\dim(\prod_{j=1}^r X_{\text{Card } I_{j-1}}^d) = \sum_{j=1}^r (\text{Card } I_j) - 2 = N + 1 - 2r$. Les droites standard de X_N^d forment donc une famille de droites de dimension $N + 1 - 2r + 2r - 4 = N - 3$. \square

Proposition 2.1.4. Si k est de caractéristique nulle ou strictement plus grande que d , et $d \geq N$, toutes les droites sont standard (pour $N \geq 2$).

Démonstration.

On démontre le résultat par récurrence sur N :

– Dans le cas $N = 2$, le schéma X_2^d est une courbe qui n'est pas une droite ($d \geq 2$), donc ne contient aucune droite. En particulier, elles sont toutes standard.

– $N - 1 \Rightarrow N$

On suppose $l \subset X_N^d$ mais l non inclus dans un hyperplan de coordonnées (sinon $l \subset X_{N-1}^d$, et on a le résultat). Donc on a $l \cap (x_i = 0)$ réduit à un point.

Supposons que l contienne un point avec 2 coordonnées nulles, par exemple le point $(a_0, \dots, a_{N-2}, 0, 0)$. Comme $l \not\subseteq (x_N = 0)$, on peut trouver un point de l de la forme $(b_0, \dots, b_{N-1}, 1)$. On considère alors la droite l' contenue dans X_{N-1}^d passant par les points $(a_0, \dots, a_{N-2}, 0)$ et $(b_0, \dots, b_{N-2}, \omega)$, où ω est une racine d -ième de $b_{N-1}^d + 1$. On applique l'hypothèse de récurrence à l' : elle est nécessairement standard, c'est-à-dire de la forme $\{((\lambda_1 + t\mu_1)x_{I_1} + \dots + (\lambda_r + t\mu_r)x_{I_r}) \mid t \in k\}$ pour λ et μ fixés dans \mathbb{P}^{r-1} . On peut supposer que $N-1$ appartient à I_r . Donc $\lambda_r = 0$. Il suffit donc de construire μ'_r et x'_{I_r} qui conviennent pour l . On note x'_{N-1} une racine d -ième de $x_{N-1}^d - \mu_r^{-d}$, et on pose $x'_N = 1/\mu_r$ et $x'_i = x_i$ sinon. Ce qui nous donne le résultat pour l . Sinon, on note :

$$A = (0, 1, a_2, \dots, a_N) \in l$$

$$B = (1, 0, b_2, \dots, b_N) \in l$$

deux point de l . Comme l est contenue dans X_N^d , le point $(t, 1, a_2 + tb_2, \dots, a_N + tb_N)$ est dans X_N^d pour tout t dans k . Comme $C_n^k \neq 0$ (car $d < p$ ou $p = 0$), on obtient le système suivant en développant l'équation obtenue :

$$\begin{aligned} 1 + a_2^d + \dots + a_N^d &= 0 \\ b_2 a_2^{d-1} + \dots + b_N a_N^{d-1} &= 0 \\ &\dots \\ a_2 b_2^{d-1} + \dots + a_N b_N^{d-1} &= 0 \\ 1 + b_2^d + \dots + b_N^d &= 0 \end{aligned}$$

On peut supposer que tous les a_i et tous les b_i sont non nuls, de même pour tous les $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$.

En effet si $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0$ pour un couple i, j , on peut remplacer B par un $A + tB$ où deux coordonnées sont nulles, ce qui nous donne le résultat.

Sinon, en prenant les $N-1$ premières équations parmi les $d-1$ équations centrales dans le système précédent ($d \geq N$), on a :

$$\begin{pmatrix} b_2/a_2 & \dots & b_N/a_N \\ \dots & \dots & \dots \\ (b_2/a_2)^{N-1} & \dots & (b_N/a_N)^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^d \\ \dots \\ a_N^d \end{pmatrix} = 0$$

Donc le déterminant de cette équation, $\prod(b_i/a_i)\prod_{i < j}(b_i/a_i - b_j/a_j)$, est nul, ce qui est absurde. Donc l est nécessairement standard. □

Proposition 2.1.5. Si $N \geq d$, on a $\dim F(X_N^d) = 2N - 3 - d$.

Remarque 2.1.6. Donc, dans le cas $N > d$, il y a des droites non standard.

Démonstration. Dans le cas $N = d$, on a $\dim F(X_N^d) = N - 3$ par la proposition précédente.

Si $N > d$, on coupe X_N^d par un hyperplan H de coordonnée (de sorte que $X_N^d \cap H$ est une hypersurface de Fermat de H). On a alors $F(X_N^d \cap H) = F(X_N^d) \cap F(H)$ comme sous-schémas de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$.

Or $F(H) \simeq \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^{N-1})$, donc est de dimension $2N - 4$, c'est-à-dire de codimension 2 dans $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$.

Comme $F(H)$ est lisse et donc localement intersection complète, $\dim F(X_N^d) \leq \dim F(X_{N-1}^d) + 2$. Par récurrence on obtient donc $\dim F(X_N^d) \leq 2N - d - 3$.

Par la remarque 1.2.1, on sait que $\dim F(X_N^d) \geq 2N - d - 3$. D'où l'égalité. □

2.1.2 Étude de N_{l/X_N^d}

Proposition 2.1.7. Soit l une droite standard de X_N^d qui est générique dans son \mathbb{P}^{r-1} . On a :

$$\begin{aligned} h^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) &= N - r - 1 \\ h^0(l, N_{l/X_N^d}) &= 2(N - r - 1) \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{L} = N_{l/X_N^d}(-1)$

Par la suite exacte de la proposition 1.2.5, on a $\deg \mathcal{L} = 1 - d$, et $\text{rg}(\mathcal{L}) = N - 2$. Donc Riemann-Roch nous donne : $h^0(l, \mathcal{L}) = h^1(l, \mathcal{L}) - d + N - 1$. De plus, par la proposition 1.2.8, on a $h^1(l, \mathcal{L}) = \dim(\text{coker } \gamma')$, où :

$$\gamma' : \begin{cases} k^{N+1} & \rightarrow H^0(l, \mathcal{O}_l(d-1)) \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_N) & \mapsto d \sum_{j=0}^N \lambda_j (x_j^{d-1})|_l \end{cases}$$

Calcul de $\dim(\text{coker } \gamma')$:

l est une droite standard de \mathbb{P}^N contenue dans X_N^d , générique dans \mathbb{P}^{r-1} (où I_1, \dots, I_r est une partition de $\{0, \dots, N\}$). Elle a pour équation $\{(ty_1 + uz_1)x_{I_1}, \dots, (ty_r + uz_r)x_{I_r} \mid t, u \in k\}$, où x_{I_j} est dans $X_{\text{Card } I_j}^d$, et y, z appartiennent à \mathbb{P}^{r-1} et sont généraux, donc en particulier on peut supposer les z_j tous non nuls. Calculons $\gamma'(\lambda_0, \dots, \lambda_N)$.

$$\begin{aligned} \gamma'(\lambda_0, \dots, \lambda_N) &= d \sum_{j=1}^r \sum_{i \in I_j} \lambda_i (ty_j + uz_j)^{d-1} x_i^{d-1} \\ &= d \sum_{j=1}^r \sum_{v=0}^{d-1} C_v^{d-1} t^v y_j^v u^{d-1-v} z_j^{d-1-v} \sum_{i \in I_j} \lambda_i x_i^{d-1} \\ &= d \sum_{v=0}^{d-1} \left(\sum_{j=1}^r \left(\frac{y_j}{z_j} \right)^v \sum_{i \in I_j} \lambda_i x_i^{d-1} z_j^{d-1} \right) C_v^{d-1} t^v u^{d-1-v} \end{aligned}$$

Donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \ker \gamma'$ s'écrit, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{y_1}{z_1} & \dots & \frac{y_1}{z_1} & \frac{y_2}{z_2} & \dots & \frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} & \frac{y_r}{z_r} & \dots & \frac{y_r}{z_r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^v & \dots & \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^v & \left(\frac{y_2}{z_2}\right)^v & \dots & \left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}\right)^v & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^v & \dots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^v \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \dots & \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \left(\frac{y_2}{z_2}\right)^{d-1} & \dots & \left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}\right)^{d-1} & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1} & \dots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 x_0^{d-1} z_1^{d-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_N x_N^{d-1} z_r^{d-1} \end{pmatrix} = 0$$

Si on note A la matrice obtenue, son rang est le même que celui de la matrice de Vandermonde associée, c'est-à-dire $\min(r, d)$, qui est r ici (l étant générique, on peut supposer les (y_j/z_j) tous distincts). D'où $\dim(\ker \gamma') = d - r$.

Soit $\mathcal{L} = N_{l/X_N^d}$

La suite exacte de la proposition 1.2.5 nous donne comme précédemment $\deg \mathcal{L} = N - 1 - d$ et $\text{rg } \mathcal{L} = N - 1 - 1 = N - 2$. Donc Riemann-Roch s'écrit $h^0(l, \mathcal{L}) - h^1(l, \mathcal{L}) = 2N - d - 3$.

Soit $\beta' : H^0(\mathcal{O}_l(1))^{N+1} \rightarrow H^0(\mathcal{O}_l(d))$ obtenu à partir de β de la même façon que γ' à partir de γ . Par un raisonnement identique à celui tenu pour γ' , on a $h^1(l, \mathcal{L}) = \dim(\text{coker } \beta')$. D'où $h^0(l, \mathcal{L}) = 2N - 2 - \text{rg } \beta'$. Dans des coordonnées $\beta'(l_0, \dots, l_N)$ (où $l_i = \lambda_i t + \mu_i u$) s'écrit :

$$\begin{aligned} \beta'(\lambda_0, \dots, \lambda_N, \mu_0, \dots, \mu_N) &= \sum_{i=0}^N (\lambda_i t + \mu_i u)(x_i^d)|_l \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{i \in I_j} \mu_i x_i^{d-1} z_j^{d-1} u^d \\ &\quad + \sum_{v=1}^{d-1} \left(\sum_{j=1}^r \left(\frac{y_j}{z_j} \right)^v \sum_{i \in I_j} \mu_i x_i^{d-1} z_j^{d-1} \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{j=1}^r \frac{v}{d-v} \left(\frac{y_j}{z_j} \right)^{v-1} \sum_{i \in I_j} \lambda_i x_i^{d-1} z_j^{d-1} \right) C_v^{d-1} t^v u^{d-v} \\ &\quad + \sum_{j=1}^r \sum_{i \in I_j} \mu_i x_i^{d-1} y_j^{d-1} t^d \end{aligned}$$

Donc calculer le rang de β' correspond à calculer le rang de la matrice $(d+1) \times (2r)$ suivante (après simplifications) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{y_1}{z_1} & \dots & \frac{y_r}{z_r} & \frac{1}{d-1} & \dots & \frac{1}{d-1} \\ \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2 & \dots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^2 & \frac{2}{d-2} \frac{y_1}{z_1} & \dots & \frac{2}{d-2} \frac{y_r}{z_r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^v & \dots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^v & \frac{v}{d-v} \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{v-1} & \dots & \frac{v}{d-v} \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{v-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \dots & \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1} & \frac{d-2}{2} \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-2} & \dots & \frac{d-2}{2} \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-2} \\ 0 & \dots & 0 & (d-1) \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^{d-1} & \dots & (d-1) \left(\frac{y_r}{z_r}\right)^{d-1} \end{pmatrix}$$

qui est $\min(d+1, 2r)$. Montrons donc que cette matrice définit une injection. On va montrer que le déterminant d'un mineur (carré de taille maximale) bien choisi est un polynôme non trivial en les $X_i = y_i/z_i$, et comme tout polynôme non nul est génériquement non nul, on aura le résultat. Cherchons le coefficient de $X_1^{2d-2} X_2^{2d-6} X_3^{2d-10} \dots$ (on arrête le produit quand on est à court d'exposants ou à court d'indices). Ce coefficient sera non nul parce que X_1^{2d-2} ne peut venir que des deux dernières lignes, colonnes 1 et $r+1$; puis X_2^{2d-6} vient des deux lignes précédentes, etc. On parcourt deux "droites de pente 2" dans la matrice. Comme la hauteur $(d+1)$ est supérieure à la largeur $(2r \leq N)$, il n'y a pas de problème. \square

Remarque 2.1.8. En reprenant la preuve ci-dessus on constate que l'on a plus généralement $h^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) = N - \min(r, d) - 1$ et $h^0(l, N_{l/X_N^d}) = 2N - \min(d+1, 2r) - 2$.

Remarque 2.1.9. On a plus généralement, pour $-1 \leq n \leq d/2 - 1$: $h^0(l, N_{l/X_N^d}(n)) = (n+2)(N-r-1)$.

Proposition 2.1.10. Soit l une droite standard de X_N^d qui est générique dans son \mathbb{P}^{r-1} .

On a, pour $r = 2$:

$$N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2-d)$$

et pour $r = 3$:

$$N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-4} \oplus \mathcal{O}_l(1 - \frac{d}{2}) \oplus \mathcal{O}_l(2 - \frac{d}{2})$$

si d est pair,

$$N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-4} \oplus \mathcal{O}_l(1 - \frac{d-1}{2})^2$$

si d est impair.

Démonstration.

1. Cas $r = 2$

Par la proposition 1.2.5 on a la décomposition suivante de N_{l/X_N^d} :

$$N_{l/X_N^d} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_l(a_i) \quad \text{avec} \quad 1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{N-2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} H^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) &= \bigoplus_{i=1}^{N-2} H^0(l, \mathcal{O}_l(a_i - 1)) \\ &= \bigoplus_{\{i|a_i=1\}} H^0(l, \mathcal{O}_l(a_i - 1)) \\ &= \bigoplus_{\{i|a_i=1\}} k \end{aligned}$$

Or $h^0(l, N_{l/X_N^d}(-1)) = N - r - 1 = N - 3$, d'où $(a_1, \dots, a_{N-2}) = (1, \dots, 1, a)$.

De plus

$$\begin{aligned} \deg(N_{l/X_N^d}(-1)) &= N - 1 - d \quad (\text{par la suite exacte}) \\ &= N - 3 + a \end{aligned}$$

d'où $a = 2 - d$. Donc $N_{l/X_N^d} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2-d)$

2. Cas $r = 3$

On part de la même décomposition $N_{l/X_N^d} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_l(a_i)$ avec $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{N-2}$, et on considère les sections globales après décalage, en appliquant la proposition précédente : $h^0(l, N_{l/X_N^d}) = N - 4$. Donc $(a_1, \dots, a_{N-2}) = (1, \dots, 1, a, b)$.

De même, l'étude des sections globales de $N_{l/X_N^d}(n)$, avec n partie entière de $\frac{d-1}{2} - 2$, impose a et b inférieurs à $-n - 1$. L'étude du degré de N_{l/X_N^d} donne $a + b = 3 - d$, d'où le résultat. \square

Proposition 2.1.11. On suppose $p = 0$ ou $p > d$.

Les seules composantes génériquement réduites de $F(X_N^d)$ correspondent alors au cas N impair et l standard définie à partir d'une partition en sous-ensembles à deux éléments. Il y en a autant que de $\mathbb{P}^{\frac{N+1}{2}}$, c'est-à-dire $N(N-2)\dots 3.1$.

Démonstration. Soit l une droite générique de X_N^d . On a $T_{[l]}F(X_N^d) \simeq H^0(l, N_{l/X_N^d})$ par la proposition 1.2.7. Or $\dim F(X_N^d) = N - 3$ par comptage des droites standard ($p > d$ ou $p = 0$ donc toutes les droites sont standard), et $\dim H^0(l, N_{l/X_N^d}) = 2(N - r - 1)$ (proposition précédente). Dire qu'il existe un point lisse est équivalent à dire qu'il existe un point lisse dans un ouvert dense arbitraire. Donc on peut supposer ce point l générique. Donc $F(X_N^d)$ lisse en $[l]$ si et seulement si $\dim F(X_N^d) = N - 3 = \dim T_{[l]}F(X_N^d) = 2(N - r - 1)$, c'est-à-dire $2r = N + 1$. Ce qui correspond aux partitions de $\{0, \dots, N\}$ en sous-ensembles à deux éléments. \square

2.2 $F(X_N^{p^r+1})$

On se place désormais en caractéristique $p > 0$, et on étudie $X_N^{p^r+1}$. Il y a alors des droites non standard, comme on le voit dans la proposition suivante. Cette étude nous donnera des informations sur $X_N^{p^r+1}$ pour $d|(p^r + 1)$, en particulier dans la partie 2.2.1.

Proposition 2.2.1. Pour $d = p^r + 1$, il y a exactement $d^3(d - 3)$ droites non standard et $3d^2$ droites standard sur X_3^d .

Démonstration. On suppose $l \subset X_3^d$. La droite l n'est pas incluse dans un hyperplan de coordonnées car X_2^d est une courbe qui n'est pas une droite ($d > 1$). Donc on a $l \cap (x_i = 0)$ réduit à un point. on note :

$$A = (0, 1, a_2, a_3) \in l$$

$$B = (1, 0, b_2, b_3) \in l$$

deux points de l . Comme l est contenue dans X_3^d , le point $(t, 1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3)$ est dans X_3^d pour tout t dans k . Comme $d = p^r + 1$, on obtient le système suivant en développant l'équation obtenue :

$$\begin{aligned} 1 + a_2^{p^r+1} + a_3^{p^r+1} &= 0 \\ a_2^{p^r} b_2 + a_3^{p^r} b_3 &= 0 \\ a_2 b_2^{p^r} + a_3 b_3^{p^r} &= 0 \\ 1 + b_2^{p^r+1} + b_3^{p^r+1} &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième équation est équivalente à $a_2^{p^{2r}} b_2^{p^r} + a_3^{p^{2r}} b_3^{p^r} = 0$. On a donc le système suivant :

$$\begin{pmatrix} a_2^{p^{2r}} & a_3^{p^{2r}} \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2^{p^r} \\ b_3^{p^r} \end{pmatrix} = 0$$

Si le déterminant de cette matrice est non nul, on a nécessairement $b_2 = b_3 = 0$, or $(1, 0, 0, 0)$ n'appartient pas à X_3^d . Donc :

$$a_3 a_2^{p^{2r}} = a_2 a_3^{p^{2r}}$$

Dans le cas où $a_2 a_3$ est nul, on obtient toutes les droites standard : si a_2 (respectivement a_3) est nul, alors b_3 (respectivement b_2) l'est aussi. Il y en a $3d^2$.

Dans le cas contraire, on a $a_2^{p^{2r}-1} = a_3^{p^{2r}-1}$ avec a_2 (et donc a_3) non nul. Donc $a_2 = \omega a_3$ où ω est une racine $p^{2r} - 1$ -ième de l'unité. Par symétrie des rôles joués par b_i et a_i dans le premier système, on trouve que l'on a de même $b_2 = \omega' b_3$. En remplaçant a_2 et b_2 dans ce même système on trouve le système suivant :

$$\begin{aligned} \omega' \omega^{p^r} &= -1 \\ \omega \omega'^{p^r} &= -1 \end{aligned}$$

On remarque que ces deux équations sont équivalentes, et que le choix d'un ω impose celui de ω' .

Les points A et B sont donc nécessairement de la forme :

$$(0, 1, \omega a, a)$$

$$(1, 0, -\frac{1}{\omega^{p^r}} b, b)$$

où ω est une racine $p^{2r} - 1$ -ième de l'unité. Et pour que l soit contenue dans X_3^d il faut et il suffit que A et B soit dans X_3^d .

Étudions juste le cas de A , celui de B étant symétrique. On doit donc avoir a solution de l'équation $1 + a^d + \omega^d a^d = 0$. C'est-à-dire $\omega^d \neq -1$ (pour qu'il y ait une solution) et $a^d = -1/(1 + \omega^d)$. Or, comme $\omega^{p^r+1} = -1$ implique $\omega^{p^{2r}-1} = 1$,

$$\text{Card} \left\{ \omega \in k \mid \omega^{p^{2r}-1} = 1 \text{ et } \omega^{p^r+1} \neq -1 \right\} = \text{Card} \left\{ \omega \in k \mid \omega^{p^{2r}-1} = 1 \right\} - \text{Card} \left\{ \omega \in k \mid \omega^{p^r+1} = -1 \right\}$$

$$= p^{2r} - p^r - 2$$

On a donc d choix possibles pour a , de même pour b , et $(d-1)^2 - d - 1$ choix pour ω , tout ces choix étant indépendants. Donc il y a $d^2((d-1)^2 - d - 1) = d^3(d-3)$ droites non standard sur X_3^d . \square

2.2.1 Unirationalité de X_N^d pour $d \mid p^r + 1$

C'est la généralisation d'un résultat donné dans [Shi95] pour certaines valeurs de N . On suit ici la démarche de [Deb01] (ex page 67).

Théorème 2.2.2. Si $N \geq 3$ et $d \mid (p^r + 1)$, l'hypersurface X_N^d est unirationnelle.

Pour démontrer ce théorème, on va construire une application rationnelle dominante explicite

$$\mathbb{A}_k^{N-1} \dashrightarrow X_N^{q+1}$$

où $q = p^r$.

Proposition 2.2.3. Si $N \geq 3$, l'hypersurface X_N^{q+1} est unirationnelle.

Démonstration. On pose donc ici $d = q + 1 = p^r + 1$. Soit ω une racine d -ième de -1 . Un calcul immédiat montre que l'hypersurface X_N^d contient la droite l passant par $(1, \omega, 0, \dots, 0)$ et $(0, 0, 1, \omega, 0, \dots, 0)$, d'équation $(t, t\omega, 1 - t, (1 - t)\omega, 0, \dots, 0)$.

Le pinceau d'hyperplans contenant la droite l d'équation $-t\omega x_0 + tx_1 - \omega x_2 + x_3 = 0$, indexés par $t \in k$, induit une application rationnelle $\pi : X_N^d \dashrightarrow \mathbb{A}_k^1$. Elle est définie sur l'ouvert $U = X_N^d - H$, où H est l'hyperplan $\{\omega X_0 - X_1\}$, par :

$$\pi : \left(\begin{array}{l} k[t] \rightarrow \mathcal{O}(U) \\ t \mapsto \frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0} \end{array} \right)$$

Ce qui fait de $k(X_N^d)$ une extension de $k(t)$.

Étudions la fibre générique de π au-dessus de $k(t^{1/q})$:

C'est $A = \mathcal{O}(U) \otimes_k k(t^{1/q})$, où $t = \frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0}$, et

$$\mathcal{O}(U) = (k[X_0, \dots, X_N] / (X_0^d + \dots + X_N^d)) \left[\frac{1}{X_1 - \omega X_0} \right]$$

c'est-à-dire

$$A = k[X_0, \dots, X_N] / (X_0^d + \dots + X_N^d) \left[\left(\frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0} \right)^{1/q} \right]$$

Simplifions l'équation $X_0^d + \dots + X_N^d = 0$, en utilisant le fait que $t = \frac{\omega X_2 - X_3}{X_1 - \omega X_0}$, et que l'on s'autorise à en prendre la racine q -ième :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^4 X_i^d &= X_0^d + X_1^d + X_2^d + (t\omega X_0 - tX_1 + \omega X_2)^d + \sum_{i \geq 4} X_i^d \\
&= X_0^d + X_1^d + t^{q+1}(\omega X_0 - X_1)^{q+1} + \omega X_2 t^q (\omega X_0 - X_1)^q + \omega^q X_2^q t (\omega X_0 - X_1) + \sum_{i \geq 4} X_i^d \\
&= -\omega^q X_0^q y_2 - \omega X_0 y_2^q + y_2^{q+1} + t^{q+1} y_2^{q+1} + \omega X_2 t^q y_2^q + \omega^q X_2^q t y_2 + \sum_{i \geq 4} X_i^d \\
&= \omega^q (X_2^q t - X_0^q) y_2 + \omega (X_2 t^q - X_0) y_2^q + (1 + t^{q+1}) y_2^{q+1} + \sum_{i \geq 4} X_i^d \\
&= y_1^q y_2 + y_3 y_2^q + \sum_{i \geq 4} y_i^d
\end{aligned}$$

Où l'on a effectué le changement de variable :

$$\begin{aligned}
y_1 &= X_2 t^{1/q} - X_0 \\
y_2 &= -X_1 + \omega X_0 \\
y_3 &= \omega (X_2 t^q - X_0) + (1 - t^{q+1})(\omega X_0 - X_1) \\
y_i &= X_i \text{ pour } i \geq 4.
\end{aligned}$$

Le cas $N = 3$ est un peu particulier. En effet y_2 se factorise dans l'équation de la fibre, c'est-à-dire que la fibre est en fait la réunion de la droite l et de la courbe d'équation $y_1^q + y_2^{q-1} y_3$. Ce qui nous donne :

$$\begin{array}{ccccc}
V' \times \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X_3^d \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow \pi & \\
\mathbb{A}_k^1 & \xrightarrow{q:1} & \mathbb{A}_k^1 & &
\end{array}$$

L'application $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2, -\frac{y_1^q}{y_2^{q-1}})$ montre que $V' = \text{Spec}(k[y_1, y_2, y_3]/(y_1^q + y_2^{q-1} y_3))$ est birationnel à \mathbb{A}_k^2 . D'où une application dominante $\mathbb{A}_k^3 \dashrightarrow X_3^d$: l'hypersurface X_3^d est unirationnelle.

Dans le cas où $N > 3$, on a de même, avec $U' = \text{Spec}(k[y_1, \dots, y_N]/(y_1^q y_2 + y_2^q y_3 + y_4^{q+1} + \dots + y_N^{q+1}))$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{A}_k^{N-1} & \dashrightarrow & U' & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X_N^d \\
& \searrow & \downarrow & & \downarrow & \searrow \pi & \\
& & \mathbb{A}_k^1 & \xrightarrow{q:1} & \mathbb{A}_k^1 & &
\end{array}$$

On vient donc de montrer que X_N^d est unirationnelle. □

On a en particulier démontré la proposition suivante :

Proposition 2.2.4. X_N^{q+1} a un revêtement purement inséparable de degré q qui est rationnel.

Démonstration.(du théorème) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $md = p^r + 1$. L'application $X_N^{q+1} \rightarrow X_N^d$ induite par $X_i \mapsto X_i^m$ permet de se ramener au cas de la proposition 2.2.3. □

2.2.2 Description de $F(X_N^{p^r+1})$

On va montrer que ce schéma est lisse de dimension $2N - 6$ (pour la connexité on peut regarder [Bea90]). Pour cela, nous allons étudier $F(X_N^{p^r+1}, x)$, dont on connaît explicitement les équations. On se

place en un point $x \in X_N^{p^r+1}$ fixé, et on peut supposer que $x_N = 1$. On considère désormais $F(X_N^{p^r+1}, x)$ comme un sous-schema de l'hyperplan $H = \{X_N = 0\} \simeq \mathbb{P}^{N-1}$ de \mathbb{P}^N .

Proposition 2.2.5. Le schéma $F(X_N^{p^r+1}, x)$ est de dimension $\geq N - 4$, mais il n'est nulle part réduit.

Démonstration. $F(X_N^{p^r+1}, x)$ est défini par les équations suivantes dans \mathbb{P}^{N-1} (d'après un calcul direct fait dans la première partie) :

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i^{p^r} y_i = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^{p^r} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{p^r+1} = 0$$

Donc ici $\dim F(X_N^{p^r+1}, x) \geq N - 1 - 3 = N - 4$.

D'autre part, l'espace tangent $T_{[l]}F(X, x)$ est isomorphe ici à k^{N-3} car le rang de la jacobienne est inférieur ou égal à 2, donc $\dim T_{[l]}F(X, x) > \dim F(X, x)$: le schéma $F(X, x)$ n'est nulle part réduit. \square

Corollaire 2.2.6. Pour $N \geq 4$, l'hypersurface $X_N^{p^r+1}$ est recouverte par des droites.

Corollaire 2.2.7. Le schéma $F(X_N^{p^r+1})$ est lisse de dimension $2N - 6$.

Démonstration. Par la proposition 1.3.2, le schéma $F(X_N^{p^r+1})$ est partout de dimension $\geq 2N - 6$.

Par la proposition 1.2.7, $T_{[l]}F(X_N^{p^r+1})$ est isomorphe à $H^0(l, N_{l/X_N^{p^r+1}})$. Or par la proposition 1.2.5, on a

$$\sum_{i=1}^{N-2} a_i = N - 1 - d$$

et $a_i \leq 1$. De plus, par la proposition précédente, on sait qu'il y a au moins $N - 3$ a_i égaux à 1. Donc $(a_1, \dots, a_{N-2}) = (1, \dots, 1, 2 - d)$ (et $2 - d < 0$). D'où $F(X_N^{p^r+1})$ est lisse de dimension $2N - 6$ et

$$N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2-d)$$

\square

Corollaire 2.2.8. Le schéma $F(X_N^{p^r+1}, x)$ est de dimension exactement $N - 4$ pour x général.

2.2.3 $X_N^{p^r+1}$ est recouverte par des droites pour $N \geq 4$

Dans toute cette partie, on a $N \geq 4$ (et $r \geq 1$).

Proposition 2.2.9. $X_N^{p^r+1}$ est unirégulé par des droites, mais aucune n'est libre.

Démonstration. Par la proposition précédente, $N_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l(1)^{N-3} \oplus \mathcal{O}_l(2-d)$, or $2-d < 0$, donc $X_N^{p^r+1}$ ne contient aucune courbe rationnelle libre. \square

3 Appendice

On peut calculer directement l'espace tangent à $F(X)$ en $[l]$ par le foncteur des points associé à $F(X)$. Le problème est alors de montrer que le foncteur que l'on considère et le foncteur des points associé au schéma défini à la première partie sont bien identiques, c'est-à-dire que la représentabilité du schéma de Hilbert. Pour plus de détails on pourra regarder [Kol96].

On peut considérer le foncteur des points associé à $F(X)$:

Proposition 3.0.10. Le foncteur des points associé à $F(X)$ est :

$$F(X) : \begin{array}{ccc} \{k\text{-schémas}\} & \rightarrow & \mathcal{E}ns \\ T & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-schémas de } X \times_k T \text{ plats sur } T \\ \text{et dont le polynôme de Hilbert des fibres est } t + 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

Calculons l'espace tangent à $F(X)$ en tant que foncteur : Si $\{l\}$ est un point de $F(X)(k)$, c'est la fibre $F = T_{[l]}F(X)$ de $F(X)(k[\varepsilon])$ (où $\varepsilon^2 = 0$) au-dessus de $\{l\}$:

$$\begin{array}{ccc} F(X)(k[\varepsilon]) & \longleftarrow \! \! \! \rightarrow & F \\ \downarrow F(X)(\varphi) & & \downarrow \\ F(X)(k) & \longleftarrow \! \! \! \rightarrow & \{l\} \end{array}$$

l est un sous-schéma fermé de X , donc \mathcal{O}_l est un quotient de \mathcal{O}_X . Donc F est l'ensemble des $k[\varepsilon]$ -algèbre quotient de $\mathcal{O}_{X \times_k \text{Spec } k[\varepsilon]} \simeq \mathcal{O}_X[\varepsilon]$ plates sur $k[\varepsilon]$ qui redonnent \mathcal{O}_l après passage au quotient par ε . C'est les déformations de $[l]$ dans X .

Proposition 3.0.11.

$$T_{[l]}F(X) \simeq H^0(l, N_{l/X})$$

Démonstration.

$F \subset H^0(l, N_{l/X})$:

Soit $A \in F$. Comme A est plate sur $k[\varepsilon]$, et que $\varepsilon k[\varepsilon] \simeq k$ de façon canonique, on a $\varepsilon A \simeq \mathcal{O}_l$ canoniquement.

De plus, par définition, $A/\varepsilon \simeq \mathcal{O}_l$, donc A est une extension de la forme $0 \rightarrow \mathcal{O}_l \xrightarrow{\times \varepsilon} A \rightarrow \mathcal{O}_l \rightarrow 0$.

Par ailleurs $\mathcal{O}_X[\varepsilon]$ est une \mathcal{O}_X -algèbre et A un quotient de $\mathcal{O}_X[\varepsilon]$, d'où une application $\mathcal{O}_X \rightarrow A$. Cette application envoie $\mathcal{I}_{l/X}$, l'idéal définissant l dans \mathcal{O}_X , dans εA . En effet en composant par l'application $A \rightarrow \varepsilon A$ on retrouve l'application $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_l$.

On a donc construit une application $\mathcal{I}_{l/X} \rightarrow \mathcal{O}_l$ ($\mathcal{O}_l \simeq \varepsilon A$), qui envoie $\mathcal{I}_{l/X}^2$ sur 0, c'est-à-dire un élément de l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{O}_l}(\mathcal{I}_{l/X}/\mathcal{I}_{l/X}^2, \mathcal{O}_l) = H^0(l, N_{l/X})$.

$H^0(l, N_{l/X}) \subset F$:

Construisons l'inverse de l'application précédente. Soit $\bar{f} \in H^0(l, N_{l/X})$, qui se relève en une application $f : \mathcal{I}_{l/X} \rightarrow \mathcal{O}_l$. On considère l'algèbre A quotient de $\mathcal{O}_X[\varepsilon]$ par le faisceau d'idéaux engendré par $(\text{Id}_{\mathcal{O}_X} - \varepsilon f)(\mathcal{I}_{l/X})$. A convient et cette construction est inverse de la précédente. \square

Cinquième partie

Introduction au domaine de recherche

1 Introduction

On s'intéresse aux courbes sur les variétés algébriques entre autre parce que un morphisme $f : X \rightarrow Y$ à fibres connexes avec Y normal (obtenu par exemple après la factorisation de Stein d'un morphisme propre) est caractérisé à isomorphisme près par les courbes qu'il contracte. La connaissance de ces courbes sur la variété permet donc de mieux comprendre la géométrie de la variété étudiée.

Dans tout cet exposé on travaille sur un corps k algébriquement clos non dénombrable. Les variétés considérées sont lisses.

2 Géométrie des hypersurfaces

2.1 Surfaces réglées

Définition 2.1.1. Soit X une sous-variété de dimension n de \mathbb{P}^N . La variété X est dite réglée s'il existe une variété Y de dimension $n - 1$ et une application birationnelle $\mathbb{P}^1 \times Y \rightarrow X$. La variété X est dite uniréglée s'il existe une variété Y de dimension $n - 1$ et une application rationnelle dominante $\mathbb{P}^1 \times Y \rightarrow X$.

Remarque 2.1.2. De même qu'une variété unirationnelle est dominée par une variété rationnelle, une variété uniréglée est dominée par une variété réglée.

2.2 Droites

Les droites contenues dans une hypersurface X de \mathbb{P}^N de degré d sont des sous-espaces linéaires de \mathbb{P}^N . En particulier elles forment un sous-schéma fermé $F(X)$ de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$, que l'on peut étudier directement.

Par des calculs sur les ouverts de carte de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^N)$ on montre la proposition suivante (où l'on a égalité pour X général).

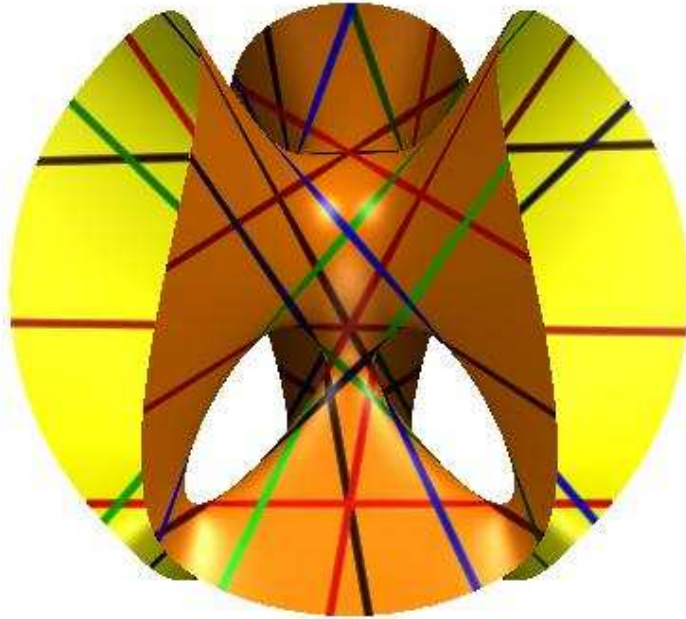
Proposition 2.2.1. $\dim F(X) \geq 2N - d - 3$

Remarque 2.2.2. Plus le degré de l'hypersurface augmente, moins il y a de droites. En particulier pour X générale et $d > 2N - 3$ il n'y a pas de droites sur X .

Exemple 2.2.3. Toute cubique lisse dans \mathbb{P}^3 contient 27 droites. Pour la cubique d'équations

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

(Dans \mathbb{P}^4 , mais la seconde équation est linéaire) dite cubique diagonale de Clebsch, les 27 droites sont réelles. On a donc bien une famille de droites de dimension 0.



On a un résultat important, qui nous permet d'étudier la structure de $F(X)$.

Théorème 2.2.4. Soit l une droite contenue dans l'hypersurface X . On a alors :

$$T_{[l]}F(X) \simeq H^0(l, N_{l/X})$$

Remarque 2.2.5. Il suffit en fait d'avoir X lisse le long de l . Ce résultat est la conséquence d'un résultat plus général sur l'espace tangent au schéma de Hilbert.

3 Variétés de Fano

On s'intéresse ici à l'étude des variétés de Fano.

Définition 3.0.6. Un diviseur D sur une variété X est dit nef (pour "numerically effective") si pour tout sous-schéma intègre Y de X de dimension r , $D^r \cdot Y \geq 0$.

En fait il suffit de tester sur les courbes.

Proposition 3.0.7. Un diviseur D sur une variété X est nef si et seulement si son nombre d'intersection avec toute courbe contenue dans X est positif ou nul.

Définition 3.0.8. Une variété de Fano est une variété projective lisse X dont le diviseur anti-canonique $-K_X$ est ample.

En particulier, dans ce cas, K_X est aussi loin que possible d'être nef : il est de degré négatif sur toute courbe.

Exemple 3.0.9. L'espace projectif \mathbb{P}^N , les hypersurfaces de degré d inférieur à la dimension (ou les intersections complètes avec $d_1 + \dots + d_s \leq n$).

En effet, lorsqu'on étudie les variétés, deux cas extrêmes se présentent. D'une part les variétés de type général, où le diviseur canonique K_X est ample. C'est le cas en particulier si le degré d de la variété est

strictement inférieur à sa dimension. Lorsque l'on fixe la dimension, il y en a donc une infinité. D'autre part les variétés de Fano. Lorsque l'on fixe la dimension, il n'y en a qu'un nombre fini de familles. Mais on sait mieux les étudier.

Théorème 3.0.10 (Miyaoaka-Mori). Les variétés de Fano sont uniréglés en courbes rationnelles.

Remarque 3.0.11. Il n'existe pas pour l'instant de démonstration ne passant pas par la caractéristique $p > 0$. En effet on utilise le morphisme de Frobenius, puis un lemme de "bend-and-break".

Soit $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ une courbe rationnelle de degré d' sur la variété X . Par le lemme 1.1.6, on a la décomposition suivante de f^*T_X :

$$f^*T_X \simeq \bigoplus_{i=1}^{N-2} \mathcal{O}_l(a_i) \text{ avec } d' \geq a_1 \geq \dots \geq a_{n-1}$$

f sera dite libre si $a_{n-1} \geq 0$.

Théorème 3.0.12. La variété X est uniréglé s'il existe une courbe libre sur X . La réciproque est vraie en caractéristique 0.

Remarque 3.0.13. La réciproque est fausse en caractéristique p strictement positive. Kollàr a construit des exemples de variétés de Fano qui n'ont aucunes courbes rationnelles libres. Dans la proposition 2.2.9 on a montré que les hypersurfaces de Fermat de degré $d = p^r + 1$ sont uniréglées par des droites, mais qu'aucunes n'est libre.

Remarque 3.0.14. L'idée de la démonstration est que

$$T_{[f]} \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$$

Or si f est libre, le morphisme d'évaluation $\text{ev} : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}_d(\mathbb{P}^1, X)$ a une différentielle surjective en f , et donc ce morphisme est dominant.

Références

- [AS91] A.Albano and S.Katz. Lines on the fermat quintic threefold and the infinitesimal generalized hodge conjecture. *Transactions of the American Mathematical Society*, 324 :353–358, 1991.
- [Bea90] A. Beauville. Sur les hypersurfaces dont les sections hyperplanes sont à module constant. *Progr. Math.*, 86 I :121–133, 1990.
- [BVdV78] W. Barth and A. Van de Ven. Fano-varieties of lines on hypersurfaces. *Arch. math.*, 31 :96–104, 1978.
- [Col79] A. Collino. Lines on quartic threefolds. *Journal of the London Mathematical Society*, 19 :257–267, 1979.
- [Deb01] O. Debarre. *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 2001.
- [DM98] O. Debarre and L. Manivel. Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète. *Math. Ann.*, 312 :549–574, 1998.
- [Har83] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52. Springer-Verlag, 3 edition, 1983.
- [I.K76] I.Kaplansky. *An Introduction to differential algebra*. Hermann, 2 edition, 1976.
- [Kol96] J. Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties*, volume 32. Springer, 1 edition, 1996.
- [M.F90] M.F.Singer. An outline of differential galois theory. In *Computer Algebra and Differential equations*, pages 3–18. Academic Press, 1990.
- [M.R68] M.Rosenlicht. Liouville’s theorem on fonctions with elementary integrals. In *Pacific Journal of Mathematics*, volume 24, pages 153–161, 1968.
- [Pom83] J.F. Pommaret. *Differential Galois theory*. Gordon and Breach, 1983.
- [Shi95] Ichiro Shimada. A generalization of Morin-Predonzan’s theorem on the unirationality of complete intersections. *J. Algebraic Geom.*, 4(4) :597–638, 1995.
- [S.L93] S.Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, 3 edition, 1993.